東北数学教育学会年報 第38号 2007年3月31日

最近の授業より3題

山形市立蔵王第二中学校　　菊池　久人

―― 概要 ――

最近の授業より感じていることを、「－２＋４＝－６、－５－３＝－２と間違わないための指導法の工夫」「シャッフル学習」「てんびんと連立方程式」の三つ話題で、論じたい。

キーワード：正負の数の計算、シャッフル学習、連立方程式、てんびん

その1　－２＋４＝－６、－５－３＝－２と間違わないための指導法の工夫

１．はじめに

中一の一学期は正負の数の計算を勉強する。乗除は符号に関して、負の数を偶数回乗ずれば正、奇数回乗ずれば負となることを覚えれば、小学校の九九の延長として、その計算方法の理解は容易である。しかし、それに先駆けて学ぶ、正負の数の加減は２数の符号や絶対値の比較によって計算結果の符号を吟味する必要があり、前者の乗除のように簡単に処理できない。それゆえ、－２＋４＝－６、－５－３＝－２　のような典型的な誤答が目立つ。ところが、その後の単元である「文字の式」における計算では、

$$-2x+4x=2x \qquad -5x-3x=-8x$$

のように、正答を導くことができる生徒がほとんどである。さらに、その後の計算においても

$$-2x-2+4x+4=2x+2$$

$$-5x-5-3x-3=-8x-8$$

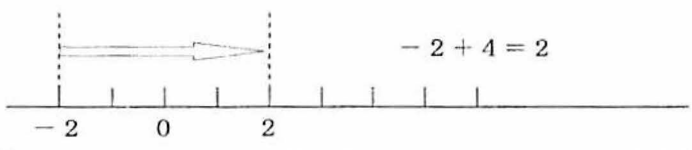
と、前出の－２＋４や－５－３も正しく計算できるようになる。

そこで、誤答から正答への生徒の変容の例より分析を試み、正負の数の加法、減法の指導法について考えてみた。

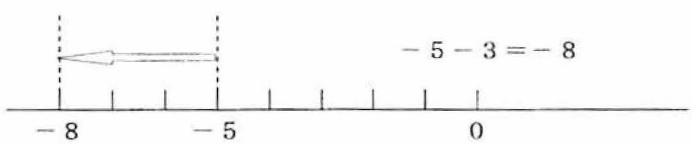
２．教科書における正負の数の加減の指導について

正負の数の加減の指導については、教科書によってその細部は異なるが、たいてい数直線を用いて説明している。

たとえば、－２＋４の計算は、－２より４大きい数を求めることと考え、下のようにして



－５－３の計算は、－５より３小さい数を求めることと考え、下のようにして



３．誤答から正答への生徒の変容の例

－２＋４＝－６、－５－３＝－２のように誤答をする生徒が、その後の単元「文字の式」の計算において変容する様子を以下に示す。

正負の数の計算

上記の数直線により説明

−2＋4＝−6	誤答	−（2＋4）＝−6
−5−3＝−2		−（5−3）＝−2

文字の式の計算

半具体物○●による説明

−2x＋4x＝2x	正答
−5x−3x＝−8x	

x⇒○，−x⇒●

−2x＋4x＝●● ○○○○

＝$\boxed{●●○○}$ ○○

＝○○

＝2x

−5x−3x＝●●●●● ●●●

＝−8x

文字の式の計算

半具体物○●□■による説明

−2x−2＋4x＋4＝−2x＋4x−2＋4＝2x＋2	正答
−5x−5−3x−3＝−5x−3x−5−3＝−8x−8	

x⇒○，−x⇒●　1⇒□、−1⇒■

−2x−2＋4x＋4＝●●■■　○○○○□□□□

＝$\boxed{●●○○}$ $\boxed{■■□□}$ ○○□□

＝○○□□

＝2x＋2

−5x−5−3x−3＝●●●●●■■■■■ ●●●■■■

＝●●●●●●●●■■■■■■■■

＝−8x−8

4．調査アンケートより

該当する生徒を対象に、以下のような調査アンケートを面談方式で行った。

1．　−2＋5＝−7

　　−9−3＝−6　　のような間違いをしたのはどうしてでしょうか？

2+5=7 の7に−をつけた。

9−3=6 の6に−をつけた。

2．　$-2x+5x=3x$

　　$-9x-3x=-12x$　　は間違えなかったが、それはどうしてでしょうか。

xをはずして、数字の部分の−2+5、−9−3を見て、それぞれ3、−12と計算した。1の問題と違って、xがあることによって、2+5、9−3の形で目に入ってこなかったから。

3．　$-2x-2+5x+5$

　　$=-2x+5x-2+5$　　のように、$-2+5=-7$と間違わなくなったが、

　　$=3x+3$　　それはどうしてか。

2の計算で慣れたから。

5．分析

これらのことより、$-2+4$、$-5-3$の計算は、小学校の既習内容である$2+4$と$5-3$が視覚に真っ先に訴え、簡単ゆえにまずは計算してみようということになり、結果的に

$$-(2+4)=-6 \qquad -(5-3)=-2$$

と誤答を導いてしまう。だから厳密に言うと、(　　)を勝手に付けて計算しているのは、最初の−をいったん視野から外して、目に飛び込んだ簡単な計算をして、その結果に−を付けているのである。したがって、このような正負の数の計算では、無意識のうちに誤答を招いてしまうが、

$$-2x+4x \qquad -5x-3x$$

の場合は、習って日も浅いこともあり、前者のように無意識には計算できない。すなわち、

$$-2x+4x=-(2x+4x)=-6x$$
$$-5x-3x=-(5x-3x)=-2x$$

のようにはならないのである。

また、文字の項同士の計算だから

$$-2x+4x=(-2+4)x=-2x$$
$$-5x-3x=(-5-3)x=-8x$$

となるものの、実際には途中の式は省略して計算するので、$(-2+4)$、$(-5-3)$の部分が直接視覚に入ってくることはない。よって、誤答も防ぐことができる。このように、間に文字を介することにより、正しい計算ができるようになり、それに慣れることにより、はじめはできなかった正負の数の加減も正しくできるようになる。

6．まとめ

正負の数の加減が中学数学の基本であることにかわりはない。しかし、正負の数の計算しか学んでいない段階でその定着が徹底できないからといって、以後ずっと計算ができなくなると思うのは早計である。正負の数という一つの単元でつまずいたからと言って、将棋倒しのようにますます理解できなくなるのではない。むしろ、後続の単元「文字の式」「式の計算」「平方根」などは既習内容の理解を支援する敗者復活の場として、前向きにとらえるべきである。既習内容から新出内容を導くのが理想ではあるが、逆に新出内容を理解することによって既習内容の学び直しも可能である。繰り返し計算問題に取り組み、慣れてくると、

$-2+4=-2$，$-5-3=-8$の計算も頭の中で、$(4-2)=2$，$-(5+3)=-8$と瞬時に計算して求めることができるようになる。

その２　シャッフル学習のススメ

１．はじめに

本校は各学級７～８名の小規模校であり、授業中に個に応じた指導が十分にできる環境にある。生徒たちも授業に集中して取り組み、意欲的に質問する姿が見られる。授業中にほぼ問題の解き方については理解し、家庭学習においても、宿題や自学として習った内容の定着を図っている。また、進度に合わせた小テストでも、計算の手順や考え方については概ね理解していることがうかがえる。ところが、学期末のテストでは複数の単元から出題されるため、個々の単元においてはこれまで理解していたはずの解き方と問題を上手く結びつけることができず、混乱してしまう傾向にあることがわかった。この結びつけが上手くできないケースとして、同一単元内におけるものも考えられる。大きな集団においてはこのようなことはあまり目立たないのかもしれないが、少人数ゆえに一層顕著であるのかもしれない。

そこで、この事態を克服すべく、「シャッフル学習」なるものを提案し、授業などで継続していきたい。そうすることにより、異なる問題が混在した場合でも個々の問題を解く力を発揮できるようにしていきたいと思っている。

２．シャッフル学習について

英語のshuffleには「混ぜる、ごちゃ混ぜにする、〈トランプを〉混ぜて切る」などの意味がある。テレビのクイズ番組などでも、「シャッフル」＝「ごちゃ混ぜにする」というニュアンスで使われている。そこで、数学におけるシャッフル学習を、学んだばかりの内容に関する問題と他単元も含め既習の問題とを混ぜ合わせて、問題演習することと考える。

３．授業や家庭学習における生徒の現状

授業でこのタイプの問題を重点的に学ぶ。また、家庭学習では同じような問題を練習する。したがって、以下の問題を解いている間はしっかり定着している。

次の計算をしなさい。

$$\frac{2x}{5}-3-\frac{5}{3}x$$

１５で通分する

$$=\frac{6x}{15}-\frac{25x}{15}-3$$

$$=\frac{6x-25x}{15}-3$$

$$=-\frac{19}{15}x-3$$

次の方程式を解きなさい。

$$\frac{4x-2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{3}{4}x$$

両辺に１２をかける

$$\frac{4x-2}{3}\times 12=\frac{1}{6}\times 12-\frac{3}{4}x\times 12$$

$$16x-8=2-9x$$

$$16x+9x=2+8$$

$$25x=10$$

$$x=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

ところが、実力テストなどでは、２つ以上のタイプの問題が混在するので「通分してから計算する」方法と「両辺に同じ数をかけて分母をはらってから解く」方法の使い分けができない。

使い分けの前提は、等式であるか、そうでないかの違いを見きわめることで、後者ならば、等式の性質（両辺に同じ数を足しても、引いても、かけても、割ってもよい）が使える。

４．仮説と研究方法

（１）仮説

授業等で複数の単元からの問題を並列したドリルを行うことによって、異なる解き方の比較ができ、各々の問題の解き方を定着させることができるであろう。

（２）研究方法

１年生対象に次の方法で検証を行う。

①計算問題にしぼって、既習内容のテストを実施する。

②終学活の前に、複数単元から出題する計算問題のドリル（３～４問程度）を毎日行う。

③授業のまとめとして、その時間に解き方を習った問題と既習の他の単元の問題を並列したドリルを行う。

④学期の終わりに、①の問題と同程度の難易度の計算問題を実施し、比較する。

５．具体的な例

（１）授業では

例１．正負の数の乗除

次の計算をしなさい。

（１）（－３）×（－４）　（２）（－７）×（＋２）　（３）（＋６）×（－９）

（４）（－８）＋（－２）　（５）０×（－６）　（６）（－８）×（－８）

（７）（－９）－（＋１）　（８）（－１２）×０　（９）（＋７）＋（－１０）

例２．反比例の式

（１）ｙはχに反比例し、χ＝４のとき、ｙ＝３です。ｙをχの式で表しなさい。

（２）ｙはχに反比例し、χ＝－５のとき、ｙ＝４です。ｙをχの式で表しなさい。

（３）ｙはχに比例し、χ＝３のとき、ｙ＝１２です。ｙをχの式で表しなさい。

例３　方程式の解き方

次の方程式を解きなさい。

（１）　$\frac{1}{3}x - 6 = \frac{1}{4}x$　　（２）　$\frac{3x-4}{5} = \frac{x+1}{3}$

次の計算をしなさい。

$\frac{2}{3}x - 4 + \frac{1}{5}x$

（2）家庭では

この見きわめ、使い分けができるようにするには、異なるタイプの問題を並べて、比較しながら、自学ノートなどに解く。二学期が終わった時点では「正負の数」「文字と式」「方程式」「比例と反比例」の４つの単元に分けて、以下のようなノートの使い方が望ましい。同じタイプの問題を縦方向に続けて解くのではなく、横方向に異なるタイプの問題を解いていく。

正負の数	文字の数	方程式	比例、反比例
	$\frac{3x+5}{4}-\frac{x-5}{3}$	$\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x$	
$5-2\times(-3)^2$			yがxに反比例し、x=4のとき、y=2である。yをxの式で表せ
$=5-2\times9$	$=\frac{9x+15}{12}-\frac{4x-20}{12}$	$\frac{1}{3}x\times15-2\times15$	
$=5-18$			
$=-13$	$=\frac{9x+15-4x+20}{12}$	$=\frac{1}{5}x\times15$	
		$5x-30$	
	$=\frac{5x+35}{12}$	$=3x$	
$(-12)\div4\times$		$2x=30$	$y=\frac{a}{x}$にx=4
(-16)		$x=15$	y=2を代入
	$(2x+6)+$		
$=-3\times(-16)$	$(3x-7)$	$5-3x=-2x$	$2=\frac{a}{4}$ a=8
$=48$	$=2x+6+3x$	$-3x+2x=-2-5$	
	-7	$x=-7$	$y=\frac{8}{x}$
$(-15)\times(-2)\div(-15)$	$=5x-1$		
$=30\div(-15)$		$2x+12=7-3x$	
$=-2$	$(4a-3)+(5a-9)$	$2x+3x=7-12$	
	$=4a-3+5a-9$	$5x=-5$	
$5-2\times(-3)$	$=9a-12$	$x=-1$	
$=5+6$			
$=11$			

6．成果と課題

継続は力なりで、授業中の取り組みや終学活でのドリルの成果が表れている。学力的に低い生徒でも、ドリルとして行っている３問程度の計算問題はほぼ確実に解けるようになってきた。もちろん、途中の式の書き方も定着してきた。

また、通常は単元毎にまとめテストを行ってきたが、本実践では計算問題にしぼって、既習の他単元の問題も混在させることにより、他の解き方との比較を意識させながら問題を解くようになってきた。

家庭での自学については、そのノートの使い方や問題の選び方も自力で判断して行うことは、ある程度学力が高い生徒でないと、厳しいことがわかった。このような取り組みが必要なのは、中位から下位の生徒ゆえに、継続性を重視するにはドリル問題として、適宜家庭学習用のプリントを配り、添削指導する方が効果的であると考える。

その3　てんびんを利用して連立方程式の解き方の原理を考えさせる指導

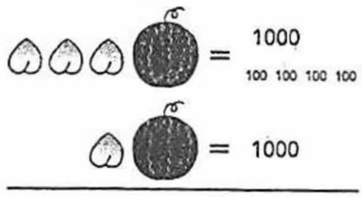
1．　はじめに

本校の中3の生徒（今年度男子4名、女子3名、計7名）は、四月の標準学力検査の結果、2年連続で連立方程式の定着が全国平均を下回っていることがわかった。

そこで、連立方程式の解き方をしっかり理解させるために、計算過程の意味を2つのてんびんをモデルに、操作させて気づかせる授業を試みた。

2．　教科書における扱い

本校で使用している啓林館「楽しさひろがる数学2」では、*「もも3個とすいか1個の代金は1400円、もも1個とすいか1個の代金は1000円です。このとき、もも1個の値段はいくらでしょうか。」*という問に対して、下のような図を使って、①－②を理解させている。

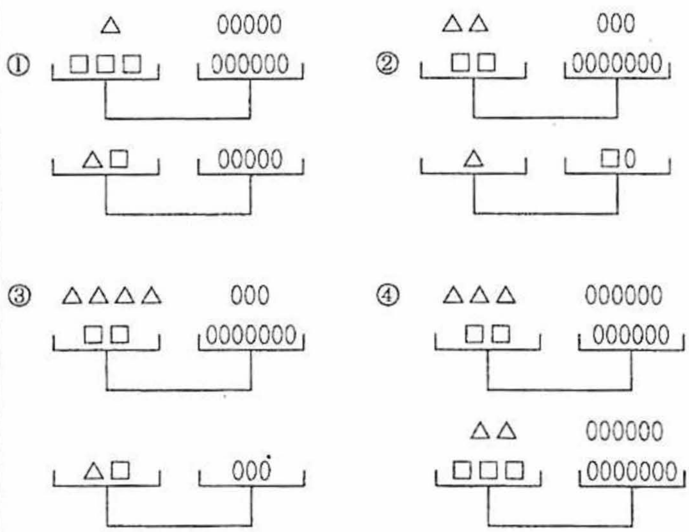


$$\begin{cases} 3x+y=1400 \cdots ① \\ x+y=1000 \cdots ② \end{cases}$$

3．　授業実践より

（1）課題把握

次の①～④はてんびんにつり合っている状態を表したものです。
それぞれにおいて、△、□が0何個分か考えなさい。



①は直接上から下を引く加減法。

②は代入法。

③は下を2倍にして、引く加減法。

④は上を2倍、下を3倍にして引く加減法。

（2）考え方の交流～グループ学習～

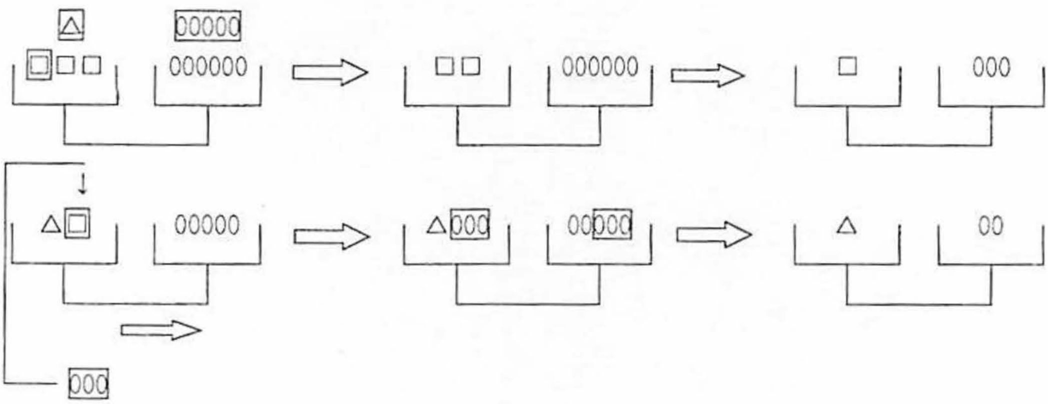
（３）発表

①その１（仮定法による方法）

仮に△＝00, □＝000 とすると、上のてんびんは左の皿が0 １１個分となり、つり合う。また、下の皿も、左の皿が0 ５個分となり、つり合う。

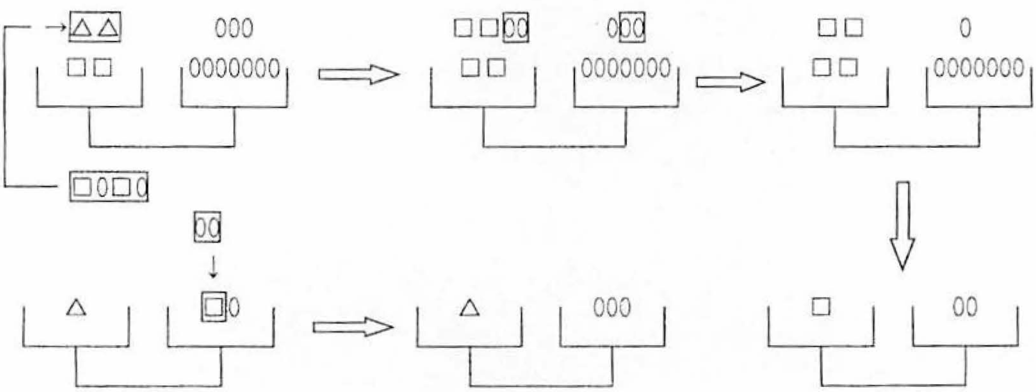
①その２（加減法による方法）

上のてんびんの左右の皿から、下のてんびんの左右の皿の分を取り除いて、残った左右の皿の□□と000000 がつり合うことより、□＝000。それを下のてんびんの左の皿に置き換えて、△000と00000 がつり合うことより、△＝00。



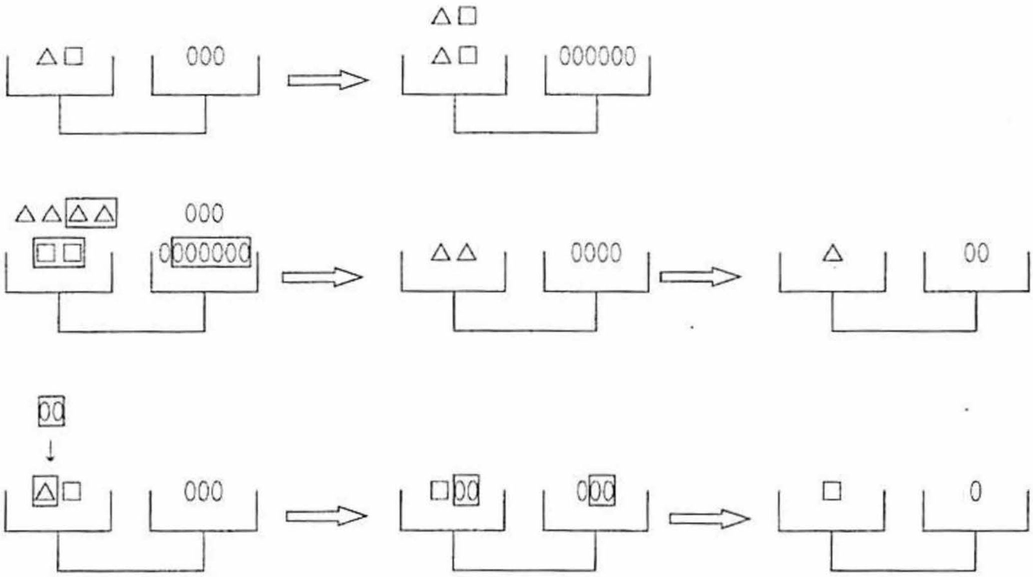
②その１（代入法による方法）

上の左の皿の△を□0に置き換えて、□□□□00と0000000000 がつり合うことより、□□□□＝00000000 となり、□＝00。次に、それを下のてんびんの右の皿に置き換えて△＝0000。



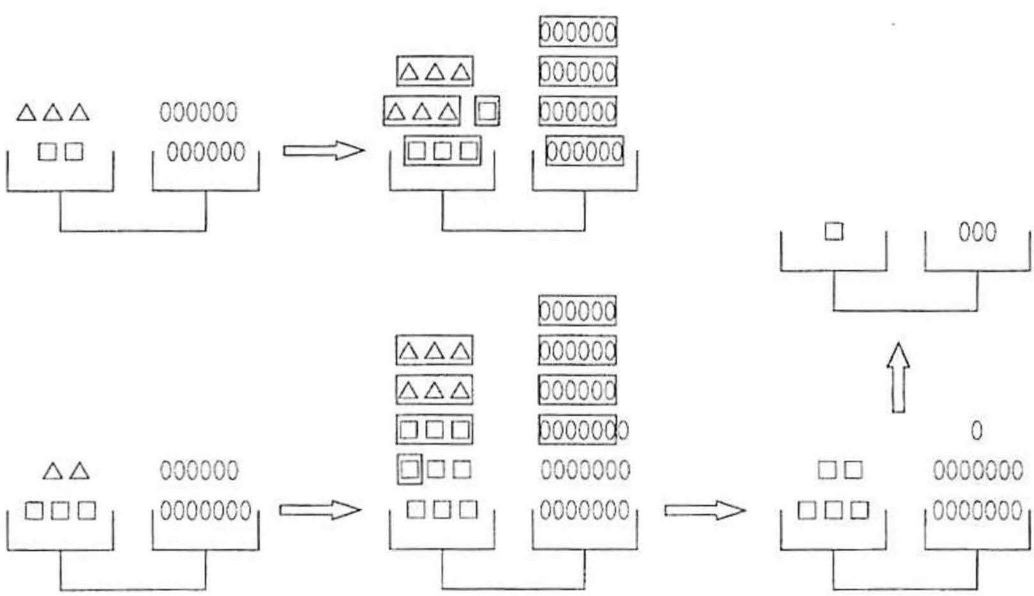
③その１（加減法による方法）

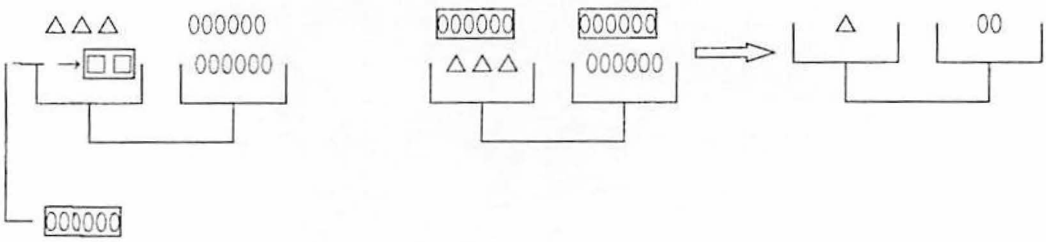
下の左右の皿を２倍にして、△△□□＝000000。上のてんびんからこのてんびんを引いて、△△＝0000 より、△＝00。次に、それを下のてんびんの左の皿に置き換えて、□＝0。



④その１（加減法による方法）

上の左右の皿を３倍にし、下の左右の皿を２倍にして引くと、△△△△△＝0000000000となり、△＝00。次に、それを下のてんびんの左の皿に置き換えて、
□□□0000＝0000000000000　となり、□□□＝000000000。よって、□＝000。





4．成果と課題

連立方程式の解き方の原理をてんびんを使って、生徒に導かせることにより、既習の方程式の解き方を振り返ることとなった。

課題の①〜④を以下の連立方程式に置き換えて、生徒が見つけた解き方の原理に沿って解くことにより、興味関心も高まった。

① $\begin{cases} x+3y=11 \\ x+y=5 \end{cases}$　② $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ x=y+1 \end{cases}$　③ $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x+y=3 \end{cases}$　④ $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 2x+3y=13 \end{cases}$

解き方の定着度に関して、特に顕著だったのか、代入法による方法である。②のようなタイプの連立方程式を解く際に、てんびんでの操作のイメージのために、自然に下の式を上の式に代入して、$2(y+1)+2y=10$のようにxを消去することができていた。

連立方程式の解き方を学んだ後に、「てんびんを使って、連立方程式の解き方のアイディアを考えましたが、そのことが連立方程式を解く際に、どんな点で生かされていると思いますか。」のアンケートに対して、「てんびんで置き換える考え方が代入法とつながっているので、考えやすかった。」「他方の文字の値がわかったときに、その値を代入するとき、てんびんをイメージしながらできた。」という回答があった。このことより、①〜④全部をてんびんで操作する必要はないものの、①②のタイプは加減法と代入法を対比させる意味でも、導入部で触れておくことは有効と思われる。

今回の取り組みを通して、一年次の「方程式」の導入の際にも、てんびんの操作によって、等式の性質を導かせることが有効であることが予想できる。この経験を経て、二年次の連立方程式の解き方の原理へと発展させていきたい。

また、④のように2つの二元一次方程式のx、yの係数が互いに逆になっている場合には、二式を足して、$5x+5y=25$とし、両辺を5で割って、$x+y=5$を導いて、簡単に計算できることもあることに触れ、機械的に操作するだけではなく、係数との関連で解くことが可能であることも扱いたい。

【参考文献】

「楽しさ広がる　数学2」啓林館　2005

Topics from recent mathmatics lessons

KIKUCHI,Hisato　Zao 2nd Junior Highschool

Selecting three topics from recent mathmatics lessons,I'll refer. The first is student's recognition of misunderstanding the way of calculation. The second is "Shuffle learning". The third is finding ideas to solve equations.