東北数学教育学会年報
2006.3.31　第37号

「教員の指導力不足」という新聞記事を読んで

—算数・数学の教師をめざす学生の数学に関する基礎知識について—

武元　英夫
宮城教育大学数学教育講座

概要　昨今の教育をめぐる話題に算数・数学の学力低下の問題がある。また，教師の指導力不足が強く言われてもいる。ここでは，これから算数を教えることになる小学校の教師や中学校，高校の数学の教師を目指す学生の現状を，数学の内容に関する基礎知識の学生による意味理解について話題とし，いくつかの項目を挙げて説明していき，教師を目指す学生の教師への素養に向上をもたらす方策についても議論をしていきたい。

キーワード：教員の指導力，基礎知識，無限小数，分数，π，九去法

序文　文部科学省が2005年8月9日に「指導力不足」として認定された公立の小中高校教員は2004年度においては566人となったと発表した。次の日の8月9日の河北新報の記事によると，そのうちの190人が教員を辞めたり，職員に転任したとなっている。また，8月11日付の読売新聞の社説では，見出しが[指導力不足教員]「『優れた先生』の輩出に工夫を」である記事が載った。そこでの要旨は次のようであった。

「教える内容に誤りが多い，教科の知識や技術が足りない，子どもから質問を受けず対話もない，など，その資質・能力に大きな疑問符がついた教員たちだ。

学校教育の成否は，子どもとじかに接する教員の力量に負うところが大きい。一度きりの学校生活で，指導力不足の教員と向き合うことは，子どもにとっても不幸なことだ。

新人教員の能力の，早期見極めも進む方向にある。昨年度は，新規採用19,500人のうち191人が，1年間の試用期間を経て，正式採用に至らなかった。国，教育委員会が尽力すべきは優れた教員の輩出である。養成・採用・研修・人事などの面で一層の工夫を施してもらいたい。

いつの時代も，子どもや保護者に慕われ尊敬されるのは，「教え上手」で「人間味あふれる」先生たちである。」

という事柄が主に書かれている内容であった。

私も，学校現場での授業に立会い，児童・生徒からの答え，質問に正しく意味を捉えず（捉えられず）授業を進めていく場面に居合わせる機会が何回かあった。ある場面では，教師が

自分の意図としている答えが児童・生徒からかえって来なかったこととともに，児童・生徒の答えへの発想の意味理解をできなかったことであった。もう一つの場面では，教師がその時間で教える内容を完全な理解をしていなかったことであった。教師が教室で児童・生徒を前にしての教え方は重要なことであるが，しかし，数学の知識が十分でなければ児童・生徒におもしろく・楽しく学ばせることができるであろうか。

教師に望まれる姿：

（1）児童・生徒や保護者に慕われ尊敬される「豊かな人間性」をもっている
（2）児童・生徒に学ぶことから「わかる，うれしい」という感動を与えられる程度の内容理解ができるための「数学の知識」を持ち合わせている
（3）「教えることが上手」である

（1），（2）が満たされていなければ教えることができないであろう。そして，子ども達が楽しく，わかるように学ぶために（3）が必要になり，教師の重要な素養であろうと考える。（1）は人間性にかかわり，生れてからの環境，家庭での生活等による影響が大である。その考えから，（2）について，教師を目指す，大学で学んでいる学生諸君に数学の基礎的な事柄の意味理解をきっちりとやって欲しいと考えるのである。

基本的な性質の意味理解　これから述べる幾つかの問題は小学校における算数に関わるものである。それらの理解がなければ中学校における数学の内容の理解はできないと考えるのであるが，しかし，中学校1年における教科書の第1章「文字と式」での内容だけを調べても多くの数学の基礎的な性質の理解が必要とされる。中学校の1年生を教えるにしても教師を目指す学生は教師の素養のために多くの事柄を学んでおかなければならない。教え方を学ぶことは，教師である先輩や大学での教科教育の教員に学ぶものではない。学んだものをそのまま鵜呑みにして教室で教えることではない。教師自身が自分で学んだ基礎的な数学の素養を生かして教材の開発，授業実践を構成していくのである。それらのためにも，教師を目指す学生には，中学校1年の第1章「文字と式」の内容と関係した次に記述される事柄をしっかりと身につけていって欲しいのである。なお，この論文は12月に開催された東北数学教育学会平成17年度年会の場で発表した内容を含んだ形でまとめたものである。

（1）符号のついた数の和，差　⇒　ベクトルの考え，ベクトルによる演算
（2）数の大小，絶対値　⇒　距離，順序
（3）数の順序　⇒　数の大小と正の数との関係
（4）数の乗法，除法　⇒　ベクトルのスカラー倍，交換法則，結合法則，分配法則，単位元，逆数（加法に関して，乗法に関して）
（5）交換法則と結合法則が持つ意義
（6）有理数に関わって　⇒　分数，小数，有限小数，循環小数，無限小数，群，環，体

（7）無限小数 ⇒ 数列，級数

（8）円周率 ⇒ πの定義，πの値

（9）πの定義 ⇒ 円に内接する，外接する正ｎ角形，三角形の面積，相似の関係にある二つの図形の面積

（10）円に内接する，外接する正ｎ角形の面積 ⇒ 数列の極限，区分求積法

筆者が担当した数学の免許に関わる中学校・高校の数学の教師を目指す学生が聴講する2年生が対象の「数学科教育法」での講義の際に，また，試験の問題として学生諸君の基礎知識の理解を知るために試みた課題のいくつかを挙げておく。先に記述した項目でも中学校の教師には微分積分学の内容の事柄が基礎知識として必要になる場合がある（[4], [5]）。ここでは，小学校の算数における内容に近い事柄を考えた課題であるが，これらは大学において数学の専門科目の講義内容として話される事柄ではないが，教師の素養を向上させるために必要であると考えられる([6])。

それには課題として与えた問題の趣旨と各専攻の2年生である学生の正答率（%）を記しておく。正答とした基準は，完全な正しい解答ではなく，基本的な正しい解答への考えが与えられたと判断した答えを正答とした。少し甘い基準かもしれないが，基本的な考えを大事にしたいという気持ちからの判断である。ここで，学校教育教員養成課程数学教育専攻の学生を数教，学校教育教員養成課程での数学教育専攻以外の学生と障害児教育教員養成課程の学生を学教，また多くの学生が中学校，高校の数学の教員を目指しているゼロ免課程である生涯教育総合課程情報数理専攻の学生を情数と略記していく。解答の割合でのカッコ内の数は誤答した学生の数である。講義中での課題を受けた数と試験を受けた数が異なっている場合がある。三つのクラスに分けて正答率を挙げたがここでは三つのクラスの間に有意の差があるかどうかという統計処理をあえて今回はしないことにした（たとえば，[2]を参照）。

問題１．（みんなで分ける）．次の式の□の中に数字を入れて，式を完成してください。解答にいたった理由も書くこと

3÷5 ＝ 1／□ ＋ 1／□

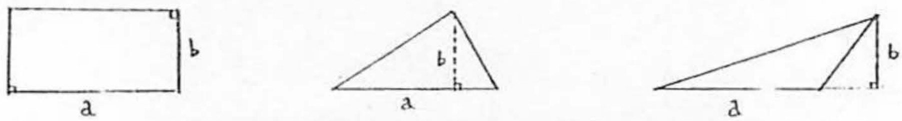
説明：幼児や小学校低学年の児童はものを分けるとき同じ質量のものでも同じとは考えない場合が多いであろう。すべての幼児たちに同じ大きさに（形もすべて同じに）分けるにはどうしたらよいかという意味を持つ問題である。課題を与える前に簡単に図をも書いて説明を与えた。

解答の割合：	数教：正答　12(5)	（正答率：70.6%）
	学教：正答　5 (3)	（正答率：62.5%）
	情数：正答　14 (12)	（正答率：53.8%）

感想：数学教育専攻の学生は問題の説明とはことなり，3÷5 ＝0.6＝0.1＋0.5 ということを考えて解答していた。他の専攻の学生でこの考えをする者が少なく，ヒントで分けること

を図で書いて考えるという方法を話したが，それを使おうとしていた者もいたが解答までには至っていなかった。

問題2． 下の図のような四角形の面積が ab であることを考えて，その右側に描かれたような三角形の面積が（底辺）×（高さ）の半分であることについて理由，式をつけて示せ（最後の試験でもこの問題を出した）



説明：小学校の 4 年生で学ぶ長方形の面積，5 年生で学ぶ三角形の面積について，大学に来た学生は如何に理解しているのか。単に公式として記憶し利用しているだけでないかと考えて課題とした。

解答の割合： 数教：正答 12(5) （正答率：70.6%）
学教：正答 5 (3) （正答率：62.5%）
情数：正答 24 (2) （正答率：92.3%）

試験での解答の割合：数教：正答 16(3)（正答率：84.2%）
学教：正答 6 (2) （正答率：75.0%）
情数：正答 25 (2))（正答率：92.6%）

感想：数学専攻の学生での最初の正答率が低いのには驚いた。筆者は数学専攻の学生には90%以上の正答率を期待したのである。幸いにも試験の際には，それに近くなりちょっとは安心をした。数学以外の教員養成課程の学生の正答率の低いのにはさらに驚かされた。小学校の先生にもなろうとしている者が多い中，このようの基本知識では大学在学中にまだまだ勉学をつんで基本知識を身に付けていって欲しいものである。さらに驚かされた状況は，講義中の課題の提出の際に，学校教育教員養成課程のある専攻の 2, 3 人が私のところにきて，「できなかったのですが，面積の問題を与えられればきっちりとできます」といっていた。意味もわからないで，公式にあてはめるだけの計算ができても教師としては如何なものかについてわかっていない状況を見てガックリときてしまった。やはり，公式を使う問題しか解けないのではなく，少しは考えて解けるように定義，基本知識を身につけて欲しいと思う。

問題3． 1÷9＝0. 111･･･はどのように定義されるか

説明：学生が無限小数の意味を知っているのか，言い換えると学生が無限小数の定義を知っているのかということについて微分積分学を教えている際に不安となって何かと気になった。学生は級数が苦手なのである。積分においては，積分の公式を使って答えが簡単にでる計算はできるが，区分求積法の定義にしたがって積分をすることになると計算ができなかったり，二回の置換積分を使う積分になると多くの学生はそこで計算をあきらめてしまい，まったく計算をしなくって積分は求められないのである。というような考えから良く見かける無限小数の定義を問う課題として考えたのである。

解答の割合： 数教：正答 15(4) (正答率：78.9%)
学教：正答 5 (3) (正答率：62.5%)
情数：正答 19 (8) (正答率：70.4%)

感想：ここでの正答率は少し（大分？）甘くつけすぎたかと思っている。有限小数から数列の極限，または，小数点以下第n項までを10進法で表わし，それらを和として考えた有限級数の極限，すなわち，級数の考えでの定義を与えて欲しいと期待して考えた課題であったが，そのような解答のうちで正答として考えられた答えは半分くらいであった。教師になろうとする学生には無限小数の定義をしっかりとつかんで欲しいと思う。

問題4．（とけて流れて）．氷がとけて水になると，その体積は12分の1だけ減ります。それでは，水が氷になると，その体積はどれだけ増えますか。

説明：学生に直感として，何も考えないで答えを出すとどうなるか，ということをやらせてみたいと思った課題である。次の課題もそのようなものであるが，案の定，誤答である学生，意味の理解が不十分な学生がいたのは残念であった。

解答の割合： 数教：正答 15(4) (正答率：78.9%)
学教：正答 5 (2) (正答率：71.4%)
情数：正答 18 (6) (正答率：75.0%)

感想：減った体積の12分の1と同じであるとの解答が誤答のほとんどであったのにはびっくりした。数学的に何も考えないのであろうか。数学の意味をもう少し基本からつかんで欲しい人がいたのは残念であった。

問題5．A地点からB地点の距離は90Kmである。自動車で行きは時速60Kmで帰りは時速40Kmで往復した。説明と式を書いて往復の平均時速を求めよ。

説明：これは講義の際に話の途中に予定していなかった話題であったが，突然思い出して数学教育専攻でない複数の学生に問うたところ解答ができなかったので，最後の試験の問題として与えたものである。速さの定義をきっちりと理解しているかどうかを問う問題である。

解答の割合： 数教：正答 18(1) (正答率：94.7%)
学教：正答 5 (3) (正答率：62.5%)
情数：正答 24 (3) (正答率：88.9%)

感想：これは多くの場面で話題にする問題である。案の定，間違った人がいたが，数学教育専攻の学生にはほとんど理解されていたのが少しではあるが慰めとなる。

問題6．（九去法）654321を9で割った余りは，割り算を実行すれば3となる。また，各桁の数を加え $6+5+4+3+2+1 = 21$ を9で割ってもやはり余りは3となる。これを例として考え，どんな自然数 $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ を9で割った時の余りと $a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1+a_0$ を9で割ったときの余りが等しくなることを示せ。

（最後の試験問題の一つとして；「654321に対して九去法について説明し，書いたことが数

学的に正しいことを説明せよ」を与えた)

説明：これは意味を知っていなければ正答が得られない問題ではあるが，10進法の話題の中で学生に10進法を考えて欲しいために与えた課題である。そして，ヒントとして654321の10進法による表示をし，それに9で割ったときに割り切れるのはどういうときかを考えよ。といったのである。

解答の割合：	数教：正答	8(11)	(正答率：42.1%)
	学教：正答	1 (6)	(正答率：14.3%)
	情数：正答	2 (22)	(正答率：8.3%)
試験での解答の割合：	数教：正答	10(9)	(正答率：52.6%)
	学教：正答	2 (6)	(正答率：25.0%)
	情数：正答	13 (14)	(正答率：48.1%)

感想：ヒントとして，数が9で割ったときに割り切れるのはどういうときかを考えよといったのであるが，多くの学生はこの段階では数の10進法表示にまだなれていなかったようである。数は数であって，その数の持つ意味を考える，10進法で表わしてみることもやらしてみないといけないだろうと考えるようになった。全体として，最初に与えた課題の後で，時間をおいて行った試験に出したときには正答率が増加したのが幸いである。

問題7．πの定義を記せ。また，πの値を小学校の教材として考えられる計算方法を一つ述べよ，

説明：πの値を求めることは紀元前の頃から多くの人達によって試みられてきた([1], [3])。円を用いてπの近似値を計算するにはどうしたらよいかという問いかけの課題である。これは小学校，中学校での教材の開発に今まででも行われてきたことであろうが，教師は過去の方法を単に鵜呑みにして行うのではなく，そこまでの過程を理解して教室で実践して欲しいと考える。この課題は簡単だと思っていたが，実際に，この課題については，昨年度と今年度における2年生が対象の数学科教育法の最初の授業で，また，今年度の1年生が対象の微分積分学の授業で学生に質問して驚かせられたことから考えさせられた課題である。πの定義は小学生が学ぶ内容であるが，大学に入ってきた数学の教師を目指す学生できっちりとそれを述べることができる学生が少ないのである。πの定義（円周÷直径）の理解のために，

“半径1の円に内接，外接する正n角形の辺の和の比，面積の比を求めて
n を限りなく大きくしたときに1に近づくことを示せ。”

という課題も与えた。そのために，それぞれを均等に分割したn個の合同な二等辺三角形を対象として考えることをヒントとした。二等辺三角形の頂点の角度，及び底辺の2つの角度を求めること。（底辺のn倍÷直径）の計算，（二等辺三角形の面積のn倍）等を計算させることも考えた。

πにかかわる内容について，高校から前にさかのぼって調べてみていくと，

“最初にπについて現われるのは小学校5年の教科書で「円周率＝円周÷直径，円周率

は 3.14159…であり，ふつうは 3.14 を使う」と書かれている。文字としての π は出てきていないが π の定義をちゃんと小学校５年で教えているのである。”

“その次に現われるのは，中学校１年であって，著し方は出版社によって異なっている。π という文字が「文字と式」の項で現われるのはどの出版社も同じであるが，記述の仕方，特に，円周率としての「円周の長さ÷直径」の記述をしていない出版社が見受けられる。ある出版社は「円周率＝円周÷直径」を π で表わし，$\pi=3.1415926535\cdots$ という値であると記述している出版社もある。

一方，ある出版社は円周率の「円周率＝円周÷直径」による定義を記述していなく，円周率は 3.1415926535…という値で，これを π と表わす，というように記述されている。“

“また，高校１年では $\sqrt{2}$ が無理数であるという説明に続いて，円周率 π は $\pi=3.14159\cdots$ であって無理数であることが知られている。として記述されている。しかし，「円周率＝円周の長さ÷直径」ということが記述されていない。π を使うのは，円周の長さ，円の面積を求めるだけであるのか。π が無理数であることも忘れ，“π は定数 3.14” であると記憶しているようであるが，大変だ！“

解答の割合：	数教：正答　18 (1)	(正答率：94.7%)
(π の定義のみに関しての割合)	学教：正答　8 (0)	(正答率：100%)
	情数：正答　24 (3)	(正答率：88.9%)

感想：説明にもあるようにこの課題は昨年度の数学科教育法での講義でびっくりさせられたことにより，また，今年度４月での１年生での微分積分学の講義でも驚かされた経験により，１０月からの数学科教育法の講義で最初から何回か学生に質問した内容であって，最後の試験に出した課題でもあるので正答率が高くなった。ちょっとは安心したが，しかし，講義で聞く前に，高校以前できっちりと身につけていて欲しかった基本的性質である。

問題８．（問題３にからんで）
$1\div9=0.111\cdots$ と書くが，この両辺を９倍することを考えて，0.999…はどうして１であるのか。

説明：授業で課題のようなことを小学生が教師に質問したら，小学校の教師はどのように答えるのだろうか。ということを小学校の教師を志す，また，中学校の数学の教師を目指す学生に質問した。８割くらいの学生はキョトンとして，変な質問をいているなという顔付きである。

分数と小数の関係，また，有理数と無理数との関係をも考えた有理数の基本的な性質を示すために，有理数の定義を聞くと，分数と答える（高校までの教育では間違った答えではない。分数とは分母，分子が整数であるものと定義されているから，そのように習ってきたからである。本当にこれで良いのであろうか）。有理数と有限小数，無限小数における循環小数

との完全な関係，また，有理数は循環小数としての無限小数で一意に表わされることの理解，これがなくては，どんなにπは無理数であるといっても，π，また$\sqrt{2}$が無理数であることを理解しているとは考えられない。それには数列，級数に関する収束等の基礎知識をしっかりと理解していなければならないと考える。

解答の割合：

数教：正答	9	(10)	(正答率：47.4%)
学教：正答	0	(8)	(正答率：0　%)
情数：正答	7	(22)	(正答率：24.1%)

感想：循環小数を簡単に記述することを用いた証明をする者もいたが，定義にしたがえといったことにより，考えていたとおり正答率が低かった。数列，等比数列を考えることすらやっていない。講義では等比数列として話を進めたのであったが。

ある授業実践の場で　以上の課題の内容は，時には中学校での内容を含むかもしれないが，ほとんど小学校で現われる内容である。そこでこの論文の冒頭で，学校現場において教師が児童・生徒の質問に正しく意味を捉えず（捉えられず）授業を進めていく場面に居合わせたことがあると述べたが，それの一場面は高校での研究発表会での場であって，教師がその時間で教える内容を，基本的に，完全な理解をしていなかったことであった。それは次のような内容であって，研究授業が終わった後での反省会の場で中学校の先生からおかしかったのではないかとの質問があっても，授業を実践した教師がその間違いを理解できなかった内容であるのでここに紹介しておきたい。その研究授業は高校１年生が対象であるが，学年末であって進度の関係により高校２年の教科書（数研出版の数学Ⅱ）の第１章「式と証明」における３節「恒等式」での授業であった。

授業の展開：この授業での展開は，等式を用いて恒等式の定義を与え，恒等式になっているかどうかを調べるのに，例題を用いて説明をして授業を進めていった。最後には結論として

[$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$がxについての恒等式である]

$\Leftrightarrow$

[$a=a'$かつ$b=b'$かつ$c=c'$が成り立つことである]

を示すことであるとして，授業を進めていき，いくつかの例を挙げ，生徒に恒等式かどうかを答えさせることを始めた。いくつかの問いにおいて，教師は次のことについて生徒を指名して答えさせることにした。

教師：「$(x+1)^2=x^2+x+1$は恒等式でしょうか？」

生徒：「恒等式ではありません」

教師：「どうしてでしょうか」

生徒：「展開式は$(x+1)^2=x^2+2x+1$であるから$(x+1)^2=x^2+x+1$は恒等式ではありません」

教師：「はい，そうですね。1年でやりましたように$(x+1)^2$を展開するとx^2+2x+1であるから，$(x+1)^2=x^2+x+1$は恒等式ではないです。○○さんの答えは正解です」

と言って，これで例題の答えは終わったのである。これから，関係式

［$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$がxについての恒等式である］
$\Leftrightarrow$
［$a=a'$かつ$b=b'$かつ$c=c'$が成り立つことである］

を証明しようというのに，何ということであろうと，びっくりしたものであった。教師は，これから示そうということを使って，
［$x^2+2x+1=x^2+x+1$］はxの係数が異なるから恒等式でないと教室で教えてしまったのである。

授業を展開している教師が本時の一番重要である内容の意味をまったく知らなかった，理解していなかったとしか考えられないのである。その教師は授業を始める際には冗談を言って生徒を笑わせていた。このこともあるときには活用されるべきであるが，私は「上手な授業」について教師にも，教師を目指す学生たちにも何か（何かはということがはっきりとわからないが）ちょっと（実際には大きな影響があるのだが）勘違いしていることがあるのではなかろうかと大きな危惧を持っている。

まとめ　各課題の正答率を考えて，教師を目指す学生諸君は基本的な事柄の理解をさらに深めなければならないと考えさせられる。これらの課題において話題となった数学的性質は数学の専門としての講義では話されることではない部分も多々あるが，数学の専門内容を学ぶことからこれらの事柄を自分で考えて答えられるようにしていって欲しいと願っている。単に公式を覚えて，それに数値を代入して解答が求まったからと喜ぶのではなく，自ら考えて自分の方法で解決方法を探すように努力してほしい。教師になるとどんな場面に立ち向かうかもしれないし，それに対応しなければならないと考えるとなおさらその気が強くなってくる。できるだけ教師への素養を身につけて学生を卒業していって欲しい，そのための手助けを我々も惜しまなくやっていくつもりである。

参考文献

1.　上野　健爾，「円周率πをめぐって」，数学セミナー，日本評論者，1993年4月号，80頁〜84頁。
2.　黒崎東洋郎・高橋　敏雄，「中学校「数学」の実践的な指導に関する大学生の資質能

力」，岡山大学算数・数学教育学会誌「パピルス」，第９号（2002 年），45 頁～55 頁。
3．　高木　泉，「無限と極限」，数学って何だろう（猪狩　惺編著），日本評論社，1997 年，１頁～20 頁。
4．　武元　英夫，「大学での微分積分学の講義」－教員養成課程における講義及び私立工業大学での講義－，日本数学教育学会誌，第８５巻，臨時増刊，第８５回総会特集号（２００３），５１９頁。
5．　武元　英夫，「大学における微分積分学の講義」－教員養成課程における講義及び私立工学系学部での講義－，東北数学教育学会年報，第３５号（２００４），25 頁～32 頁。
6．　武元　英夫，中学校「数学」の内容である分数と円周率をめぐって－　教師を目指す学生の教養として　－，宮城教育大学紀要，第 40 巻（２００６）印刷中

From a newspaper article of "Ability shortage of how to teach" is read
- On the basic knowledge concerning mathematics
of students who aim at mathematics teacher -

Hideo Takemoto
Department of Mathematics, Miyagi University of Education

Abstract. We hope that the students studying at the department of mathematics in teacher-training course will understand and be able to explain the basic knowledge concerning mathematics.

Keywords. Ability shortage of how to teach, Basic knowledge, Infinite decimal, Fraction, Casting out nines