

関数 $y = a x^2$ の応用から開平への発展的な取り扱い

山形市立第二中学校

菊池 久人

概要

高校生のとき、ある数の平方根を筆算で求めている級友を横目に、「どうして自分の中学校では教えてくれなかったのだろう」と思った経験がある。そのときはあまり興味も示さず、あえてその方法を身に付けようとも思わなかった。最近機会があつて、二十年以上封印してきた開平の手順やその原理について調べざるを得ない状況に追い込まれた。情けない話だが、インターネットで調べるまでは数学教師であるにもかかわらず、開平の方法を知らずにいた。そこで、一念発起して必修で開平を発展的に扱う授業実践を考えてみた。

キーワード：関数 $y = a x^2$ 、制動距離、開平、筆算

1. 教材化について

(1) 現在の数学教育と学習指導要領

現行の学習指導要領において、昭和33年の教育課程審議会の答申に基づき、学習指導要領に示す内容は、全国いずれの学校においても、指導する必要があることを示すとともに、各学校の判断で学習指導要領に示していない内容を加えて指導することが可能なことを示しているといえる。すなわち、新学習指導要領においては、全員が共通に学習する内容を厳選する一方、選択学習の幅を拡大するとともに、学習指導要領の大綱化・弾力化を一層進め、学校や教員の創意工夫を生かした特色ある教育活動が展開できるようになっており、これまでの学習指導要領より、最低基準としての性格が一層明確になっている。

旧学習指導要領のもとでこれまで指導してきた内容の中には、利便性、系統性の観点で、どうしても外したくないものも少なくない。同じ問題を解決するにしても、特定の定理や公式を理解しているのとそうでないのとでは、その過程が大きく異なってくる。数学の目的の一つでもある過程の簡潔さにも関わることである。定理や公式の意味や既習内容を使ってそれらを導き出す過程を重視する限りにおいては、必要に応じて指導要領を超えた内容であっても、加えた方が課題解決の手段、すなわち選択の幅が増え、多様な考え方が可能となる。

一つ例を挙げてみよう。新学習指導要領では二次方程式から削減された「解の公式」は、かつては $3x^2 + 2x - 5 = 0$ のような任意の二次方程式と $ax^2 + bx + c = 0$ のように各項の定数を文字で表した二次方程式を対比させて、平方完成による解き方によって導かれていた。二次方程式を解く場合、「因数分解による方法」、「平方根の考え方」、「平方完成」、「解の公式」と四つの解き方があり、この中でどんな二次方程式に対しても煩雑にならないで解を導くことができるのが「解の公式」で、最後の切り札的な存在である。また、自然界の事象や実験データなどを処理する場合には理想的な式の形、すなわち整数解や簡単な無理数による解になることはほとんどなく、解の公式を使わないと処理できない場合の方が多い。

このように、学習指導要領の内容は最低限の基準であるという考え方は、指導者としては歓迎できる措置である。したがって、教科書や指導書をなぞるだけでは、発展的な学習はできないし、旧年度の教科書や問題集などで指導法や問題の吟味を工夫しなければならない。唐突に指導するのではなく、自然な流れの中で発展的な扱いができるように留意する必要がある。

(2) 開平の原理について

開平の筆算は一度方法を覚えてしまえば、かけ算やわり算の筆算と同様にそんなに難しくはない。わり算の筆算に似ているが考え方が異なる。2209の開平を考えてみよう。

2209が2桁の自然数 $a \times 10 + b$ に開平できたとする。ただし、 a, b は $a \neq 0, 1 \leq a, b \leq 9$ を満たす自然数である。 $(a \times 10 + b)^2 = a^2 \times 10^2 + (2a \times 10 + b)b$ と表せるから、 $2209 = a^2 \times 10^2 + (2a \times 10 + b)b$ をよく見て、2200と $a^2 \times 10^2$ を比べる。すなわち、22と a^2 を比べればよい。つまり、 a^2 として22を越えない平方数を考えればよい。したがって、 $a = 4$ となる。 $a = 4$ を代入して、

$$2209 = 4^2 \times 10^2 + (2 \times 4 \times 10 + b)b$$

$$2209 = 16 \times 100 + (80 + b)b$$

$$2209 - 1600 = (80 + b)b$$

$$609 = (80 + b)b$$

$609 = (80 + b)b$ を満たす b が見つければよい。 $1 \leq b \leq 9$ だから、これは試行錯誤的に $b = 7$ と求めることができる。以上から、 $a = 4, b = 7$ よって、 $\sqrt{2209} = 47$ である。なぜこのようにうまくできたかという、2209を2乗の展開公式を用いて次のように変形できるからである。

$$2209 = 40^2 + (2 \times 40 + 7) \times 7 = 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2 = (40 + 7)^2$$

上の計算を筆算でやると下のようになる。

4	7		a		b
4	7	22 09	a	a ² × 10 ² + (2a × 10 + b)b	
4	7	16	a	a ² × 10 ²	
87	609	609	20a + b		(2a × 10 + b)b
	609	609			(2a × 10 + b)b
	0	0			0

開平の原理を一般の式について中学生に理解させるのはかなり難しいので、上の文字の式についての説明は割愛し、具体的な数値について筆算の方法と対比させて、2乗の展開公式を用いて説明したい。

上の2209の開平の筆算では、次の式で説明する。

$$\begin{aligned} 2209 &= 4^2 \times 100 + 609 \\ &= 4^2 \times 10^2 + 7 \times 87 \\ &= (4 \times 10)^2 + 7 \times (2 \times 4 \times 10 + 7) \\ &= 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2 \\ &= (40 + 7)^2 \\ &= 47^2 \end{aligned}$$

2. 実践について

今回の実践の対象としたのは、3年の必修数学の3クラスである。「関数 $y = ax^2$ 」の単元の応用から開平の必要性を感じさせる授業の展開を仕組んだ。

(1) ねらい

本実践のねらいは次の二つである。

- ①身のまわりの事象を関数を用いて明らかにすることができる。
- ②開平の必要性、方法、原理を知り、筆算による開平ができる。

(2) 授業の展開

1 時間目

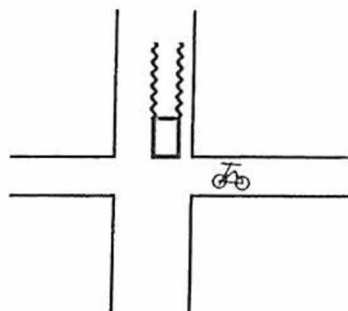
[1] 課題を知る。

運転手の証言と関数

ある晴れた日、交差点で自転車と自動車が発生する交通事故があった。現場検証で自動車の運転手は次のように証言した。

「私は標識通りに時速30 kmで走行していたのですが、急に自転車が飛び出してきたのであわててブレーキを踏みました。」

道路にはブレーキをかけた地点から自転車とぶつかって止まった交差点まで約9.72 mにわたって、タイヤの跡が残っていた。



次の3つのことを参考に、(1)~(3)の間に答え、運転手の証言が正しいかどうか検証せよ。

- ① 走っている自動車の運転手が危険を感じてブレーキを踏んで、ブレーキがきき始めてから停止するまでに進む距離を制動距離という。
- ② 制動距離はだいたい速さの2乗に比例する。
- ③ 時速40 kmで走っているときの制動距離は乾いた舗装道路では約12 mである。

(1) 時速 x km で走っているときの制動距離を y m として、 y を x の式で表しなさい。

(2) 時速30 km のとき、制動距離は何mになりますか。

(3) 自動車の運転手の証言は正しいでしょうか。

[2] 課題を解く。

(3) で運転手の証言が正しくないことを知り、実際のスピードを求めるように指示する。

[3] $\sqrt{1296}$ の求め方を考える。

予想される生徒の考え方

- @ 勘で求め、実際に2乗して確かめる。
- @ 1296を素因数分解し、 36^2 として、求める。
- @ $\sqrt{1296}$ を徐々に $a\sqrt{b}$ の形に変形して求める。

2 時間目

[4] 2209のような素数同士の積の平方根を求める。

・既習内容を利用して求められないことを知る。

[5] 2209の筆算による開平の仕方を知る。

・開平の筆算の有用性を知る。

[6] 他の数について筆算による開平を練習する。

[7] 開平の原理を理解する。

3. 成果と課題

交通事故の現場という現実の世界やテレビの映像で目にする機会のある場面を提示して、生徒の興味を引きつけることができた。運転手の証言が正しいかどうかを検証するのに関数を用いることが有効であることに気づかせるとともに、生活と数学のつながりを実感する機会となった。それは、「実際に $y = ax^2$ の使い道があることを知り、ビックリした。しかも、交通事故というの現場で $y = \frac{3}{400}x^2$ という式を使い、運転手の言っていることが正しい

かどうか判断でき、生活に数学は自然と入ってきていると思った。」の感想から知ることができる。また、次のように「関数を使って自動車のスピードがわかるのはすごいと思いました。いろいろな所で数学が利用され、身近なものなんだと思いました。」という感想もあり、数学が身の回りの事象と密接な関わりがあることを理解したようである。

また、数学とは直接関わりがないかもしれないが、安全教育の面からも「時速30kmでも、制動距離が、6.75mにもなってしまうのを計算によって求め、改めて事故の恐ろしさを知った。」のように、事故の恐ろしさを数字で感じることもできたようである。

開平の方法を導入する際に、関数 $y = ax^2$ の応用問題から入っていくことにより、唐突な印象を与えないようにすることができる。筆算の方法もその原理と合わせて理解することができ、単なるテクニックとしての知識に収まらず、平方根を求めるときのいろいろな方法の一つと位置づけて考えることができる。

次の二つの感想「筆算の開平は覚えるまでは大変そうだけど覚えてしまえば楽に計算できる。しっかり覚えてどんどん生かしていきたい。」「開平では平方根を求めやすくなり、数学の幅の広さを学んだような感じがした。」より、開平の仕方を身につけたことが数学の面白さを広げるのに役立ったようである。

今後の課題としては、開平の原理をより多くの生徒に理解させるための説明の工夫が必要であることが挙げられる。また、筆算による開平の必然性という意味においても、素数同士の積の素因数分解が困難なことを実感させることを加えたい。

開平に関しては、現行の学習指導要領を越えた内容であるが、その原理を乗法公式を利用して理解することを前提に学習するのであれば、素数同士の積の平方根を求める場合の利便性の面でも、非常に有用なことである。

参考文献

「開平計算のやり方」http://www.asahi-net.or.jp/~tz4s-yszw/MainTopic/extraction_ofsquare_root1.PDF

「新しい学習指導要領のねらいと個に応じた指導の充実」http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/14/09/020916ca.pdf

Extracting the square root from a developing problem on a function $y=ax^2$

KIKUCHI, Hisato

Yamagata 2nd Junior Highschool

When I was a highschool student, I envied those who could understand the way of extracting the square root of a problem. Extracting the square root has not always been taught at Junior High Schools. I have been teaching this as the developing problem on a function $y=ax^2$ for a few years, as I would like all students to understand how to extract the square root, I will report my ideas.