

数表の使い方、作り方を教えなくなった学校数学(2)

—カリキュラム分析の観点として、さらに、作業主義の勧めとして—

板垣芳雄(宮城教育大学名誉教授)

概要: 正方形のある分割問題を取り上げ、中学の三平方の定理にも関わり、高校の三角比の教材にもなることを指摘する。それぞれ、平方根表、三角比の表を使うところを見れば、現行指導要領の教科書では、扱われていない指導内容であることが分かる。この論稿(2)は、同じ表題で、算数のことを含め、平方根表、対数表を使わせる授業について考察した論稿(1)を補足し、補充する内容になっている。

キーワード: 平方根、比例配分、勾配、直線の方程式、正接の加法定理

§ 1. はじめに

これは、「新作業主義の勧め」[1]に続く内容である。そこでは、三角関数表を作ること、常用対数表を作ること課題に、大学で講義・演習をし、学生の記憶、取り組み方から見えてくる、高校の数学教程のまずいところを述べた。

一つに、対数のことは、指数、指数関数→対数関数→常用対数、の順に教えられている。だから、常用対数は「底が10の対数」であり、 y が x の常用対数であるということは、10の y 乗が x に等しいこと、と覚えている。

微積分では、常用対数でなく自然対数を用いる、とも習う。

教科書は、対数表の見方を載せるようになったが、対数表の使い方までは記していない。

指数関数を、一般に「定義」するところに数計算の作業話はなし、指数関数を基に任意底の対数関数を定義して、それまでに学校で学ばせられた数学の問題で未解決だったものが解かれる訳でもない。ひたすら、微分積分に向かっているようなもので、算数や中学の数学から遠ざかる。

常用対数表を使うことは、乗除算を見直すことになり、且つ、10進位取り記数法を直視することになる。学習内容は、算数で覚えた計算に有機的につながっている。加えて、使い方を真似し学ぶことは、対数に親しみ、馴染むことになるはずである。

常用でない一般の対数関数とて、常用対数の定数倍なのだから、底が10の対数に馴染むことは、一般の対数に親しむ路になると考えていいと思う。

成った数学から見れば、指数関数の指数処理をしているのに等しいことにはなるが、同値と見るのは、個別の数値関係を捨象した上位理論から鳥瞰してのことである。べき(器)

で書かれた指数法則では、対数に慣れるために歩く、地上の路にはならない。

表を使う作業で、常用対数を対数として、指数とは独立に、あるいは先に、学ばせる順も、作業主義の推進として、おもしろいと思う。たとえば、

常用対数表→常用対数→対数関数、(常用)指数→指数関数、というように。[4]

昨年発表してから半年後、大学1年生に、対数表を使えるかを試す機会を作ってみた。大多数が、使えなかった。一応説明してでも応用は効かない。指数法則から導き教えられた、対数の全性質を知識としていてもそれを使えない。

作業をさせなければ身に付かないのである。使わせられていれば覚えているはずである。

大学3年生に試した結果については、論文(1)に記してある。この(2)では、対数表ではなく、平方根の表、三角比の表が使われる場面を述べることで(§3)、数表を使うような授業をすることを勧める。あわせて、こういう使い方が現れないような内容展開に、学校の数学がなっているといたい。

このことには、また、最後の節(§4)で戻る。

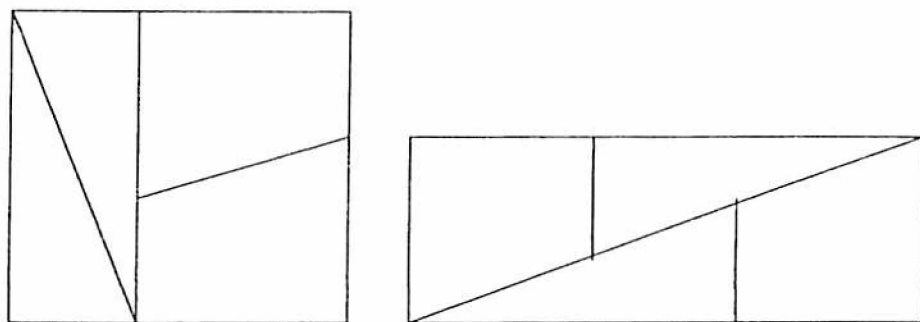
注[4] 作業になる指数表として、数学教科に復活させたいものに、複利表がある。

§2. $8 \times 8 = 5 \times 13$?

次の問題を Fibonacci の名で呼んで、大澤弘典[2]が算数の教材に取り上げた授業実践を報告している。それを中学数学向きに変えて、 $8 \times 8 = 5 \times 13$ の“証明”と題して記す。

「辺が8cmの正方形を、左図のように3cmを最小辺とする直角三角形2つと、上底が3cm、下底が5cmの台形2つとに切る。それを、右図のように並べ替えると、縦が5cm、横が13cmの長方形になる。

両方の面積は等しいから、 $8 \times 8 = 5 \times 13$ である。」



大澤は、5年生の教室で、これを方眼模造紙を用いて実行させた2つの授業について、

生徒たちの驚いた様子を記している。中学生にも、高校生にも、同じようにして生徒の関心を集めることができると思う。

さて、見掛けが似たものに、「全ての三角形は2等辺三角形である」ことの“証明”がある[3]。試したことはないが、この“証明”を板書して、論理のどこに間違いがあるかと問い、来週まで考えて来いと言ったら、どんな答えが返ってくるだろうか。

“証明”に従って、正確に図を書いて行くと、いんちきに気付く。

面積についての問題も、方眼紙の 5×13 長方形に、 8×8 正方形分割の図形の直線を、定規を使い、細い線で丁寧に書き込んでみると、対角線を挟んで隙間ができ、うそをついていることが分かる。(大澤は、方眼紙への作図を指示しても、隙間を描けない児童がいたことを報告している。)直線の傾きについて、数値的には、

$$3/8 < 5/13 < 2/5$$

である。

大澤の授業実践の報告を読んで、私が中学数学の内容について導いた結論がいくつかある。

一つ、直線の傾きについて解説するのに、横8につき上に3なら、それをそのまま書いて、 $8:3$ と比例式になり、 $8:3=16:6=4:1.5=8/3:1$ などなど、変形は比例の表を作るように進められる。

一つ、上の面積問題は、直線の傾きを導入するのに、直接的で、面白い。

(地面や線路の)勾配→正接(tangent)

一つ、方眼紙に引かれる線など、図形としての直線、その直線の方程式を考えるのに、伴って変わる量、2変量の変化の割合などを介在させない方がいい。

一つ、指導要領の項目をとって、〇〇概念の導入問題とする言い方は避けたい。言い方がその問題を限定し、その問題の広がりを見難くしかねない。

さて、中学の教材にしてどういう授業が考えられるか、さらに、高校については、どういう授業内容になるかについて、次節で説明する。

§3. 数表を使う

中学3年の教室で前節の面積問題を取り上げたら、3つの斜めの線に着目する生徒がいるように思う。各々の長さは、2辺が、(2, 5)、(3, 8)、(5, 13)である直角三角形の斜辺として計算され、隙間の平行四辺形の、2辺の長さに対角線の長さを形成する。

辺は、 $2^2+5^2=29$ の平方根と $9+64=73$ の平方根である。平方根の表によって、 $\sqrt{29}$ は5.3852、 $\sqrt{73}$ は8.5440と知る。その和は、13.9292である。

対角線は、 $25+169=194$ の平方根であるが、印刷して1ページの、平方根表には入っていない。1ページの表には、3桁の数については10きざみで平方根が記してあり、190、200の平方根は、それぞれ13.7840、14.1421と載っている。

(数学にしかない、こういう表の印刷の仕方自体楽しめる。) 13. 9292はその間になる。2辺の和13. 9292より、対角線 $\sqrt{194}$ が小さいことはどうすれば分かるか。3つほど考え付く。

(1) 13.929×13.929 を(筆算)計算すると194.0170・・・と194より大きくなる。13.929 \times 13.92では、194よりまだ小さい。

(2) 平方根表の190, 200の平方根から比例配分して194の平方根を出す。13.927となる。13.929より小さい。(表の値には誤差があり、微妙なところである。見積もり、概算、概数)

(3) 板書して、開平算で13.9283・・・と計算してみせる。

こう並べてみると、平方根について現今、このようなことはさっぱりやらしていない、やらなくていい「数学」を教えているという気持を私は強く持ちます。

大学生に開平算について説明し、平方根の計算をさせたら、説明の時間に休んだ学生で、2は、1.4²と1.5²の間になる。次に、1.41²=1.9881、1.42²=2.0164だから、 $\sqrt{2}$ は、1.41と1.42との間にあることが分かる、というように「計算」して、答えたのがありました。教科書の平方根概念の説明をしっかりと覚えていたのですね。[4]

確かに、電卓があれば平方根表は要らない。しかし、学校で、平方根表を使うことで学ばれることが、電卓があるから学ばなくてもいい、ということにはならないことが、お分かり頂けるのではないだろうか。

さて、面積問題は、高校数学の領分に入る、三角比の表を使わせる内容にもなる。

隣間の角度の計測である。勾配が2/5, 5/13, 3/8の角は大きさ何度か。

1°きざみの1ページの数表からは正確な角度は分からない。比例配分(一次補間)の計算にはできるが。

隣間の角度を、その勾配で計ったらどうなるか。正接(tan)の加法定理で計算できる。2/5の辺と5/13の対角線のなす角については、1/75となり、2/5の辺と3/8の辺のなす角については、1/46となる。[5]

角度で大きさを見るには、1ページの表では、やはりだめである。電卓を使って、0.764度、1.245度と知る。

作業に準ずるこういう計算も、「逆三角関数」に近づきやすくするかもしれない。しかし、そういう「関数」のための内容と考えるのではなく、三角形の辺にしる角度にしる、算数で学習する三角形のことであり、それと結びついていることに、教材としての大きなよさを思う。

注[4] $\sqrt{2}$ や π は無理数であるという知識は、この問題解決には無力である。

[5] $\arctan(2/5) - \arctan(3/8) = \arctan(1/46)$

§ 4. 習うより慣れろ

三角形の辺や角のことを書いたところで、参観した教育実習の、5年の算数、三角形の合同についての研究授業を思い出している。

実習生は、三角形を一つ印刷した紙を生徒に配り、これと同じ三角形を書きなさいと言ってその授業を始めたのであった。目標は、「いろいろな書き方がありますね」となって、3種の合同条件にまとめることに設定されていた。書き方はあくまでも書き方で、作図法を論理の「条件」のように考えて、がんばって、教えようとしなくていいという私の思いは、当時も今も変わらない。でも、実習生は、教科書の「合同」のところを授業するように指示されたわけであろう。目指す「まとめ」の板書を時間内にできるように頑張らざるを得ない。

その授業を参観して忘れられないのは、そういう算数内容にかかわることの他にもあって、教えられて真似て書いたのだったかもしれないが、その自分のノートに書いた三角形の辺と角を、ひたすら測って調べている児を見たからである。測ることに集中しているから、「こういう書き方もありますね」という先生の話も耳に入らない様子だった。

私は、こどもの原風景を見たような気持ちになった。

考えてみると、いきなり出題されたら、どの辺もどの角の大きさも同じになる三角形を書くという課題自体に戸惑う児の方が多いのではないだろうか。全部同じにしようと考えなくて、1辺を同じに書き、もう1辺も同じにと、考え進む。一つ試しに書きあがったが、先生に「本当に同じ？」と言われたらどう答えるか。「測ったら、同じ、みたいです。」

いろいろな書き方をいう前に、児童各々の、一つの写し描く書き方、正確な書き方、上手な書き方などなどがあるのだと考えたい。種種、類別、優劣は二の次に。

測る、作図する、こういう作業が希薄な教科内容になっていないか、と言え、教育方法でなく、教科内容のことになる。それを、カリキュラムの親方として、己に問うている。

何で、三角形の合同概念や、合同条件めいたことを算数で教えるのか。

円周、円の面積についても、上手な測り方、正確な測り方というのが原始の問題としてあり、「円」について算数が請け負うもっとも大切な課題であると私は考える。そして、面積を方眼の升目で計るなど、学生にその作業思考のないらしいことから、そういう作業を十分に課されなかったのだろうと推定している。

何度か円周率のことについて書いてそのことにも少しは触れてきたので、 π の指導のことは引き合いに出さないが、カリキュラム論に及んだところで、述べるのに今ここが適切に思うことが一つある。

三角形の面積の、底辺 \times 高さ $\div 2$ 、はしっかり教えるようになっているし、円の面積について、 3.14 という数値を伴う計算方法を教えるが、正三角形の面積の計算法は教えない。 π の近似値は暗記させるが、 $\sqrt{3}\div 2$ の近似値は中学3年まで出てこない。[-]

正三角形を書き、その高さを測らせる授業などいかがなものでしょうか。

作業のことから、教科内容の話に戻す。

比例式は数表のようなところがある。くり返し使い、慣れることができる。比を、割合概念に従属させて考えてはまずい。比例式について、論文(1)で述べたことに補足するように、ここに、少し書き足しておく。

比例式の使い方(いろいろに、くり返し)→比例関係→比例の式→比例のグラフという流れを考えると、そこでは、いろいろな変量についての「変化の割合」は主要ではなく、無用、じゃまでさえある。

一次の式になる数量関係についても、グラフに描かれ、 x の式にされる。それに対し、

直線(図形)→(座標平面)→直線の方程式という流れは、やはり別に教授しないといけない認知系列である。こちらでは、図形について比例式を使う。

直線の傾きは図のこと、変化の割合は変量のこと、対象と事象の違いがあり、認識上では統括できない。

このことは、「接線の方程式」を求めよという試験の問題で、「直線の方程式も知らない大学生」がたくさんいることを知って驚き、たどり着いた考えである。

ちなみに、むかしの教科書では、このことがしっかり認識されていたと思う[4]。

教材例に取り上げた面積問題(§2)は、並べ替えの図を方眼紙に書いて、傾きの違いに着目すれば、傾きが同じで直線に延びる線を考えることになり、方眼紙を座標平面に見立てて、その方程式に導く。

直線、三角形、円などのかたち、平面図形は、算数・図工で親しみ、扱い慣れたものである。直線の方程式は、見慣れた直線を、小学校で習わない座標平面に乗せて作られる代数式である。

他方、代数式やその処理法は、算数という文章問題を解く方法でよく学ばれるのだと思う。

中学の数学を作業主義でやるのに、「関数」という語は使わない。教えなくてもいい、ということは、教えない方がいい用語のようである。[6]

[注] こういう見方は、「塵劫記」を読んで、教えられた。面積については、第23 検地の事——土地の面積、この章の第8番に、 $\sqrt{3} \div 4$ に相当する、0.433が出ている。

[6]大学の微積分でも、線形代数でも、「関数」の「逆関数」は、あらかじめ定義して説明しておくほどのものではないと、近年、講義して思った。

註

- [1] 板垣芳雄：新作業主義の勧め — 函数表の使い方、作り方を教えなくなった学校。数学一、東北数学教育学会年報第35号、2004、pp.45-58
- [2] 大澤弘典：小学校における Fibonacci の面積問題の教材化についての試み、東北数学教育学会第35回年会発表資料、2003、11、29。
- [3] M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press(New York), pp.1006-1007, 1972
- [4] 中西正治：国枝元治の関数教育に関する研究、全国数学教育学会誌、数学教育学研究、第9巻、2003、pp. 213-221。

上記論文で、大正7年のある会合で、意見の対立があったことが記している。その一方の国枝正治の考えを、この節に述べたことに則して、私流に、作文してみよう。

「算数の直線は、平面図形にもなり、空間図形にもなるが、そのどちらでもない。平面図形にされた直線が、座標平面では、一次式になることは、三角形の相似の考えがもとになっている。相似比の考えをバックに、直線の方程式が、一次式になることが学ばれる。その学習に伴って、一次方程式のグラフ、比例の“グラフ”で習ったそのグラフ、を書けば直線になることも分かる。」

Calculation Practices using Functional Tables deeply help Students to Understand Learning Matters and to Build Their Knowledge (2)

—The arguments about school teaching mathematics curriculums —

ITAGAKI Yoshio (Miyagi University of Education)

This paper extends and supports the arguments (1) under the same title of this. “Cut the square and Build the rectangle” problem which brings paradoxical result is considered with relation to secondary school mathematics, and high school mathematics, namely as the subject to Pythagorean theorem and trigonometric ratios. Those teaching matters use tables of squares and square roots of the texts, and trigonometric tables respectively. This fact shows that current curriculums break such the connection between primary and secondary ones. We remark also that nowadays students cannot grasp the equation of a line on the Descartes' plane.