東北数学教育学会年報 第38号 2007年3月31日

生徒によくわからない授業
——２００6年度東北数学教育学会年会・研究発表から学んだこと——

板垣芳雄
（宮城教育大学名誉教授）

はじめに

東北数学教育学会の研究発表会は、初夏と初冬に開催されている。佐伯卓也・前会長のときに、わたしが副会長の森川幾太郎さんに誘われて入会してからでも、毎年２回、開かれたと思う。大学を停年になってからは、欠かさず出席して、もう５年になる。その間、何度か口頭発表をさせてもらった。発表内容は、私学工学部で、いくつかの講義を担当し思案したこと、学生に演習で接して感じたこと、期末試験を採点して気付いたこと、から出ている。発表を準備すると、いつも、わが国の数学教育の変遷のことを思う。

皮肉なことに、教員養成の学部で数学科教育法を講じたり、数学教育の修士論文を書かせたりする仕事から解放されたら、学生たちの数学を学ぶ気持に近づけたような気がする。そして、理工系の学部でも高校の要目の上に乗せるような講義をしてはだめだ、内容を、自分の教わった「数学」で編んではだめだと思うことに抵抗感がなくなった。

彼らが咬んで飲み込めば、消化吸収するように加工したものでなければならない。

いつの間にか、数学を、「数学」を教える科目とみることはなくなり、数学は、学生たちが、大学に進学するまでにいろいろ学ばせられた、数多の教科のうちの一つと考えるようになった。高校の入試問題を新聞で見たりすると、このような問題を解くように学ばせられている数学が、世に出てからも使い続ける読み書きの能力のどこに寄与するかと心配になる。

それが、非常勤講師の仕事も止めて半年もしたら、指導内容を批判する気持はしぼみ、過去を振り返る気力も萎えていた。ただ煩わしいものであった期末試験の問題の作成や採点が、どうも、自分の講義について反省させ、高校数学の欠陥を窺わせ、それが、中学の要目のまずさを再認識する機会になっていたらしい。

学生に会うことがなくなって、授業を思案することもなくなったら、数学科教育に関わっての、むかしの自分の指導について、あれではだめだったのだと考えないで、まだ若かったし、ああいうふうにしか出来なかったのだと思うようになった。自分を、新たな研究や発表に向かわせる元気が生まれない状況にさしかかったことが自覚される。

だが、研究発表を聞いて、そこに自らの課題とすることはなくなっても、会に出席して、楽しめることはある。この論文（エッセイ）で、それを語ろうとしている。それを語るこ

とには失敗しても、平成１８年度の学会年会で発表されたものについて、年報には載らないことを伝えるという働きはするように思う。書いてあるのは、出席者から出た質問や、わたしが訊ねたかったことである。発表を思い出して、後で考えたこともある。発表内容を伝えることを目的とはしていないし、発表を聞いて耳に残った断片を拾って独り言つという偏ったものではあるが、そこには、研究を、発表の場の外から補うようなことが記してあって、どこか今後の学会活動に刺激になることが含まれていると考えたい。

何より、発表会ではたいへんお世話になりました、という気持から発芽した試論である。

§１．方程式の解き方をてんびんで考えさせる

てんびんの釣り合いの図によって、連立一次方程式の解き方の原理を考えさせたという授業の報告の中で、代入法による計算が特によくできた、という一言が耳底に心地よく残った。代入法から教えて、加減法に進む方がいいとわたしは考えていたからである。未知数が一つの方程式に帰着し、既習の内容に有機的に連結するところを、大切に教えたい。

$\{x+3y=11, x+y=5\}$　$\{2x+2y=10, x=y+1\}$　$\{3x+2y=12, 2x+3y=13\}$

よくできたというのは、２番目の問題について、第２式 $x=y+1$ を第１式の x に代入して、$2(y+1)+2y=10$ として解いたことを指す。

発表を聞いているときは、「なんだ、前の式の x に、後の x の式を入れればいいのか」と、生徒は、すぐに覚えたのだと思った。

発表資料を読み返してみると、そのように生徒たちに覚えられたわけではなかったようである。授業は、小規模校の中３の、７名の学級、２年で学習する解き方について、その原理を、てんびんの図で指導するという方針で進められているから。

ともあれ、代入法は、（全生徒に？）覚えられたのである。

それまでの知識で素直にわかる代入法で解いてから、加減法に進めばいいと考えることに、根拠を得たように思った。

ただし、わたしが進め方まで深く考えたことがあるわけではなく、今ちょっと考えてみても、上の代入法の方程式を加減法で解く形にするとき、$\{2x+2y=10, x-y=1\}$ とするか。あるいは、$\{2x+2y=10, -2x+2y=-2\}$ とするか。

生徒に解かせるうちに、$\{x+y=5, x-y=1\}$ を提示する場面が生まれたりするか。

また、代入法をきっちり先にして、３番目の問題を代入法で解く計算をした後で、この問題について加減法を思いつくことにする授業シナリオはうまく作れるだろうか。

§２．$-2+4=-6$　$-5-3=-2$ と間違わないために

前節の件の発表者は、中３の方程式の授業とともに、同じ中学校の１年生の、「正負の数」の授業について報告している。そこでは、生徒の間違える心理をいろいろに観察している。

かつて、「正負の数」とその計算の、間違いを予防する方策が提案され、熱く教材開発が行われたのが思い出される。だが、新規の手立ては、つまずきの防止にこだわり過ぎてい

て、広く用いられずに消えて行ったようである。

発表者は、$-2x+4x=$ と書いたら、$-6x$ とはしないことに注意を向ける。

第一章の「正負の数」の演算規則を教えるのは、ほどほどに、「文字の式」や「式の計算」で、徐々に知識が正確になって行けばいいと考えよう。そもそも、$-3+4$ とか、$-23+54$ とか、そんな計算式には、この章を過ぎれば二度と会うことがないのだから。「-5に-3を足すと」という計算だってめったにすることはない。

と言ったら言い過ぎで、連立方程式を解く加減法では、$-5x$に$-3x$を加えるような計算をする。

しかし、その準備のために、それも、生徒には何のための準備かもわからない早い時期に、「正負の数」について学習させるのでは、教師を悩ます、悩ましい内容になる。

教科書編集に関わり、教科書原稿を読んでいるときは、こんな思いは心の隅に隠していた。ただの人になって普通のことが言えるようになったら、隠れていた思いが顔を出した。

「正負の数」の規則書きでは、面白かろうはずがない。教科書では、その規則に、なまじ講釈が付くから、大人には、読めたものではない。

正負の数の四則で惑うことなどない数学教師の前で、生徒たちが戸惑っていたのである。

別の研究発表の「子どもの数学教育観と教師の意識」では、中学生に質問紙で調査した結果を分析している。質問の問いの一つは、「数学でどんな授業をすれば、あなたは今以上に「数学はおもしろい」と実感できると考えますか。」

生徒が望む授業で一番多い回答は、つまるところ「わかりやすい説明」だったという。

確かに、「正負の数」では、引き算の記号を、唐突に「負」の数の印だと説明される。そこでゆっくり戸惑い、悩んでいるひまもなく、学年が進み、章が新しくなって、「連立の」方程式になると、そこでは、こんどは、解く手続きが判然としない。

別の質問では、印象に残った授業を記述させていて、そこに「連立方程式」と記したのもあるという。方程式を解けるようになった生徒が記しているのであろう。

ところで、発表のなかで、わたしの気持にひっかかったのは、印象に残っている授業について、半数は無回答だったという点であった。すぐに、生徒の無気力とか、無関心を想像したが、後で発表資料に目を通してみて、調査の質問自体が、生徒には答えるのが難しかったのではないかと思った。

別の質問の「自分が数学を面白い、あるいはつまらないと感じる事柄について」というのも答えるのが難しいと思う。

そう思ったら、回答しかねた生徒たちに、むしろ健全な精神を感じさえする。

「この授業は、面白いか、つまらないか」と問うことに、わたしが抵抗感を持つからであろう。勇み足とは承知の上で、発表資料の裏面に描かれた生徒たちの気持を代弁するように、もう少し、言わせてもらうことにしよう。もちろん、こんなことまで考えたのは、しっかり書かれた発表資料があったからである。

たとえば、美術科の「授業について」、面白いか、つまらないかと問われたとする。音楽

科や、体育科について問われたと考えてもいい。授業を、美術や音楽についての好き嫌いと区別して考えられるだろうか。

逆に、「教科について」問われているのに、嫌いな先生の、つまらない授業という感情の方が先立つかもしれない。現に受けている授業については、先生についての好悪の気持は小さくても、問われれば、その気持が教科の好き嫌いになって出ると推測する。

そもそも、受けている授業について、「面白いか、つまらないか」などいう二分法では考えたくないのではないだろうか。口先では、先生についても、教科についても、「すきだ」「きらいだ」と言うことはあっても、すきか、きらいかで見ているわけではない。

印象に残った授業は、と問うのも、教師を評価する資料を作る目的のアンケートならわかる。けど、日本の生徒には、先生の前で先生を評価することなど好きになれない気質があるような気がしてならない。

美術科の宿題で、絵を描くのに熱中する子がいるし、ほめられる子がいる。おもしろいわけではないが、体育の授業で、実技の見本演技をやらされるのがいる。西洋のクラシックなど耳にすることのなかった生徒が、音楽の授業で、その世界にひかれることがある。

数学の授業内容についても、2年、あるいは、3年の長さで見ないといけないのだと思う。数学の授業に、面白いことなどないことは、生徒には、わかっているのだと思う。面白くはなくとも、「スッキリわかると嬉しい」という回答を、調査報告は挙げている。

報告も触れているように、わかること、それは、授業の、わかりやすい説明だけに期待されるものでもない。

半数が無回答ということにこだわり、話しが長くなったが、話しているうちに思い出したことに、湊三郎会長が類似の調査を以前にしておられた。そこでは、算数・数学が「すきだったか、きらいだったか」と問うていたと思う。「大好きだった」、「どちらかといえば好きだった」などと記した項目から一つを選ばせるようにしたら、無回答というのは出ないのだろう。最近あるところでそういう統計話を聞いて思ったのであるが、このような、単純化した様式の調査でも、処理が簡単で、結果がわかりやすく、長年に渡り、くりかえし実施していれば、集計表をいろいろに味わえるようである。

§3. 3元連立1次方程式

話は、2元連立1次方程式のことに戻る。方程式を解けるようになって、わかった、解ったという生徒が、3元の場合も同じようにすればいいと考えたとしたら、連立一次方程式の解き方の原理はわかったといえるかもしれない。3元の場合について、2段に消去すればいいと説明されただけで解き方がわかる生徒もいるであろう。だが、大方の学習者にとって、2元の問題と3元の問題との差は、小さくはない。

3元の場合、消去の順番の取り方は、2元の場合よりずっと増える。大学1年の線形代数では、いつまでも「未知数を減らして行って」という書き方を尊重しているわけには行かない。方程式を行列の等式に書いて、行についての基本変形などと進むと、3元の場合

をろくに解いたことのない学生は、消去の進む道を、どのように取るのかがわからないと迷う。道の先が分からなくてもいいし、未知数がどこへ行ったか判然としなくてもいい、「行列」の基本変形を覚えて、消去法がわかった、判ったという気持になってもらえばいい。

講義で、小テストに、3元の方程式を解かせて感じたことは、中学、高校を通じて、誰もが3元連立方程式を解けるようにという指導はされていないということであった。

高校の教科書を見ると、確かに、そんな指導をするようにはなっていない。いろいろな連立方程式を例題にしている節はあるが、2元1次、3元1次の問題を、高校の因数分解のように、中学の一次方程式のように、算数の九九のように、どんどんさせる内容にはなっていない。

いろいろ解いて、計算手続きが身に付いていれば、考えが原理に及ぶこともあり、説明されて計算の原理はわかる。

線形代数を講義して、悩ましいのは、伝統、標準のテキストでは、「解が無い場合、解が無数にある場合」が主要テーマになることである。まずは、解が一意に存在する場合についての計算手順をしっかり身に付けさせるという自習・演習問題はない。学習水準が計算アルゴリズムの習得とは違う、上の段階の内容になっているのである。

そういう眼鏡でみると、高校の数学の水準も上に位置し、実務の内容や数値計算の作業は中学でおしまい、あるいは、小学校でおしまいにされているかのようである。

数学は、手続きを真似て、「できる」ように学習するのではなく、説明を聞いて、あるいは読んで分からねばならない、「わかる」ようになる学習になっている。

普通の高校の数学で、へたでも、できるような計算を、教えているだろうか。

大学の数学に言い及んだところで、中学の連立方程式の指導内容については、カリキュラム論としてもっと大切なことがあると思うので、それを述べておきたい。

等式を、てんびんの釣り合いにした説明では、個数を数える操作で答えに至る。答えの未知数は整数である。それが、消去法を話すときの文字の式では、 $ax+by=c$ のように書いて、任意の実数になる。a,b,c も整数とは限らない。

てんびんで取り上げている問題は、係数は整数で、しかも、みな正の整数である。生徒が代入法に気付いた問題2も、そのように書かれた式である。

鶴亀算の問題を式にしたら、この型になる。

それに対し、一般の型の方程式に導く、初等的な、連続量の問題としては、係数が割合を表す数の場合になるであろう。それについては、代入法は通用するが、てんびんの釣り合いの操作にしては話せない。

こう見てくると、負数の指導で、個数イメージを引きずり、整数についてカードで繰り返し計算練習するというのはいかがなものであろうか。個数に、負の数というのはない。もちろん、量の大きさにも、負はない。

発表の「小学校低学年における加減算教育と問題解決学習」によると、日本の算術では、数えることで、加減算を教えたが、緑表紙国定教科書以後、「量から数へ」となった。現在

の日本の小１における加減算も、量場面を用いて導入している。

それが、アメリカでは、伝統的に、鶴亀算の類が教科書にも載って、問題解決学習に用いられたという。

これには、おどろいた、知らなかった。わたしは、鶴亀算を日本の学校で教えなくなったのは、敗戦後のアメリカ化、さらには、アメリカを真似た数学の現代化のせいのように思っていたからである。皮相のイズムでは動かない、保守の伝統が見えないまま、アメリカの数学をイメージしていたようである。

算数から、算術の旅人算、出会い算の類の問題提示は追い出されたが、鶴亀算は、算数塾や、特殊校の入試が保護保存していて、その算法に頭をひねって中学に入学した生徒なら、連立方程式の機械的処方の威力を知り、方程式は「面白い」と感じるかもしれない。

§４．問題解決

「病院のベッドが角も曲がれて通行可能な廊下の幅を調べよう」という、高校・理数科１年の３時間の授業案と、実践についての報告があった。最初に、同じ幅で直角に交差する廊下の図で、ベッドの移動を模擬思考させ、次に、通行可能な廊下の最小幅を求めることが課題に設定される。

解決すべき問題は明瞭である。

発表資料のアンケート結果に、授業の印象を尋ねる最後の問（９）の回答を４０人の生徒について一覧にしたのがある。それを読むと、「難しかった」と記しているのが半数ほど、回答に「おもしろかった」という語を含んでいるのが数人、他の問についての集計表も、「難しかった」、盛りだくさんな授業内容を反映している。

授業が、数学でなく、「情報」の時間に行われたということも、「世界史」が必修科目であることが、かまびすしく報道された時節柄、愉快で、グラフを描くのに、Excel を利用して「情報」にしたらしいのも面白い。

この稿では、アンケート選択肢にある、「数学が現実場面で利用される様子がわかった」と、「三角比の新しい利用方法を知り、興味をもった」というのを利用して、語る。

ちなみに、「子どもの数学学習観」の調査研究でも、アンケートを分析する視点に「現実場面への応用に関わるおもしろさ・つまらなさ」というのがある。

もちろん、鶴亀算が生活で役に立つか、現実的か、などとは考えない。連立方程式に立式される問題が日常の身近にあるか、とも問わない。亀を１，２，３，と数える幼児の声を思い浮かべ、鶴と亀の問題には、十分に現実味があるとしておく。

１匹、２匹、３匹、と限定しない、無名の数についての、記号式からなる連立方程式に現実味はないが、方程式による解法は、現実から生まれたものだと思う。現実から生まれ、現実を離れた数学概念が新たな数学的問題を生成する。問題解決というときの実用主義の問題は、そういう新たな数学的問題のことではない。

連立方程式とその解法は、現実の問題解決から学ばれ、三角比は、問題解決としての利

用方法を通してよく学ばれて行く。

普通教育の数学の授業で、「現実の問題」と口にすることはないし、現実と非現実を意識して話すことも無いと思うのであるが、いつの頃からか、数学は、世間から、非現実の抽象論理を語るものにされてしまったようである。理学部の数学者が研究する数学が普通教育の教科のイメージを作っているのであろうか。そうではなくて、多分、数学教師の「数学」イメージが日常語でない非現実の言語で数学を語らせ、それが、生徒の数学イメージを形成しているのでないだろうか。

いまや、全く抽象の体系に整備されている複素関数論の正則函数は、リーマン（1826-1866）にとっては平面の流れの場であったという。普通教育の数学の内容は、リーマン以前、オイラー(1707-1789)の時代の数学なのだと思う。その数学を、ヒルベルト（1862-1943）以後の形式主義の器に載せて提供したのでは、口に入れようとしない学生が出て当然である。口に入れてみても、なかなか咀嚼できないだろう。

さて、小６の「立体図形の授業実践の報告」では、昔のM川の流れについて、「(どこにおいても）ビー玉が必ずお堀の方へ転がっていくのはなぜか？」と問うている。その問いの答えがわたしはわからなかった。実験をして、見えているように転がるという観察結果が、答えになるのではないかと思ってしまう。注意力散漫からの、聞き漏らしもある。「問題」の導入課題としての意味をわたしが把握できなかったのであろう。わたしは、直ぐに、「地図の等高線に直交する傾斜の線の場、流れの場」を思い描いてしまったから。「それは授業内容にしていない」という説明で、わからなくなってしまった。

聞き落としのせいで、あるいは、問題の説明不十分から、わからなくなる。その種の「よくわからない」は、数学の授業には、多いように思う。

ともあれ、「なぜか？」と問われただけでは、出題者の期待する方向が生徒たちに見定まらないという授業には、何度となく出会ったのを思い出す。

なお、森川幾太郎が紹介する問題解決型学習の３つの形態というのは、なかなか興味深く、高校の内容にも当てはめて考えられ、$(\cos\theta,\sin\theta)$を等速回転とむすんで教えるのは、まさしく３番目の型(about でも for でもなく、via)になると思った(Teaching via problem solving)。

§５．平行四辺形の作図

「風車から学ぼう　～第五学年、いろいろな四角形～」は、付属小学校での授業についての報告である。１０時間をかけて実践したものを２０分弱で話したわけであるが、「よく回る風車を作ろう」という problem はよく分かった。そして、１，２時間目の授業のことだったようであるが、生徒たちが、「平行四辺形の対角線が互いに他を二等分するという性質」を、授業企画者が期待した道筋ではうまく発見してくれなかったという話しの筋もよくわかった、と思った。

風車の羽根を作る平行四辺形を、二つの同心円を書いて、２円の直径を対角線にとって

書けばいいと気付かせたかったようである。期待の発見に至らなかったことを、生徒が、四辺形の、中心と頂点の関係を考えることはしない、内部に線を引こうとする考えが出ない、二つの円が書いてあっても平行な2辺から書こうとする、のように観察している。

期待がはずれて残念の気持が込められていると読める観察文から、生徒たちが、出題の意図を把握できないでいた心情が、わかるような気がした。わたしも授業報告の「問題」を聞いただけでは、どう解いたらいいのか、解らなかった。

作図となれば、まずは「これと同じ四辺形を書け」、あるいは、「これと同じ形を作れ」と、合同な、あるいは、相似な形を書かすことが問題とされる。その形を書こうとすると、いわゆる「平行四辺形になるための条件」だけでは足りない。平行四辺形一般で、目的に合った形をうまく書こうとしても、目的が作図の外のことだし、書き方は見えてこない。

作図題としては「2つの対角線の長さが与えられたときに、」とでも規定することになるのであろう。そうしても、まだ、交わりの角度は不定である。

このように考えてくると、作図題と、論証の違いが浮かび出る。平行四辺形の性質と教科書が記すのは、平行四辺形になるための十分条件であって、これは、幾何の「証明問題」を解くところで使われるものであろう。ただし、それは、中学数学の範囲外で、高校の入試に出ることもないのではなかろうか。

ともあれ、授業をしてみて、うまく行かなかったことから、授業を企画するときに「数学」にとらわれて、数学の外になかなか目が行かないことを教えられる。

報告を聞いた後でわたしが考えたのは、「大きい円周上の点Aと、小さい円周上の点Bを結ぶ線分ABを一辺とする平行四辺形ABCDを書け」と出題することであった。「CとDも円周上にとることにして、線分CDはどのように位置するか。」

§6．二等辺三角形の底角

「二等辺三角形の2つの角は等しい」と、ただ、角というのはどうか、2つの底角というべきではないか、と質問があった。「二等辺三角形の両底角定理の意味づけ」と題した発表のときである。発表題では、底角という語を使っている。

教科書にあると同じに書いたということであった（啓林館）。

そうか、底辺とか頂角という語は使わなくなったのか。

その変遷、変化を意識したことはなかったが、もしかすると、三角比を定義するのに、今は、斜辺、底辺、対辺などとは言わなくなっているのかもしれない。帰宅して、高校の教科書を見たら、無い。「斜辺ぶんの対辺」と声に出して言って、サインの定義を思い出させたつもりでいたが、わけ分らなかった学生がいたかもしれない。

三角形の辺をa,b,cと書き、対角をA,B,Cと書く。オイラーに始まるというこの型はすっかり定着している。余弦定理といえば、この記号で書いた3つの式になった感がある。

定理は三つあるのではなくて、一つで、2辺に挟まれた角と、挟角の対辺との計量関係を、角の余弦を用いて書き表したものだ。辺や角という量と、それらの関係が式にされたので

あって、教科書にある式の読み方を覚え、式の意味としての関係を学習するのではない。

記号を書いて話したら、二等辺三角形というのは、$a=b, b=c, c=a$ の３通りと考えるようなことになるではないか。

三角形を斜めに書いても三角形は三角形であると教えている。で、二等辺三角形の底辺が上になることを心配する人がいるのかもしれない。が、そんな心配はご無用に願いたい。わたしは、「等脚三角形」を推奨したいと語ったことがあった。

こう話してくると、ユークリッドの「原論」ではどう書いているかを確かめたくなる。何度となく読んだはずであるが、そこは覚えていない。中村幸四郎他訳を開いてみたら、「二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しい」となっていた。では、その逆はどう書いているか。「もし三角形の２角が互いに等しければ、等しい角に対する辺も互いに等しい」とある。底角という語はない。頂角という語もないのかもしれない。

ともあれ、毎度のことながら、用語を含め、「原論」の隙のない記述に、目を開かされる。

平行四辺形の性質がどこにあるかを見たら、面積について語る文脈のなかに位置されて、あった。平行四辺形なるための条件としては出ていない。よく知られているように、「原論」には、そもそも、平行四辺形の定義というのはない。書き忘れたのではなくて、「等しくかつ平行な２線分を同じ側で結ぶ２線分」を作図すると、２線分は「等しくかつ平行」になる、として登場し、その四角形を、英語だと parallelogram と呼ぶようになるのは、後に続く論述においてである。

二等辺三角形は巻頭で定義されている。ただし、「二つだけ等しい辺をもつもの」として。

ついでに書かせてもらうことにして、余弦定理に当たるものは、三角比を用いないで、線分量のことにして記載してある。ここでも、負の数は要らないということになる。

研究発表会の後、しばらくして、「戦前・戦後の「歩合算の応用」の類似性について」という研究に出会った（中西隆：於近畿数学教育学会）。研究資料にしている昭和３４年の教科書「新編・新しい数学　中学１」を見たら、底辺、底角、頂角のある三角形がちゃんと書いてあった。

負の数のことは、その中１の教科書にはない。

§７．鶴と亀、マルとサンカク

「和算家の平方根の計算術」、これがわたしの発表の題である。平方根の和算の計算法は、解説した術の他にもあったのではないかと質問された。そうか、「ある一つの計算術」としないといけないかと思ったが、題目をそうしたのでは、くどい。２１ページの資料は、計算法の解説というより、数学教育論として、副題にある「和算の記述様式で、論証志向の提示を照らし、計算主体の発見学習を夢見る」内容になっている。だが、そのことには、発表では、触れなかった。発表会では、もっぱら、「一つの計算術の発見についての推測」について話した。話したことからは、資料からも逸れるが、わが国で和算の伝統はどうなったのかという質問から、日本の数学について、参加者からいろいろな意見が出された。

江戸時代の和算は、中国の数学が伝わって、日本流に形成されたものであろう。それに対し、わが国近代の学校教育で教えられ現在に至る数学は、西欧の数学である。

ここには、質疑応答のなかで、わたしが話した、鶴亀算の計算題を中国ではなぜ鶴亀算といわないのかという疑問に対する推測の答えを記しておきたい。本家の中国では、鶴と亀の問題はない。日本人向きに、めでたい鶴と亀の話にしたのであろうと、単純にそれだけのことに考えていた。中国のことは何も見えていなかったようである。

中国には、日本のように、動物についても人間のように扱う物語は無いという。

中国人には、「吾輩は猫である」の動物観は異様であり、中国に、里の人間に情を通じるキツネの童話もなければ、稲荷さんになるようなキツネはいない[1]。わたしはそれを知って、中国人が、鶴亀算などというネーミングをすることはないのだと思った。

見えなかったということでは、定義という言葉について、わたしは数学で使う「定義」の意味で考えていると思う。他の分野でも使用するようで、それに出会ったときも、数学の「定義」を基に考えている。英語の definition の意味も、わが国近代に definition の訳語であった、その「定義」から考えている。最近になって、それでは、判らない definition の用例に出会って（文脈からは、意味が「典型例」になると思った）、英語の意味の広がりは、わたしにはさっぱり見えていなかったことを知った。

彼の国では、日常語の世界で definition を耳にして、数学のそれについて学校で習う。

日本では、わたしの場合、数学で「定義」を習い覚え、日常会話で使うことはまずない。

生徒に、数学の授業で聞かされる言葉が、「数学」でのみ孤立して使う意味の語のように印象されているならば、わからなく、つまらなく、数学は意外なところで利用されるというけど、私にとっては追いつけない暗記科目、となる。

言葉の獲得過程に逆らうように教えられたら、拒絶のアレルギー症状を起こす生徒が出る。数学の世界の論理的定義で教えては、わからない生徒がたくさん出るのではないか。言葉の意味は、繰り返し使うことで、使い方を通して、徐々に獲得されるものなのだから。

数学での語も、使用環境が変われば、使われている意味は変わる。数学記号にも、その処理の仕方についても同じことが言える。

マルとか、サンカクとか言い始めた幼児を見て、そんな風に思った。

むすびに

幼児は、外へ出るのが好きだ。先だっても親戚で、まだ、歩けない子を、ばばに預けた母親が、外へ出せば泣き止むからと言っているのを聞いた。あれ、この子も屋根のないところに連れ出されるのが好きなのか、と思った。

一昔も前のことになるが、眠りかけた子が、玄関に入ったら、また外に戻ろうとするのが異様で、わたしはこのことに初めて気付いたのだった。それまでは知らなかった。

たいていは、家でぬくぬくしている方がよくて、いつまでも、中に閉じこもっていたいのかと思っていた。いつの頃からか、そう思い込んでいた。と書きながら、それが、過去

を忘れての、単なる錯覚かもしれないと考えたりもするが、記憶が薄れ、衰えながら、働き盛りには見えなかったことが見えてきたということがあると思う。

母親になった主婦は、みな知ることかもしれないが、乳幼児というのは、生来外に出るのが好きらしい。歩けるようになって、外に出ると、小石や、小枝を拾った児が、いつの頃かそれは卒業して、2歳の誕生日が過ぎたら、サンカクと言えるようになっていた。

四の算用数字「4」を見つけると「サンカク」と言った。エレベータに乗れば、4階の4を指差して、「サンカク」と言った。

どこで聞いて、何から覚えたのか、文字の角張ったところがサンカクなのか、数字の線に囲まれた直角三角形を見て、サンカクと言っているのか。

数えられるようになって、「ひとつ、ふたつ、みっつ、よっつ、」を覚えて、その音声で「よっつ」の字と知ったら、4は三角ではなくなってしまうのだろう。

幼児の天性と学習熱心は、ドイツ語の著作も多数あるという作家のエッセイで、わたしの物理観、宇宙像に共鳴したくだりを思い出させた。下に、その箇所を引用する[2]。

「ディスカッションの中でいくつか面白いと思ったことがあった。一つは、空間という容器があってそこに物が入るわけではなくて、物の存在そのものが空間なのだ、と・・・というミュージシャンが言ったことだった。一つの音が演奏される、その音が生まれることによってすでに存在する空間を占めるのではなく、作る。ある考えが頭に浮かぶ、その考えもこの世に空間を作り出す。つまり、まず容器を作って、そこを後から満たそうというのではなく、言葉を生み出せば、その言葉そのものが空間となるということだ。」

音が空間を作る、音そのものが空間だ、という発言自体、わたしの物理観とは別に、おもしろく、心地良く響く。

言葉を口にするようになった幼児は、懸命に単語を口にし、何かを伝えようとする。単語らしい音声だが、わたしの耳ではわからない。母親へ伝わるようには伝わらない相手に、繰り返し言い張る。言い合いのキャッチボールにあくことなく頑張る。

幼児は、たいてい、新しい言葉は、目の前の物、今の事に結びつけて、教えられる。その声音を、他所で別の人が発するのを耳にする。

子の言語空間は広がり、広がりながら変形し続ける。空間はその子が作る、その子に特有のものである。

平面図形の平面も似たようなものに考えられないか。学習させられるのは図形である。子どもが書くのは図形であり、生徒が作図させられる図も形も、平面という容器があって、そこに書き入れるのではない。

いうまでもなく、図形を書くことは、「数学」のユークリッド空間 R^3 や、平面 R^2 に、入れたり乗せたりすることではない。図形を思い描くときも、そういう「数学」の、無限の平面を想像して描きはしない。

わたしは、まだ、幼児の外好きも知らなかった昔、中学教科書の編集会議に出て、「直線は、無限に延びたものとする」というのは止めたらどうだろうと発言したことがある。一

つには、「３つの直線で囲まれた直線図形が三角形」でいい、直線、半直線、線分と使い分けることなくみな直線、あるときは、線というだけでいいという考えからだった。その気持を、今ここでなら、「無限に延びたものとする」のは、「数学」が対象にしている平面、その平面の上の直線を説明していることになるから、と言える。

教科書では、平行を、交わらない２直線と「定義」するために、直線は「無限に延びたもの」としましょうと考えている。直線を図形とし、図形についての知識を豊かにするようには語っていない。

他方、中学生には難しいからと、「錯角が等しければ２直線は平行である」の証明を教えることも止めてしまって、直線や平行を何のために「定義」するかがわからなくなった。

ユークリッドの「原論」では、無限に延びた直線を想像しなくてもよい。同一の平面上にあって、いくら延長しても、互いに交わらない直線（線分）が平行なのである。

正方形の向かい合う辺は平行である。

幼児とあそんで、「原論」のわかりやすさを教えられる。青空の無限の果を想像しなくていい。外が好き、天井のある住まいに寝るのはもっと好き。昼に、くれよんで線を描き、机の上まで延ばしたら、母親に怒られる。線は延ばせるけど、紙の上だけにしなさい。

「原論」の記述は、どこか小学生の作文に似て、作図の作業を描写するように、見えたように書いていると感じることがある。命題文の文言にもそれを感じる。

それが著された古代に、「原論」の言葉を話した同時代の大人にとっても決してやさしく読める書でなかったことは判る。そして、三角形について等脚と等底角を区別して論述する内容は、哲学することのように、古代ギリシャが生んだ奇跡だと思うが、原始の素朴なわかりやすさが、古典として、「原論」が現代に読み継がれた大きな理由だとわたしは考える。生徒の学びを、発表からうかがい見て、あらためて、そう思った。

発表者・研究者・（授業者）についての記

§１．菊池久人

§２．菊池久人、水戸秀穂、湊三郎

§３．泉山久子・尾崎康弘、森川幾太郎

§４．柴田雅樹、佐藤志保（斉藤有希子）、森川幾太郎

§５．天沼和之・佐藤靖高（江口俊和）

§６．並木哲也

§７．板垣芳雄：（発表論文は、鳴門教育大学「学校数学研究」誌に、「ニュートン法とペル方程式」の続編として投稿を予定している。）

文献

[1] 王　敏：日中2000年の不理解 ― 異なる文化「基層」を探る、朝日新書、２００６.

[2] 多和田葉子：エクソフォニー ― 母語の外へ出る旅、岩波書店、２００３．P.146