東北数学教育学会年報 第39号 2008年3月31日

中学数学から高校数学への懸け橋

山形市立蔵王第二中学校
菊池　久人

1．はじめに

現行の学習指導要領には、中学数学において

$$1+2+3+\cdots\cdots+10=\frac{10(10+1)}{2}=55$$

のように、１からｎまでの自然数の和を一般化して求めることは含まれていない。この内容は高校数学の等差数列の和として扱われる。しかし、中学数学のいくつかの単元の学習から発展的に扱うことが可能な場合がある。学習指導要領の内容は教えるべき最低限のことという解釈ができる。したがって、高校数学へつながることならば、積極的に導く（気づかせる）べきであると考え、本実践に取り組んだ。

2．１からｎまでの自然数の和の求め方への発展について

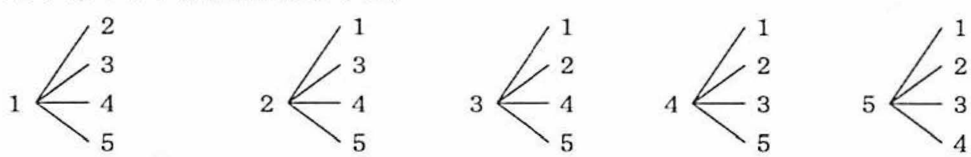
（１）組み合わせの樹形図より

> １，２，３，４，５の数が書かれた５枚のカードの中から、２枚取り出すとき、全部で何通りの取り出し方がありますか。

この問題を解くのに、以下のような樹形図を活用すると、

となり、これを数えて１０通りとなる。

では、次のような樹形図はどうか。



これは、１と２を取り出すことと、２と１を取り出すことは異なる場合と考えているからである。もし、この問題が下のようなものだったとしたら、この方法が正解となる。

> １，２，３，４，５の数が書かれた５枚のカードの中から、２枚取り出して並べ、２けたの数をつくるとき、全部で何通りの取り出し方がありますか。

前者のように、順序が関係ない場合を「組み合わせ」といい、後者のように、順序のちがいも関係する場合は「順列」という。

順列の場合、異なる5種類から2つ選ぶ全ての場合の数は、樹形図より、1～5の5つからそれぞれ4本の枝分かれがあるので、

$$5 \times 4 = 20$$

と計算して、20通りとなる。

ところが、組み合わせとなると、順列の場合のダブりを解消するために、半分にする必要がある。したがって、

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10$$

より、10通りになる。

組み合わせの樹形図をよく見ると、枝分かれの数が1つずつ減っているのがわかる。したがって、

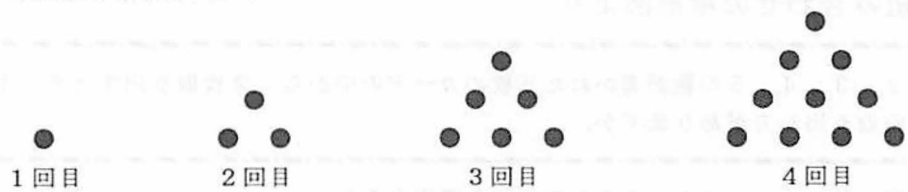
$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

が導かれる。

一般的に1からnまでの整数の和は

$$\frac{n\ (n+1)}{2}$$

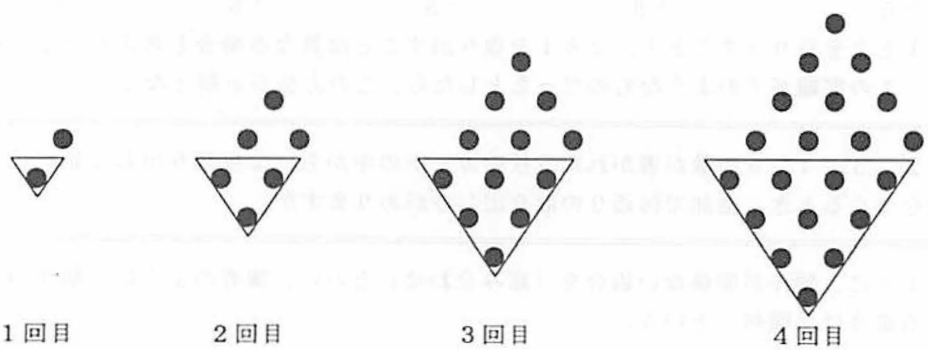
（2）関数的な見方より



碁石を上の図のように並べていく。n回目には碁石は何個必要かを考える。4回目までを表にまとめると下のようになる。

	1回目	2回目	3回目	4回目
碁石の数	1	3	6	10

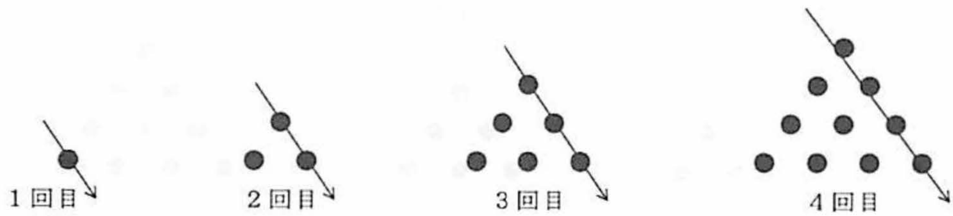
この表を見てもおそらくピンとこないだろう。ところが、下の図のように碁石の数を2倍にして並べると、平行四辺形が見えてくる。



1回目は1×2÷2＝1、2回目は2×3÷2＝2、3回目は3×4÷2＝6、そして4回目は4×5÷2＝10 となる。

これを一般化すると、n回目の場合は、右下がりにn個、右上がりに（n＋1）個並ぶので n×（n＋1）÷2となり、 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個となる。

この碁石並べについて、もう少し発展させたいと思う。斜めに見ていくと、碁石は回を重ねる毎、1個、2個、3個、4個・・・と増えていく。



すなわち、
1回目は　1
2回目は　1＋2＝3
3回目は　1＋2＋3＝6
4回目は　1＋2＋3＋4＝10
・・・・・・・・・・・・・・・・
となり、n回目の場合を一般化した式より

n回目では　$1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

となり、整数1からnまでの和が $\dfrac{n(n+1)}{2}$ となることがわかる。

3．授業実践より

（1）組み合わせの樹形図

①樹形図を作って問題を解く。

> 1，2，3，4，5の数が書かれた5枚のカードの中から、2枚取り出すとき、全部で何通りの取り出し方がありますか。

②計算式を導く。

順列の場合と比較させながら、ダブりを解消するために、2で割ることに気づかせる。

③樹形図を見て、気づいたことを発表する。

> 予想される生徒の反応
> ・枝分かれの数が一つずつ減っている。

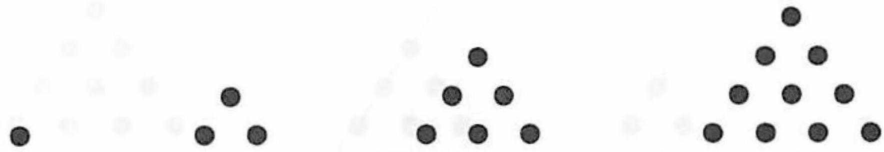
④ $1+2+3+4+5=\dfrac{5\times 4}{2}$ を導く。

⑤公式　$1+2+3+\cdot\cdot\cdot\cdot n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ を導く。

⑥公式を使って、問題を解く。
例：１から１００までの整数の和を求めなさい。

（２）関数的な見方
以下のような学習プリントを使用。

１＋２＋・・・・＋１００を簡単に求める方法

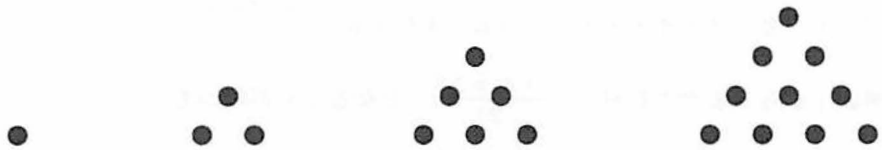


１回目　２回目　３回目　４回目

碁石を上の図のように並べていく。χ回目には碁石は何個必要かを考える。４回目までを表にまとめると下のようになる。

	１回目	２回目	３回目	４回目
碁石の数				

【考え方】１回目　２回目　３回目　４回目



１回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿
２回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿ ⇐
３回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿ ⇐
４回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿ ⇐
χ回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿ ⇐
１００回目 ＿＿＿＿＿＿＿＿ ⇐

一般に、１からｘまでの自然数の和は ＿＿＿＿＿＿ となる。

$\boxed{1}$　１から２００までの自然数の和を求めなさい。

4．成果と課題

（１）組み合わせの樹形図

「確率」の単元においては、全ての場合の数を求める際に、樹形図の他に計算によって求めることができることを生徒たちの気づきから導いてきた。例えば、次のような問題では、それぞれ以下のような解き方を導かせている。

１、２、３の３つの数字を使って、３桁の整数を作りたい。同じ数字は使わないものとすると、全部で何通り作ることができるか。　**3×2=6**　**<u>6通り</u>**

１、２、３の３つの数字を使って、３桁の整数を作りたい。同じ数字を何回使ってもよいものとすると、全部で何通り作ることができるか。　**3×3×3=27**　**<u>27通り</u>**

１，２，３，４のカードから１枚、５，６のカードから１枚ずつ引くとき、ひき方は全部で何通りありますか。　**4×2=8**　**<u>8通り</u>**

３枚の硬貨を同時に投げるとき、全ての場合の数を求めなさい。　**2×2×2=8**　**<u>8通り</u>**

全ての場合の数の求め方として、その数が大きくなる場合は樹形図を書いて数える方法では限界がある。中学数学の範囲では樹形図を書いて求められるものであるが、高校数学を考えると、形式的な操作で求められる方法を知ることにより、「確率」の学習が広がっていく。

本実践に関する生徒の感想に「１から１００までをたすのはすごく時間がかかるし、面倒だ。この公式を使えば、すぐに求めることができるので、便利だと思う。樹形図からこのような公式ができるなんてすごいと思った。」とあり、有用性は十分感じとっていたようだ。

また、「最初はちょっと難しいと思ったけど、どんなに大きな数でも、この公式を使えば簡単に和が出るので楽だなと思った。考え方は難しいけど、式は簡単なので使えるなと思った。」と感想にあるように、公式を導くところにやや抵抗を感じているようなので、例をもう１つ加えることにより、理解しやすくできるものと思われる。

「確率」の単元は二年の最後に配置することが多いため、残り授業時数との兼ね合いで、駆け足で進んでしまう傾向にある。本実践のように、高校数学とつながりを大事にしたいのなら、その前の単元までの進度を調整し、最後の「確率」に十分な時間を確保すべきである。

（２）関数的な見方

本実践は初めは、中３の二次方程式の応用における発展として扱っていくつもりだったが、中一の「文字の式」の発展としても十分扱えることがわかった。

１から１００までの自然数の和を求める問題は、以前放映されたテレビ番組等の知識で、その解き方を知っていた。この問題を提示した直後に、「この問題の答は知っている」と言わんばかりの顔で、その答である５０５０をいい当てた。もちろん、考え方は１＋１００＝１０１，２＋９９＝１０１、３＋９８＝１０１、・・・・より、１０１×５０＝５０５０である。とこ

ろが、この考え方が適用できるのは、偶数までの和に限られる。

本実践後にとったアンケートより、「三角形を二つ合わせると平行四辺形になることが今日の授業でわかった。」「こんな簡単なやり方があるなんて知らなかった。これからはこの方法を使って計算してみたい。この方法の他に、何かないのかなあと思った。もっと調べてみたいです。」「やりやすい求め方がわかってよかった。とても楽しかったです。」などがあり、「確率」のところで発展させるよりも、視覚に訴える本実践の方が理解がスムーズにいくものと思われる。

Bridge between mathmatics of junior highschool and mathmatics of senior highschool

KIKUCHI,Hisato Zao 2nd Junior highschool

In the preaent national curriculum, we don't teach the generalization of the sum of natural number from 1 to n in junior highschool mathematics. But I'll suggest it is possible to develop from tree map or stone arrangement to the way of solving it.