東北数学教育学会年報
2005.3.31　第36号

# 数表の使い方、作り方を教えなくなった学校数学(1)

## —カリキュラム分析の観点として、さらに、作業主義の勧めとして—

板垣芳雄（宮城教育大学名誉教授）

**概要：**小学校２年算数で、一年間かけて九九の表を作る。中学ではルート記号を習うが平方根の表作りはしない。高校では、教師がサインやログ記号をくり返し板書するが、三角比の表や対数表の作り方は教えていない。作ることはしなくとも、平方・平方根表や対数表を使う問題演習をやった方がいい、と工業大学１年生の「大学への数学」を担当した体験から論ずる。論述の根拠に、工学部３年生の数学理解の実態を、３つの事例として取り上げている。

九九の暗誦は２年のときだけで終わることではない。学童によっては、場合場合で、九九の表を６年まで使わせたい。表類似に、算数で早くから使いたいものに、比例式がある。

**キーワード：**平方根表、計算手続き、常用対数、比例式、比例配分

### はじめに

これは、「新作業主義の勧め」と題して発表した論稿[１]に続くものである。それらを補足し、敷衍しながら、数表の作り方より、使い方に重点を移して論じた。その結果、各所で算数教育のことに言及することになった。大学生向きに構想した「計算数学」の、表の作り方について再述した節でも、算数教育法に言い及んでいる。

論稿［１］のその１では、三角比の表を作るという課題の教材開発を大学（工学部３年の演習）で実行して、１８０度と測る角度とラジアンとでは、「計算数学」では、大きく違うものとして物語られる状況を描出した。度数と弧度を単なる単位の違いと説明していることは、その説明個所、説明文を含め、いろいろな点で現下の教育課程の性格、性向を象徴している。なお、三角比の表を作る計算で、平方根の計算は、電卓のルート・キーによる。

対数表も、四則演算と平方根の計算に電卓を使用して作成できる。論稿のその２では、対数表の作り方を課題とする教材について取り上げた。

サインやロガリズムについて、定義、諸性質、諸公式を習ったからといって、表の作り方、計算の仕方は見えてこない。表の作り方を学習することで、三角関数や対数関数について新しく学ぶことがあり、改めて学び直すことも多々あるのだと思う。

三角比の表を作るという課題では、加法定理が基本的に、自然に使われる。ただし、一般角についてでなく、０°以上、９０°以下の角度について。

翻って、サイン・コサインの諸公式をいっぱい並べて覚えさせることを「大学数学の基礎」とする現・前の教育課程に準じたテキストを見ると、加法定理、倍角、3倍角、半角の公式がどう使われるのか、そういうことに物語の筋はなく、三角関数の章の問題も、ただ入学試験に向かっているようで、寒寒とした感じになる。年齢相応に、記憶減退、計算力低下で、私の気持ちが、若年層の学力低下組に近くなって、同情的になっているということが多少はあるにしても、決して、不勉強層に同調してのことではない。まじめに受講している学生でも、そういう公式をちゃんと覚えていないのは、ろくに使わなかったからではないかと考えるのである。理工系に進学すれば、忘れた頃に、微分や積分計算で断片的に公式を思い出さなければならないようにはなっているが。

いっぱいの公式と面接したはずなのに、また、一方でグラフの書き方を習っただろうに、三角関数に親しくなったどころか、消化不良の症状を呈している学生が多いとは、先の発表で言及した。そういう学生がいるのに、私たちは、言葉の胃腸薬をまぶしながら、「角度はラジアン単位にとれば、サインの導関数は、ほら、コサインになるね、」と微分積分を講義していることになる。

三角比の表や、常用対数表を<u>作ること</u>は「大学数学の基礎」に入らないにしても、つまり、<u>作り方</u>は分からなくても、学習で、<u>使い方</u>は分かるという段階があると思う。使うという作業は生徒全員に見本演技をして真似させることができる。

高校のテキストに、部分復活のごとく、常用対数表の解説も載るようになったようであるが、学生たちが、表を<u>使うこと</u>はさせられなかったことは、調べてみると歴然である。原理となることを公式としては習っても、使う作業をしていないと使うことが出来ない。させていれば、できる。その「できる」ことをさせていない。

中学での、平方・平方根表についても同じようなことが言える。平方・平方根表を使わせるような授業を勧めたい。そう考えるようになったきっかけは、対数指導や対数表についてとは関係ないことだったのであるが、数学教育としては、表を使うようなカリキュラムということで、共通に論じられるところがあると考えている。

表を見ない現今の指導では、平方根の概念それ自体を教えることに重点が置かれる。個々の数の、個々の平方根は、主でなく従とされる。

教育方法では、形のない概念は主でも従でもないと扱われるべきだと考える。

生徒に教えるのは平方根のことで、平方根の概念を教えるのではない。

平方根といえば、論稿のその1でも、ついでにと言って言い足したことであるが、4の平方根は＋2と－2と2つ、というのは、やっぱり不味い、拙い。平方が4になる数が4の平方根であり、と平方根が代数方程式の解として定義されて、2つにされたのだろうが、長さに負はないけれど、負の数を言う前から、ルート2と測られる長さがあることを忘れている。

「大学への数学」の試験答案に、記号のルート4、すなわち$\sqrt{4}$を、±2のように書いているのが複数あった。こいう間違いを生む原因は、学校数学のカリキュラムが作ったの

だと思う。

立方根（３乗根）も、平方根のように、且つ一般指数についてと同じに、正の数だけについて考えることにしていい。

ついでに言えば、複素数の導入には、虚数単位の文字は後回しで、ルート記号で$\sqrt{-4}$とか、$\sqrt{-1}$と書く指導案を提案したい。つまり、こちらの方は、代数方程式を解くという問題と素朴に結びつけて語り始めたいということで、だから、複素平面の導入というのは、後回しである。

$-4$の平方根は、$\pm 2i$で２つある、などと惑わすようなことは言わない方がいい。初めから、虚数を虚数単位$i$で教えるのはまずい。公理的導入をしては実数と虚数の影が薄く、解決すべき問題で複素数の章の、他との連絡路が見えなくなってしまい、高校生にも、教える側の教師にも嫌われる深い原因になったと考える。

２つあるという平方根の定義は覚えてなくとも、ルート４は「に、にが４」だから、２と、ぱっと出せることが大事である。

九九の意味は分からなくとも、表を見ながらでも九九を使えるようになることが先決である。

### §１．九九の表

石田一三が、日数教学会誌・算数教育に載せた論説に記しているが、教科書には、１０までの数の分解、１０の合成・分解による繰り上がりのある足し算の説明をした後、「それを覚えなさい」と書いてない、だから、加法九九を覚えさせることが忘れられ、足し算「説明法」が、空欄を埋める問題などになって市販のペーパー・テストで勉強対象にされている［2］。

説明法を覚えるより、足し算を正確に実行できることが大切である。加法九九の全てを、暗記させねばならない。一桁の数の足し算を、耳で聞いて、また、２つの数字を見て、ぱっと答えられるようにしなければならない。

もちろん、２つの数記号にする前に、磁石玉を手で動かして数え、次には、目で数えて答えを出して、１０の合成・分解の見方も習い、いろいろな具体物について、合併にも適用できることが分かった上での暗誦である［３］。

また、乗法九九の暗誦について、石田は、次のように説く。

２年で教えても覚えきれない児がいる。覚えの悪い児もいる。そういう児には九九の表を見てもよいことにする。

覚えてもしばらく使わないと忘れる。３年の始めにそこを調べて手当てをしなければならない。新しいことを勉強して記憶が薄れたり、あいまいになったりすることもある。そういうときは九九の表を見て思い出すように指導する。

毎学年の始めに調べて、その学年のその児の力相応に、（新たな意味を付加して）思い

出させ、「学び直し」、小学校を卒業するときは、どの児も九九は暗誦しているようにしなければならない。

学年を超えてのこの注意は、九九の指導に限らないわけで、石田は、それを実行する手立てを、計算や割合などについて「〇〇指導の定石」と題していくつか著わしている。

教育学部の学生に、「私は、母に教えられて、小学校に入学する前から暗誦できた」という女子がいた。付属小の教師に「1桁の数の足し算など、入学前から、たいていの児ができます」と言われたことがある。「九九も初めてではない児がいる。」だから、ど忘れしても答えをすぐ思い出せるように、掛け算の意味に重点を置いて教える、と。

だが、使うことを通して意味が分かり、意味は忘れても、くり返し使って身体で覚えたことは忘れない、ということに、常に戻って算数教育を考えることにしたい。

日本語の九九に種類はなくて九九は一つでも、九九、あるいは九九の表は、使う学年や場面で、個々人それぞれの算術計算に、新たな意味を付加してくれるのだと思う。

**§2．平方・平方根表**

工学部の演習時に、業界用語でいう机間巡視中、ある学生の取り組みを見て一言二言訊ねたところで、ある関係式を解読できないらしいと気付いた。それは、円の直径を辺とし、その円に内接する三角形の、直径でない1辺の長さが与えられれば、残りの辺の長さも計算される、という内容にあたる個所である。円の直径は2とした。

直径を辺とするから直角三角形になるということは（ターレスの定理）、中学で習ったねと言って話してある。それを命題として把握できないのもおれば、直接証明となるとほとんどの大学生が出来ないことは体験済みである。

この一事が示すように、大学生の数学を見聞きして、総合幾何の論証の勉強はしていないに等しい、そういう指導要領になっているからだという思いは、強くはなっても、弱まることはなかったのであるが、そのことは、また別に論じなければならない。

くだんの女子学生は、ピタゴラスの定理は、3平方の定理として知っているのである。2辺の平方和の平方根は斜辺の長さである。3辺を $a$，$b$，$c$ として、$\sqrt{a^2+b^2}=c$ である。これはいいが、$\sqrt{c^2-a^2}=b$ という関係がぱっと頭に浮かばない。いや、こういう風に文字式に書けば理解すると思う。しかし、ピタゴラス定理の話だけでは、具体的に $a$ が与えられたとき、$b$ がどう決まるかまでは読めない。

このことから私が思ったことは、中学で、数値で与えた $a$，$b$ から $c$ を計算したかも知れないが、$c$，$a$ から $b$ を計算させられたことはないのだということである。多分、計算は、前者についてもほとんどやってないかもしれない。黒板の直角三角形について辺を指差しながら、「斜辺が5、この辺が4なら、もう一つの辺は？」と質問して答えさせる。5と2で質ねたら、答えはルート21となり、13と12で質ねたら、平方・平方根表を見ながら、5と答えられる。

もっとも、表を使う計算を、単に、上の関係式を教える方便として提案しているわけではない。

数値を、２と１、４と２、６と３、として計算させれば、平方表を見て暗算し、答えは、３、１２、２７の平方根で、後の方は、$2\sqrt{3}$、$3\sqrt{3}$と直せる。

この直すところを、ぱっとできない高校生が結構いるらしい。このごろは大学生にもかなりいるような感触がある。中学生のときは、やらされたことがないから、というのが原因になっていると思う。やらされれば、覚える。

机間巡視で、３辺が、２，１、$\sqrt{3}$の三角形を、多分、$\sqrt{3}$というので、３０°のコサインの三角形と思い出したのはいいが、正三角形とも結びつけない学生がいた。

平方・平方根表を使わせる速算練習は、直角三角形でなく、長方形の縦と横と対角線の問題に設定してもよい。上に例とした、４と２、６と３は、さらに、８と４と続くが、その計算を振り返ってみると、$a$が平方数の場合の、$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$という変形に当たるとみることができる。５月の発表で［２］、中学数学で、この関係式は「証明」するかのごとく話しても知識にならない。納得の形としては、両数が平方数のときを試させるのがいいと考えると記したが、この論究で、一方が平方数でないときも、上のような表を使う計算の中で実行されると知った。

なお、くだんの女子学生は、４進法の掛け算、割り算などを演習題にしたとき、４進「九九」の表を作ってそれを見ながらやっていた。「いちいち見ないで、暗算で出来ないのか」と言ったので覚えている。計算の途中の１０桁の小数もみな書きまくるタイプで、「せめて、電卓のメモリーを利用しているところは、計算記録では省略しろ」と言いたい気もしたが、後期の講義で、私の、式の変形の間違いに、２度も気付いてくれた。興味、関心、態度から見ればもはや優等生になった。

なお、間違いの一つについては、次の節に書いた。

## §３．アルゴリズム

次のようなｘの式　$x-\dfrac{x^4-N}{4x^3}$ を、　$\dfrac{1}{4}\left(3x+\dfrac{N}{4x^3}\right)$

と変形した個所を、講義の後で「どうして、こうなるのですか」と質問に来た学生がいた。「自分で計算してみろ」と応えたのであるが、変形のところなど読みもしない、気にもかけずで、「どの式で計算するのですか」と訊ねるだけの学生に比べれば、ずっとましと考えなければならないのであろう。

午後の演習時間になって、別の学生に、「変形した式の括弧のなかの、分母の４が要らない。」と指摘された。

「学生が、文字式の変形ができない、簡単な分数式の処理ができない」というような嘆き節を、非常勤講師室でよく耳にする。私も、同じようなことを言ってぼやく。ただし、

この頃は、立場を換えて、中学でも、高校でもそういう勉強をろくにやっていないからだと思う、と応ずるように変わった。中学の数学教科書の内容は、式を変形し、処理する能力を鍛え、身に付けさせる方を向いてはいない、と見ているからである。高校に進学すると、そこへ積み上げるように、代数式のようには変形のできない、サインやロガリズム記号を、ともに「関数」と呼んで、目と頭の作業もっぱらで教えられる。

分数の足し算、引き算など、学校の外で、あるいは学校を出てから用いることは、めったにいない。単位の付いた名数、いわゆる具体数について、分数の加減算などをすることはないのだと思う。だいたい、分数の名数に日常生活でお目にかかることはない。

しかし、数学の文字式の文字は、分数や小数となる数を代表する。また、文字式の分数式は、高校の高等数学に必須で、その学習には分数の計算処理については最小限のところを、算数で、身に付いていなければならない。

この論究では、代数式の変形、処理能力の鍛錬のことは問わないが、この節では、計算のアルゴリズムを表す文字式を話題にする。

上に取り上げた式で、$N$を１０とし、ｘが３（$=x_1$）のときの値を電卓計算し、結果の値を$x_2$とする。同じ式で、ｘが$x_2$のときの値を計算し$x_3$とする。以下、$x_4$，$x_5$，$x_6$,,と続く。

この計算を、一般に、$x_n$から$x_{n+1}$を計算する式として書けば、１０の４乗根を計算する、ニュートン法という呼称で定着した反復式である。講義では、一気にこの式を書いている。

くり返す同じ計算手続きをアルゴリズムと呼ぶことにすると、そのアルゴリズムを、反復式は表現している。式を、初項$x_1$によって決まる数列の漸化式といってもいい。ここでは、近似計算という作業を目的とする計算式である。アルゴリズムのことは高校で「電子計算機のプログラム」の学習事項に、漸化式は「数列」の章の事項になるが、漸化式で近似計算する作業は、どちらの内容にもされていない。

さて、その電卓での計算を、計算の出発値を変えたりして、計算演習させ、結果を記録させると、学生は、さまざまな書き方をする。なかには、いちいちの数値で計算式を書くのがいる。提出させた記録の仕方に、最低限のルールも形式も、マナーも見られない。

勿論、計算の仕方も一様ではない。教えないうちは電卓にメモリーの機能があるのを知らない。最近、びっくりしたのでは、「この電卓はマイナスの計算をしてくれないので、」と言うので、どうやるか見ていたら、ｘの３乗、４乗をべき·キーを使って計算していた。どうやら、計算式を書くような気持ちで電卓のキーを押している。

ともあれ、この節で、報告したかったことを記す準備はもう十分のようで、それは、数値までは書かないまでも、漸化式にｎ＝１を代入した式を書く、それを計算する、ｎ＝２を代入した式を書く、それを計算する、,,のように、与式を読んでいるとおぼしき解答が少なからずあることである。作業としての計算の手続きを伝えるのが式であると考えていない。計算手続きが、ｎに１や２を代入して定まるわけではない。計算法があって、それ

で計算する、計算手続きは式に書かれなくとも存在するものだと考えていない。

記号に従順で、記号にとらわれる学生がいるのは、電卓が進歩して、括弧記号も含めて、式を打ち込むように記号操作で計算できるようになったことも影響しているのであろうか。携帯メールの記号操作に手馴れていることも影響を与えているのかもしれない。だが、計算をしない添数記号のｎにまで、２を代入すると言うのには同調できない。式に書いたのは計算の仕方、アルゴリズムであって、その計算で生成される数列の順序は派生物である。それを記すｎを順序数に置き換えて、計算法が確定するわけではない。

ここで、やはり、概念的知識で提示されるようになった「関数」について、付言したくなる。数列$\{x_n\}$も、自然数ｎに、第ｎ項が対応する「関数」とみれば、「ｎに１を代入する」と言うのは、関数の変数のことで、変でも妙でもないことになる。関数ｆ（ｘ）のｘに２を代入すると言うように［４］。

§４．対数表

ルート記号についての等式があって、それを適用して、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$は$\sqrt{6}$に等しく、その等式から、$\sqrt{4\times 3}$は$2\sqrt{3}$に等しいことがわかるのではなく、話は逆で、こういう個々の計算の妥当なことを、文字の等式$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\ b}$が表しているのである。と、初めて教わる生徒にとっては、ルート記号の入った式をそういう風にとらえて相手したいと考える。等式関係を、その関係の成立を証明もどきの説明で示し、確かに成立するから、以後、公式とするというのが数学の行き方になっているが、ここは、算術的に「証明」されただけで確実性が証拠付けられたと理解できるレベルの内容ではない。「証明」について説く前に、平方根表の１．４１４２と１．７３２１を掛け算させて、$\sqrt{6}$の２．４４９５になるか比べさせるような作業が大事だと思う。その前に、１．７３２０５０８の自乗を計算させておいて。

さて、高校教科書の対数の章を見ると、内容が、対数記号の説明と、その記号の入った公式を適用する記号処理に終始しているようで気になる。対数についても、教科書に計量的なことや数値計算は希薄である。対数記号に数量、数値関係としての肉付けはなく、裏付けもなく、章の問題に計算らしい計算はない。

そもそも、$a$を底とする対数はと一般のことにして話し始め、しかも、全体の筋としては、指数関数の「逆関数」として導入している。

幾何曲線について発見された、互いに逆関数であるという関係が、片方の定義とされているのである。歴史的に発見された関係が定義のようにされているというのでは、数学Ⅱにおける、微分積分学の基本定理もそんな役回りに近くなった。

発見されたように、あるいは、未知の世界に導くように話を展開するのではなく、論理の糸を紡ぐように、定義、定義、定理、証明、定理、証明、と直截に、数学のスタイルで、学ばせられると、対数の知識はどうなるのか気に掛かる。授業で、もっぱら、底の変換公

式を使うように作られた問題などを解き、解かせていると、気掛かりが心配に変わる。

問題を解かせて強調することは、もっぱら、使う公式とその記号式の覚え方になって行く。そういう公式はどこで必要になるか、と考えてみると、微分積分のある公式を導くところでだったりする。でも、もっぱら上級の数学に向かう都合で高校の数学の内容を考えては、いけないはずである。高校３年間の数学が、文系・理系を問わず、共通の基礎教養とされていたときでさえ、われわれは、小・中学校などの、下の数学にどう開いた内容であることが大切か論じてきたであろうか。

ここに記そうとしている教材としての常用対数の学びと対数表の使い方は、下に開いている内容を提供し、また、かつて、それを学ばせたことは、上級の数学にと急いでは認識不十分になることを、防ぐ働きをしていたように考えるのである。

一般の対数でない常用対数にもそういう働きを見る。

話を常用対数表のことに進める。

大学の工学部３年生に、それまでの講義では触れることなく、１０分ほどとって解答させた問題とその結果について記す。調査状況についての詳細は省き、問題を次に記す。

「右の表は、常用対数表から抜き書きしたものである。これを使用して、次の計算を行え。計算は、表の数値をどのように用いたかが分かるように書け。

（１）　２．８６×４．３７

（２）　１３．９÷２．８６　　　　　　　　（“右の表”は省略する。)」

（２）の場合でいうと、与式の対数は、引き算で０．６８６６と計算され、“右の表”には、対数がちょうど０．６８６６となる三桁の数の４．８６も入れてある。なお、それに隣接する数４．８７と、その対数も並べて。

従って、答は、４．８６となる。電卓を使うのではないと注意したから、さすがに、４．８６０１３９８６と書いたのはいなかったが、試験の一問として出したら、「習っていなくて分からない」からと、筆算して、４．８６０１・・と書いたりするのがいると思われる。

さて、受講生は３０人で、この答を、１０の０．６８６６乗と記号式に書いているのが１１人、驚いたことに、そこで止まっているというか、終わっているのが、１１人の内で８人もいたのである。ここまでは、私は想像しなかった。想像しなかったが、彼、彼女らは、まさしく教科書の展開のように、対数を指数記号で覚えているのである。ご丁寧にも、そのうちの一人は、電卓の１０のべき乗キーを使って、１０の０．６８６６乗を計算したようで、４．８５９５４１４３と記していた。

問題の商の対数を０．６８６６と正しく出しているのが、上記の１１人を含み全部で１６人（計算ミスが２人)、答となるその真数まで書いているのはわずかに５人である。白紙４人、誤答１０人。

講義の履修では優等生であるのに、べき乗の式で終わっている解答を記している。次週の講義で解答を示して解説した。そうしたら、午後の演習時には、高校教科書の対数表の

コピーを添えて演習課題にした「対数表を使用する問題を２つ作れ。もはん解答も記せ。」にちゃんと応えられた。

使い方は単純作業である、教えれば実行できるし、分かるのである。作業は、実際にしなければ、覚えない、身に付かない。ログ１はゼロ、対数の底が $a$ なら $a$ の対数は１、さらに、$a$ $b$ のログは、ログ $a$，プラス、ログ $b$、、、と原理を知っていても、表を使うには頭脳の別のところを働かさねばならない。

そういう頭脳労働を教室で課すことを、もったいないことに、数学教科は自分たちの領域の外に捨ててしまったのではないか。

そういう思いとは別に、ほぼ半数の誤答から教唆されることは、一歩一歩、きちんと書くように、数学では、いわば「作文指導」をされることがなく過ぎたのではないかということである。対数記号以前、たとえば、等号の使い方がいいかげんだったり。

「作文指導」ということで言えば、等号の意味指導など算数でしなくていい。

大事なのは、等号の式になる前の算数計算。「に、さんが６」と、「６は、２掛ける３の答に等しい」は違う文章で、「２×３＝６」としたら、その読みの差が消えてしまう。

いささか脱線気味のようで恐縮であるが、カリキュラム論として、ずっと気に掛けてきたなことで、少数点の意味、よさを教えるなどという授業も、私は好きになれない。

図らずも、対数表の使い方を教えるということを大学生にやって、少数点というのも、学校数学が普及させ、普及させるべくあるものだと思った。逆に言えば、少数点の小さい点を過度に重要視するのは、はなはだ人工的で窮屈なところがある。１０センチは１０センチで、わざわざ０．１メートルと言い換えることはない。

対数表は、１～１００、さらには、１～１０００となるべく多くの整数についての表にするほど、使用の上で精度が上がる。１３．９÷２．８６の答は、１３９÷２８６の答から分かる。算数の筆算はそれを教えているわけであるが、対数表を使う問題は、教科書の表、１．００から９．９９まで、０．０１刻みの表に合わせた、小数の計算問題になりがちである。問題を作るとき、私も教科書の巻末にある、いわば教育用の表に捕らわれて、１３９÷２８．６でも、１．３９÷０．２８６でも同じ答であるということに考えが及んでいない。

講義で、対数表の使い方についての話は、半時間ぐらいの積もりが、演習問題の解答を見ていると、さらに、表の読み方として、比例配分（一次式による補間）についても話したい気持ちになった。計算で、対数になる真数が表にないときは、と考えることは、対をなす対数を強調し、表に出ていない数量関係に着目させる働きもするようで面白い。誤答者に、誤りを単に公式の記憶違いと言わないで算数計算の話で悟らせることになるのも気持ちがいい。

また、算数でいう見積もりの感覚はこういう題材でよく教えられるのではないか、と改めて思った。算数では、まず、正しく計算できることが肝心で、概算・概数とか、おおよその数を見積もるという勉強に、計算力を高める働きはなし、計算の大間違いを防ぐ働き

も、私には見つけられなかったからである。

今年度の「解析学」では、常用対数表の使い方も教材に取り上げてから（考えてみると、長い教員生活で、初めてのことである）、対数表の作り方を課題にした講義に向かった。論稿その２に教案の粗筋を記した、和算家の計算・作表法である。

§５．計算数学

度数法に対して、弧度法のラジアンで測れば、扇形の弧長や面積公式は簡単になる、微分積分ではこの弧度法を用いる、と講釈する。これは屁理屈で、もっぱら、微分積分という上の数学へ向かう都合のものではないか、そうでないような教材はあるか、と考えてみて私の思い付いたのは、紙の筒を両断して展開すると、「サイン・カーブ」になる、というのであるが、これとて、ラジアンに向かう材にはなるが、弧度法が必須というわけではない。

サイン・コサインの記号をちゃんと読み書きできないところへ、ラジアンも出てくると、とんでもない“計算”をする大学１年生を目の当たりにする。「ラジアンも理解できない大学生」と嘆いただけでは先に進まない。別の単位だとラジアンを説明して、角度をラジアン単位の数に変換する式を書いて済ませられるという状況にないと認識して、三角比の計算法で講義してみたら、弧度法の使いどころがクローズアップすることに気付き、１月の発表資料で述べた。そこでは、ラジアンの使いどころがよく見えないような現今の教育課程を、物語性の欠落した数学と評した。

１°とか１．５°とか、小さい角度のサインを計算するのに、べき級数式を用いる段になって、級数式で計算するには、まず、角度をラジアン単位に変換しなければならない。それには、円周率の値が使われる。サインのべき級数式による計算には、$\pi$の詳しい値が別途、計算されていることが前提されている。

１月の発表を聴いて、次のような感想を述べた教授がいた。学生のイメージでは、$\pi$がついた角度が、ラジアンのようだ。

なるほど、$\pi$と書いたら円周率の値を使う計算はなし、計算することのない弧度法だから、$\pi$という記号がついていたらラジアンだというのは当たっている。そういうイメージで学んでは差し支えるような話が、高校から大学の数学で語られていないのである。

ともあれ、計算という作業をすれば、ラジアンの$\pi$は単なる記号ではなく、たとえば、電卓のキーを押すと出る数値として使われる。

この節では、「解析学演習」で、この計算をやらせたときに体験したことを記すことにする。「〇〇もできない大学生」の話ではあるが、できない原因を、彼女の受けた授業や、数学の教育課程にも求められるという姿勢でこの事例を考えている。私が丁寧に相手したのは、できない学生が、新入生に少なからずいることを見知っていたからでもある。

「１．５°をラジアンにするにはどうすればいいのか。」と分からなくて隣席の仲間に訊

ねているのがいた。訊ねられた彼は、度のｘにπを掛けて１８０で割る式を書いた。分数式である。書かれて分かるなら、知識になっているはずである。

それを見て、私が試みたのは、まず「１８０度は何ラジアンか？」と質問し、次に、「９０度は？」と問い、次に、「３０度は？」。この３０度には、ぱっと答が出て来なかったので、$180:90=\pi:\frac{1}{2}\pi$、$180:30=\pi:\frac{1}{6}\pi$、と書いて、その比は、それぞれ、２：１と６：１に等しいねと言って、それを書き加えた。そして、ｘ度なら、何ラジアンになるか？」と訊ねたら、「もう分かりました。」と返事をされた。

こうすれば分かるのに、そうは教えられていないのだと思う。計算の分数式は教科書にあったはずだ。でも、あの式で計算練習などしない。式は忘れても、比例関係だと覚えていれば、１８０°がπと思い出して、式は出せる。比例関係などと言ったら中学の数学になるが、これは、数学でなく算数だ。算数で比例式をよく使い込んでいれば、ラジアンのことも比例式にして示せば、いわゆる比例関係から、変換式は作れたのだ。

上の比例式は、角度とラジアンの対応表、表の部分のようなものになっていると思う。比例関係を記す文章の中の、数値のみを揃えて書いて、そのままで、比例式の数の並びになる。分数計算式より、ずっと使い勝手がいい。使い重ね、使い込んで、作業能力は上がって行く。

算数教育で、比例式処理のある側面を批判し、１当たり量の考え方を「数と計算」の骨格に据えたのは、大失敗だったと思う。３０センチが１尺なら、１８０センチは６尺、この数値の並び替えで、３０：１８０＝１：６という式がすぐ作られる。式を書く手続きは単純であり、書くだけなら、１当たり量のような概念は無用である。1°当たりのラジアンに思い至らない、単位変換の仕方が分からない学生でも、式は理解できたのである。

比例式にされる対応には、数値様態の違いに限ってみても、いろいろある。比例式は、それぞれに意味が込められ、いろいろに処理される。形式、書式として大切にし、テキストの章、単元、学年を超えて使う道具に考えたいと思う。

## §６．教育課程論を超えて

論稿[１]の副題を、関数表を数表と変え、「数表の使い方、作り方を教えなくなった学校数学」として、この論説の題目にしている。この主題については一応論じたつもりである。副題の「作業主義の勧め」についても、前の発表資料を引き継いで述べたことになると思う。しかし、もう一つの副題の「カリキュラム分析の視点として」の論述内容はなかったかもしれない。

ここでは、正統の論文スタイルにとらわれず、長年、数学科教育にたずさわりながら、普段に考えていたことを、この論稿のむすびとして述べることにする。それは、数学教科のカリキュラム論を超えて、数学教科の存亡にかかわる心配事である。なお、指導課程に

関することは、最後の、**おわりに**で、カリキュラム分析の視点になるような事項にして述べる。

さて、今回は、数表をつかうことを作業として勧めた。前節では、表の延長上に比例式まで考え、比例式の早くからの使用を勧めた。

比例式と平方・平方根表は別ものである。同じ表といっても、平方根表と九九の表を教材論では一緒に取り上げるわけには行かない。九九は小学校２学年のこと、平方根は中学３学年のことと指導時期にも相当の隔たりがある。平方・平方根表と対数表も、別個の教育内容の材である。

だが、数学教科内容における、これら数表の使用や数表的表現の衰退は、１月発表資料で述べたように、「手を動かしてまねさせ、学ばせたい内容は、数学教科書に探せなくなった」、「高校の内容に、単純な繰り返しの計算や、からだを動かして覚え身に付くような知識が少ない、概念的な解説が多い」ことに至らしめていると考えられる。

数表を広い意味で考えれば、数学教科を超えて、作られ、作り直され、使われている。統計資料で、実験記録に、それぞれが、いろいろと処理されて別の数表になる。理工系と限らず、実務に、生活で。そういう「表」の世界で、生きて働く力は、算数・数学が育てている、培ってくれると、世に出た大衆は、感じなくなっていることであろう。

人口問題、社会の変動、生活スタイルの変化などとは別に、三角比の表や、対数表とは無縁な内容へと変化した、数学教科の「数学」化が、教科への期待を弱体化させた。教養主義も通用しない時代になって、これからもしばらくはそう進むと思う。

渦中にあって、私は予想もしなかったが、数学が進学受験の基礎科目、センター試験の主要得点科目として認知され、現に、そうであったことも、皮肉なことに、この教科への期待を薄める原因になった。

数学教科の数学化と表する観察内容については、別に、論文を準備中である。そこでは、大学の微分積分学テキストの内容分析から、高校教科書の微分積分の姿を描いている。「数学化」という語は使っていないし、数表のことにも言及していないが、数学の歴史でいう、算術化、集合化の後の、作業的なもののない理論形式、理論枠の下で、教科書が執筆されていると観ている。

それとは別であるが、比例式を隅に追いやることになった数学教育論についても、批判されなければならない。それがどういう算数教育になっているか、佐藤愛子が、「呆れ返った。」という内容で記す［５］。

孫娘は「小学校６年になって、急に算数ができないことが目立ち始めた」ようで、母親である娘が心配になって、愛子の部屋に問題を持って来たのだという。

一つ、「Ａ子さんの体重は２０ｋｇで、お父さんの体重の３分の１です。お父さんの体重は何ｋｇですか」（途中略）娘、「$20 \div \frac{1}{3} = 60$　それが正しい式なのよ」「なに割る？・・・」そこで娘といい争いになる。

二つ、「消費税５％は小数を用いると０．０５です。そこで１００円の物を買うといくらお金を払うことになりますか」（途中略）　「これはね、　１００×（１+０．０５）＝１０５　こうなのよ」私は呆れ返った。「この１+０．０５の１は、いったいどこから出て来たんだ！なんでそんなムリなことをする・・・・」「怒らないでよ、つまり、１００を１と見なすのね」（以下略）

話は面白く脚色してあるだろうが、愛子の言い分は、私にはいちいちごもっともで、算数教育をけなしているわけではないけれども、表題の「低能の憤り」が、私には、算数教科について「常識の憤り」にも、「親たち（の親）の憤り」にも読める。もう、親たちも、演算記号を演算の意味から教えられた世代になるかもしれないが、先生に軽く扱われて覚えていないということもある。なにより、月日が経てば忘れるような知識である。算数なのに、親には話の筋が分からなくて、親が教えられない内容になってしまっているのである。

ちなみに、孫に確かめたら、どちらの式も分かっていたそうだ。が、そのことさえ、「算数が低能であることに引け目を持たず、堂々と低能のまま生きてきた」佐藤愛子が、言外に、算数教科を皮肉っているように読める。

分数の掛け算を計算規約といって記号形式だけで教えるのはうまくない。けれども、記号の「意味」に重心を移した教育内容にしてもまずい。立式が難しいからと、局所的にその教育法をがんばることになる。そして、教えようとしているものが、記号の「意味」ではなく、正しく使えることであることを忘れがちである。

線分図、数直線というのも、教師が何ごとかを教える手段にはなるが、覚えるようにと教えるものではない。

比例式は、教えるものと言って、不都合はない。

計算式の書き方、読み方は、学校を卒業しても忘れないし、忘れないから、お互いのコミュニケーションの道具にできる。

問題文から、比例式に書く分には、分数の項があっても差し支えはない。処理するには、分数で正しく割る計算はできなければいけない。さて、分数で割る式になる文例を覚えていて使うようなことが、上級の学校であるだろうか、ないと思う。あれば、割る分数になることを、そこでまた学べばよい。

佐藤愛子が自分の解き方として記している常識の解決法を、私はかつて、小数（分数）の掛け算、割り算の仕方を納得させる根拠にして教えることを提言した。しかし、教科教育法を担当する仕事から開放された今は、算数のことは算数のことで、教育法では考えなくなった。常識の解法が知識としてよく使われるものであるなら、その自然な解法が一番大事な知識である。上級の学校数学を学ぶにもよく働く知識なはずである。日常事象を離れる数学の学習でも教材を理解し、処理する能力の基となる。

老いて、体力知力が衰えた私は、自分が面倒に思う計算や問題解決法は、孫の年代の児にも難しく、ついでに瑣末な知識ではないかと考えてみる。私の場合だけれど、計算力は、

夜と昼とではずいぶん違う。そこで、まだらにボケた場合でも出来るのはどんな計算だろうと想像する。ボケて忘れても、学習して思い出せる解決法はどういうものだろうかと考える。

教科を超えることとして、最後に、常用対数のことを記す。

２０年近くむかしのことになるが、同じ職場の天文の教官から、「常用対数は、いま、高校で教えていないのか」と訊ねられた。私は、対数は教えているけど、常用対数について、われわれが習ったように詳しくは教えていないから、物理や天文の講義で対数と言うときは、用いる対象のことについて、使い方を一通り説明しないと分からないでしょう、と答えた。天文の教官は、４年の卒業研究で対数方眼紙を使うところで、学生が対数を知らないようで迷ったのだったかもしれない。このことは、その後、違う場面で何度も思い出された。今なら、「一般の対数函数について教えているけど、常用対数の使い方については教えなくなった。学生には、常用対数は底が１０の対数である、という知識だけはあると思う」と答えたであろう。

用途に合わせて、原理を一通り説明すれば、分かって使えるというものではない。先の節に記したように、対数の性質を、式になった公式で習っていても、対数表を使う計算が出来るというものではない。

**おわりに**として、１０の平方根の平方根、その常用対数が０．２５であることを忘れている、一人の学生の計算について記すが、彼女に、高校の指数・対数と習う公式群のどれをどういう順に思い出させて、４分の１であることに気付かせたらいいのか、どう言えば確実な知識になるのか、分からないと思う。教科書の記述順に従ってはだめである。単に「定義だ」「定義の積み重ねだ」と説明されているようなものだからである。

対数表も対数方眼紙も、研究の仕事に使っている高齢者がまだいるか、もういないか知らない。大学には、多分実験か観測データをドットさせるのに、使わせている方がいるようである。大学の数学教材に取り上げている人はいる。

地球物理の教授に聞いたら、グラフ用紙など使って研究し、そういうのを業績に、大学の教官になるような人は、若い人では、教育学部にも、もういないということであった。

常用対数表の使い方、比例配分の考えなど指導要領が省いてから、しばらくは、常用対数を数学で教えてほしいと思っていた教官は、理系の学部に限らずいたのではないかと思う。数学で教えなくなったからと、開平法を解説している高校の物理教科書を見たことがある。

さて、数学を担当した者が意図したことではなかったが、内容が現代数学風に理論的であることを骨格にしたとき、数学カリキュラムは、教科の外から期待されていたものを捨て、閉じて行ったのではないだろうか。

## おわりに

遠山　啓の著書には、学生時代から啓発された。私が大学を卒業した昭和３５年には、遠山著で２冊目の岩波新書が出た。教育についてのシリーズの一冊で、遠山が数学教育の部分を分担しているのも読んだ［６］。今も覚えていることでは、比例式を立て、式の内項の積は外項の積に等しいからと計算させるのを批判していた。なぜ、内項の積と外項の積が等しいかは説明していない、小学生には難しい、わけもわからず形式的に処理を行わせることになると書いていた。だから、「帰一法」の方がいいと述べている。私は、なるほどと読んだ。帰一法を徹底させて作られたのが、１当たり、あるいは、単位量当たりの考え、その他であろう。考え方が間違っているとか正しくないとか言う気持ちは今もないが、「１当たり」と、生徒の口からも言われているのをみて、この言葉を教室で口にするのはまずい、さらには、この考え方で教えるのもよくないと確信するようになった。そういう言葉で、考え方を教えるように向かってしまう。

内項の積・外項の積については、大学院に来た中学教師に教えられた。彼は、教師になりたての頃それを口にして、生徒が習っていないこと、指導要領が変わったことを知ったそうだ。間もなく、私は、中学教科書の編集会議に出る機会が訪れ、「内項の積・外項の積についてはこの辺に書き入れて置くのがいい」という話に、算数要領の変更の、影響の大きさを思った。

図形については、線分について、$1 : x = x : 2$となる関係は、すぐ作れる。$x$は$\sqrt{2}$である。無理数といえば、三平方の定理を持ち出して言う人が多いのは、比例式を使わなくなったせいかもしれない。

大学院集中講義のとき、受講生に算数問題の調査テストを試したら、十人ぐらいのなかに、全問を比例式を立てて内項・外項で解いたのがたった一人、となると、塾ででも身に付けた身勝手な解答にみえた。そうすれば、すらすら解ける文章問題だったのであるが。

ついでに書けば、こういう、カリキュラムの変更がもたらしたことだと分からずに、算数教育方法の批判に走っている教育心理の分野からの論述が散見された。調査問題が、自分の習った考え方、あるいは、自分が形成した数学知識から構想されていて、間違えた、あるいは中途半端な解答を、いまの教え方を色濃く反映したものだ、と読めないのである。

以上のことは、私は、教科教育をまだ担当していなかった頃のことである。「解析学」の担当だった。だが、現場の教師が大学院に来たし、何よりも、講座の大学院生の研究発表は毎年聞いて、数学教育の方々、担当の人たちにいろいろと教えられた、その１０年間に耳から聞いたことで学んだことは多い。勿論、修士研究のことを気にかけ、数学教育の学会にも出席した。

数学教科教育の担当になったのは、それに続く、国立大学停年までの１０年間である。

算数教材研究という担当科目もあって、同種の量、異種の量の割合などという話もしました。指導書を買わせて、添加、合併、増加なんてことも言いました。

「計算式が、○×小数（ある数掛ける小数）になるような文章問題を作れ」なんて小テ

ストをして、批評したこともありました。みな、この論稿で、重心をそこにおいて児童に教えてはいけないと論じた、そこのことです。

パーセントについてのある算数の問題で、正しく解けない学生もいれば、その計算を間違えるのもいると知ったのは、この科目を担当して、５年も過ぎてからでした。

その頃、理学部の教育法の講義で、「分数の足し算を（列ベクトル・行列の足し算のように）分母は分母、分子は分子で足したのを答えにした子がいたら、それではいけないことを、どう説明するか」出席カードの裏に書かせたこともがありました。予想と違って、素直に考えた、素朴な説明がかなりあったのを思い出します。

昨年、算数教材について講ずるという、なやましい仕事からやっと解放されたことになる。

縁が切れたから、自分にはそうする能力はないけど、使い方を通して意味を知らしめよ、使い込んでこそ正しく使えるようになる、と気楽に言える。

工学部学生へ講義するのは、ほぼ２０年ぶりだったことになる。学生の数学理解の実態についての見方は、彼らの算数理解イメージについて形成した（老成した、あるいは老化した、かもしれない）私の考えも伴って、２０年前とずいぶん変わったと思う。

数学IIの微分も勉強してない入学者もいる１年生用の「大学への数学」では、最初に、テキストにあるベクトルや行列の章は最後にする、１章に１時間と決めてかかるつもりはないから、多分、やらないことになる、と宣言して、実際にそうなった。使い方を通して学ぼうにも、これらを使って解決法を学ぶような問題は、高校の教材にはない。大学の数学の、理学部の物理でも、高校ベクトルの本家の、線形代数を使うようなことはないと考える。オイラーやラグランジュが考えなかった数学概念であり、大学院レベルの現代物理のことばになると思う。

結果論ではあるが、線形代数と微分積分は数学の基礎基本、その準備勉強になるようなそれぞれの初歩はわが国の高校生にも教えられると考えたのは、乱暴に経済の語で例えれば、科学技術バブル期の上昇機運に乗っていたのだ。

たかだか１００年にもならない日本の数学教育の変化ながら、日本的な、数学の自己増殖、自己肥大が、対数表や比例配分の方法をわが国の数学科教材の外に追い出したと読み解くことができるように私は思っている。

**おわりに**の最後になってしまったが、前の§６に記した、３番目の観察事例について記す［７］。対数表の使い方ではなく、作り方の演習時間のことである。しかし、使い方あるいは作り方の教え方にかかわる知識についてということではない。指数知識のあやうさについてということかもしれない。

演習の時間の前半に、高校教科書の巻末にある対数表、その「対数表を使用する問題を２つ作れ」というのを、Ｂ５用紙を配布して書かせてから、和算家の「対数表の作り方」（１月の発表資料に記してある）を次の演習課題にしたときのことである。$\sqrt{10}$、そのルート、$\sqrt{\sqrt{10}}$、そのまた平方、、、を基に、対数が、０．１，０．０１，０．０１、、、に

なる真数を計算せよ、というのが、第１の問題である。

机間巡視中に「これでいいですか」と尋ねる女子学生のノートを見たら、妙な数値を表にしている。間もなく分かったことに、彼女は、√１０、√√１０、、、を電卓のルート・キーを押して出して、その数値の対数を「対数表」から読み取り、有効数字４桁の数を書き並べていたのである。それで、√１０の対数が、２分の１でなく、０．４９９７となっている。３．１６の対数である。√√１０の対数は、０．２４８０と書いている、１．７７の対数である。１．７８の対数だと、０．２５０４と載っている。

若い頃はこんなノートを見たら、「いったい何を書いているのだ。√１０の対数が０．５と説明したのも忘れたか」と言ったことであろうが、(自分で言うのはおかしいけど) ろう長けてか、いまは言わない。

ちなみに、１０の平方根の平方根は、電卓のルート・キーを押して、１．７７８２７９４１と出る。この数値に対応するのは、０．２５００で、４分の１となる。

持続力も計算力も衰えて、そこまで、丁寧には相手しなかったが、後で反芻して、比例配分のことを次回に補足しておきたいと思った。§４で、対数表の使い方を教材にしたときも比例配分について話しておきたい気持ちになったと記したが、演習で上のようなことに出会って、次の講義のとき、実際、ちょっとの時間しかかけなかったが、具体例で比例配分の計算法について話した。

これを、一次式で補間すると説明すると、２点を通る一次関数の式を作って、、、と計算するのが、多分、大勢いる。

ともあれ、上記のような作業で、彼女は、√２の対数が０．５０００になるように作ってあるということを自覚したであろう。常用対数は底が１０で、ルートというのは２分の１乗で、その対数は、、、と、定義や公式を連ねては、よく学ばれることなのだ。

掛け算が、足し算になるように作ってあるから、√１０と√√１０の積の対数は、０．５０００＋０．２５００となる。

これが、指数法則から導かれる、というのは、あまりにも迂遠である。高校の対数函数の構成に忠実では、対数表の作り方について、作業手順を語るように話すことができない。大学生に演習として課してみて、常用対数表の使い方を教えることから逆に、分数指数、指数法則に馴染んで行く道があると思った。負の指数にも、使い方を考えるうちに、整数の大きさの、位の拡張として思い至る。

註

［１］ 板垣芳雄：新作業主義の勧め 一函数表を使うこと、作ることをしなくなった学校数学一 、東北数学教育学会年報 第３５号 (２００４)、４５～５８．

［２］ 石田一三：あなたは計算練習で“間違う練習”をさせているのでは？、日数教学会誌・算数教育、第７７巻第１０号 (１９９５)、１７１～１７６．

［３］細呂木見良：落ちこぼれをなくし創造性を育てる算数教育の理論と実践の方法、第２５回数学教育論文発表会論文集（平成４年）、２７９～２８４.

［４］イメージとしてであれ、作業の裏付けのない「関数」を、最初に説明している大学テキストが、普通になったと思う。次のように。「実数の集合 Ｘ の元ｘに実数ｙを１つずつ対応させる規則ｆを Ｘ を変域とする関数といい、このｙをｆ（ｘ）で表す。」この説明に並べて、「関数」の概念・模式図が描いてあることもあり、これでは、関数

ｓｉｎ（ｘ）のｘに３０°を代入する、というのをどう受け止めたらいいのやら。また、「３０°のときのサインの値は、」と言ったりするでしょうが、「計算数学」では、言葉使いがまた、違ってくるとことになるでしょう。

それにしても、対応の規則とテイギ（定義）すれば、逆関数のテイギも本当に楽に、一気に宣言してできる。だが、「丁寧に教えたのに、サインの逆関数がさっぱり分かっていない」と嘆くことになる。

［５］佐藤愛子：それからどうなる？―低能の憤り―、オール読物、平成１５年７月号、７６－８０

［６］遠山　啓：岩波講座・現代教育学・第９巻、数学と教育、Ｖ章、２節、５比例、１９６０

［７］事例と記して、３人の学生に登場してもらった。３人とも女子であったことに我ながら驚いている。§２の学生をＡ、§５の学生をＢ、おわりにで登場の学生をＣと呼ぶことにする。彼女らの、前期期末試験の成績を見ると、ＡＢＣＤ評価で、順に、Ａ，Ｃ，Ｄであった。学生ＣはＤで不合格の成績であるが、Ｄでもっと下の成績の学生もいる。演習の期末試験の成績は、３人ともＣであった。ひどいというのではないが、もちろん、優秀ではなく、中ぐらいの成績ということである。

## Calculation Practices using Functional Tables deeply help Students to Understand Learning-Matters and to Build Their Knowledge (1)

—The arguments about school teaching mathematics curriculums —

ITAGAKI　Yoshio (Miyagi University of Education)

By calculation using functional tables, they do various practices, which cultivate mathematical thought. We present in this article, how to make use of in classes multiplication tables, tables of squares and square roots in the text books, and the logarithmic tables.　We observe some students cannot carry out linear interpolation. We propose to teach "rules of three" in primary school, which is needed when solve the problems of finding the forth term in a simple proportion.