数学カリキュラムの原図を求め、幾何、代数、三角法の輪郭を描く
（二次方程式の幾何問題を面積変形で解くことを教える）

板垣芳雄
（宮城教育大学名誉教授）

概要：二次方程式を指導する前に、二次方程式の応用の節で扱われているような面積の問題について素朴幾何の解法を教えることにすると、生徒の考え所が豊かに展開する指導課程が生まれる。諸関係を文字記号の式や方程式から教えては、それらを抽象の高みから平板の並びで見ることになる。面積の問題を幾何学的量の関係のままに見据えることで、論証幾何の特異性がはっきりし、三角法の内容を教材論として特徴づけることができる。

キーワード：連立一次方程式、幾何学的量、面積変形、ユークリッド原論、三角法

学生が「ダイキ」と話すのを耳にしたとき、「代数・幾何」のことと分るのに時間がかかった。なるほど「代・幾」ね。この名が口にされるようになる前から、幾何の証明は全国の高校で教えられなくなった。「集合」や「関数」の語が大手を振っている向こうにかすんで、幾何や代数の姿がはっきりしなくなった。解析幾何の形は幾何と代数を別々に学んでこそ分る。「代・幾」は解析幾何もどきのことにされて、その上に、この科目には平面ベクトルや一次変換などが盛り込まれた。算数に素朴に連結する計算や、論理の筋道を綴る作業はそこにはない。二次方程式についての因数分解、解の公式、因数定理などの相互間にあるはずの物語の筋は消えて、それぞれが中学数学や「数学Ⅰ」の項目になった。かくて、基礎基本に帰ろうと「ダイキ」をなくした後も、学びの上で生徒に重いものであった連立一次方程式の計算や二次方程式の解法の、その重みは教師に見え難くなったままである。

§1．はじめに

本学会の研究会で発表した「和算家の平方根の計算術（和算の記述様式で、論証志向の提示を照らし、計算主体の発見学習を夢見る）」では、わが国の教育史に係わることを論考している[5]。そこでは、実数論を基礎にする、論証志向で組み立てた微分積分学が高校の数学にも浸透し、指導要領の型にされている、好ましからざる模様を分析した。

理論展開の基礎にとられる概念は、高級理論の都合からの、あるいは数学研究の必然と

してのもので、微分積分の学でなく微分積分法を身に付けようとする学習者の心理に配慮して選ばれたものではない。厳密展開の基礎にされる実数の形は、素朴でもなければ、原始の数の影を映し出してもいない。

実数を構成する「数」は、個数を声に出してかぞえる操作で育まれた整数を核に構成され、また、「量」の大きさを測る作業と緊密に結びつく。

論文「数学教科の変容を描き、数学授業の時代変化を読む」[1]では、代数の二次方程式に立式される前の、面積関係についての問題を掲げ、その図形的解法を記して、併せて、「量」と抽象の「数」とを教材論では峻別すべきものとし、量と数の形態を描いたつもりである。

この稿は、そこで描き切れなかったことを補おうとしている。補うとはいっても続きではなく、二次方程式の解の計算にまつわる授業案を中心とするが、授業案のかたちにして提示するのは表題にしたテーマに導く論述の方便で、幾何と代数の意味を吟味し、望ましい教科内容としてのそれぞれの位置を見定めることを試みる。いずれについても前の稿とは独立したものとして読むことができると思う。

代数式以前に、具体の「量」の問題から考えさせると、二次方程式の「解と係数の関係」は、問題解決法として生徒の前に姿を現す。それによって、二次式の諸関係を平板に式の関係式として書き出して発見でも意外でもないものに提示している目下の記述法には、物語性の欠落していることに気付く。

生徒を観客とする授業の演出は、数学の真実とは別の土俵で考えねばならない。

指導要領の提示は問題解決を核としたものではなくなった。戦後にはまだ教えられていた問題解決に伴う用語が衰退して行き、教科書から消えたことを、数学の変化として観察し読み直すことは、文脈を作る数学教科の変容を描くための作業になると考えている。

§2. 鶴亀算：頭をひねる

前置き抜きで、鶴亀算と呼ぶ型の問題を掲げる。教科教育上での代数の輪郭を描くのが目的である。

「鶴と亀と合わせて頭数が３、鶴と亀の足は全部で８本だという。鶴は何羽、亀は何匹いるか」

数学科教育法を論じたなかで、この種の問題を例にして算術的な考え方を示したものに出会う。欧文のものにも鶴と亀ではないが、同じ型の問題がある。解き方は多様である。わたし自身、講演・論文・その他で聞いたり読んだりが１０回以上あると思う。そこでは、論じる人のこの種の問題についてのイメージがうかがわれ、あるときは、そこに数学観まで現れていると思うことがある。

ある教育課程論では、代数の解き方と対比して議論している。

（鶴、亀）の数を（m, n）とすれば、m, n について連立一次方程式になる。

$$m+n=3$$
$$2m+4n=8$$

いったん、式にすれば、機械的に解ける。代数の威力を示して余りある。右辺、定数項の（頭、足）が（3, 8）でなく、(3, 10) でも (3, 12) でも、同じように解ける。(3, 7) についても (4, 8)、(4, 7) についても、同じように答の（m, n）が出せる。

だが、代数的に解いて答を得たという認識と、(3, 8) について算術的に答がわかったという感覚は同じではない。「3頭全部が鶴ならば足は6本で、8本に2本足りない。」ということは、と考えるのは、小学生にもできる。小学生なら、(4, 7) はありえないと答えるであろう。

鶴亀算は、算数らしい問題、算数らしく解くことが可能な問題の代表である。文字式について知らなくても、問題はわかる。国語を勉強していれば、問題文を理解することができる。

そして、上の問題については、どの生徒も、答の（鶴、亀）が（2, 1）になることを納得することができる。鶴は2羽、亀は1匹である。

（頭、足）が（3, 8）ではなく、もっと大きい数の問題にして出題する方が、問題との取り組みが印象深く記憶されていいだろうが、そこは、今は考えていない。

そういうことの前に、(3, 6) や (3, 12) は問題らしくないから、避ける。

ところで、算数6年教科書で、りんごとみかんのそれぞれについて一個当たりの値段を与え、全体の個数と値段を問う問題を掲げたのがあった。そこでは、個数の組み合わせ全てについて値段を調べれば答に至ることをヒントにしていた。上に掲げた（鶴、亀）の場合なら、(0, 3)、(1, 2)、(2, 1)、(3, 0) の全てについて足の数は順に、１２，１０，８，６と計算するのである。

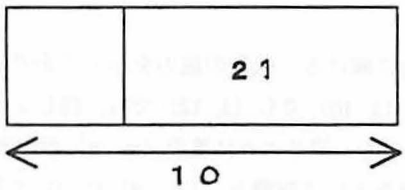
これは、算数の解き方らしくなく、代数式 $m+n=3, 2m+4n=8$ を、なめらかに教えようとする意図がみえみえだ、と今は思っている。

ともあれ、解き方の見当はつかなくても問題はちゃんとわかる。よくわかって後々までも忘れない。そうなれば、中学に進んで連立一次方程式を立て代数的に見事に答を出すことができたことも忘れられない。と、そのように、授業が演出されるようだったらいいのだがと考える人に出会う。わたしも同じように考える。

§３．分配法則：面積関係から

面積の問題であるが、２次方程式を立てて因数分解すれば答を出すことができる。だが、方程式についてはまだ知らなくても、頭をひねって考え、先生のヒントに助けられて答に至ることができる。鶴亀算に対し、こちらの問題は西洋・中東の古代に現れる。

「図の長方形は、横が１０で、正方形と面積が２１の長方形とからなる。縦の長さを問う。」



「縦と横の和が１０で、面積が２１の長方形の縦、横の長さを問う。」としても、未知数について同じ２次方程式が立つ。だが、代数式にすれば移り合って同じでも、図形問題としては別で、考え方、解き方も違ってくる。

上の問題で授業した場合の内容展開の筋は、次節で考えることにして、ここでは、文字・記号式の抽象性を、小学生にも明瞭な面積図や、そこの数値にこだわりながら、あぶり出しておく。もちろん、上の数値は、長さは１０ｃｍ、面積は２１ｃｍ^{2}のように、小学生には、測定単位の名のついたものである。

「鶴は何羽、亀は何匹」のように、未知数にも名がついていて、無名数ではない。

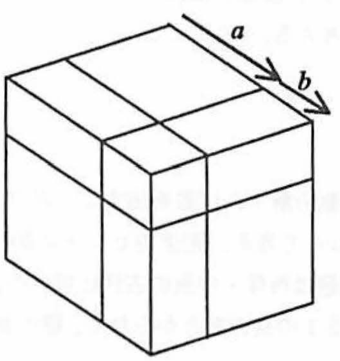
さて、中学で、展開式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$を習う。教科書には、この関係を面積図としたものが載せてあった。

これは、等式を図解したものであろうか。または、等式がこの図からよく理解できるだろうと言いたいのであろうか。どちらなのかは判然としない。

図を掲げる前に、文字式のこととして、等式は分配法則によって導いている。分配法則はというと、数の算術で説得したりする。

どこかに引っかかるような気持が、わたしにはずっとあった。

論文「数学教科の変容を描き、数学授業の時代変化を読む」[1)]に記したことで、式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$の出る授業を「参観」して、内容を分析するうちに気付いたのであるが、体積のこととしてなら、この式の関係は小学生にも分る。



前記の、教科書の面積図の場合も同じで、線分が a,b と２分されたとき、全体 $a+b$ の上の正方形の面積は、２つの部分 a,b それぞれの上の正方形の面積と、２つの部分によって囲まれた長方形の面積の２倍の和に等しい。

その関係が２つの文字の抽象数 a,b についての計算で導かれる。抽象数についての分配法則が、面積関係によって、正等なものとしてより強く意識される。

そういう話になるのだと思う。

面積図は、展開式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の「例」ではない。ましてや、この代数等式の応用例ではない。

数学原理からも、学習心理からも、実数 a,b より、量としての a,b は素朴に把握される。

ここは、負の数も対象にする教育課程を尺度にして考えては分らない。

このように考えて、わたしの気持の引っかかりは、消えたように思う。

そして、量 a,b の「積」記号を面積とすることと、２実数 a,b の「掛け算」計算 $a\times b$ との認知心理上の齟齬が、カリキュラム上おろそかにできない課題として抽出される。

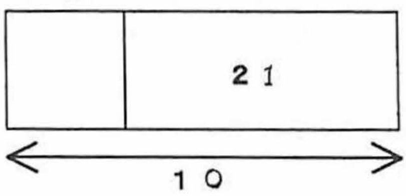
次元に係わる部分にも似たような迷い所がある。面積 A, B の正方形の辺は $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ であり、それら２つを辺とする長方形の面積は $\sqrt{A}\times\sqrt{B}$ である。しかし、面積 A, B は掛けられない、A, B の積というのはない。B の α 倍についてなら、αB があり、$\sqrt{\alpha B}=\sqrt{\alpha}\times\sqrt{B}$ である。

しかし、線分の比として無理数や α 倍は教えていない。平方根の図形イメージを指導上どう設定するかは、難しい問題だと思う。ここも教育課程論の課題になる。

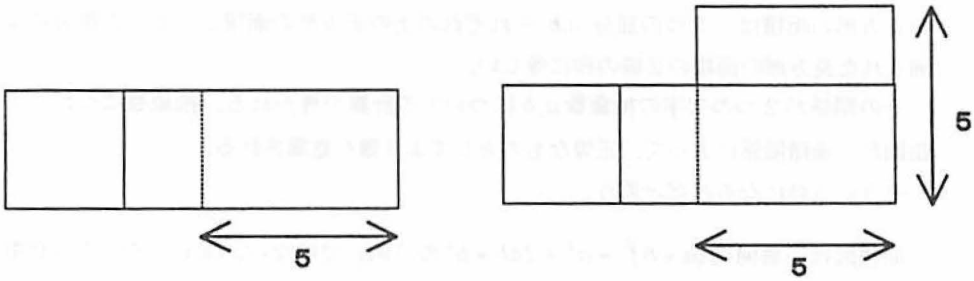
§４．二次方程式：生徒に問題を作らす

前の節に記した問題を掲げて始める授業について考える。文字記号にするのはこの授業の後であり、そこで方程式に書くときも x^2 としないで、$x\times x$ でいいし、その後、係数を文字で書くときも、$xx+b=ax$ でいい。要は、方程式は教えるが、「２次」の語は使わなくていいことの喩えである。

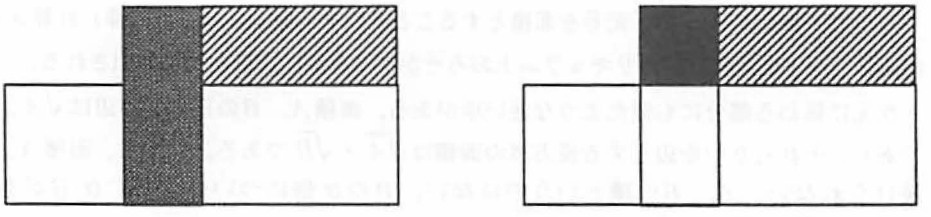
「図の長方形は、横が１０で、正方形と面積が２１の長方形とからなる。縦の長さを問う。」



長方形を等分する線を引き、それを延長して、辺が５の正方形を書く。



図の斜線の２つの長方形は合同になり、２つが接する角（かど）は正方形である。



したがって、その小正方形と面積２１の長方形を加えたのは、先の図の、辺が５の正方形に等しい。計算式にすれば、小正方形＋２１＝５×５で、小正方形の面積は２５－２１＝４＝２×２で、その辺の長さは２とわかる。

これより、問われている縦の長さは、５－２＝３と知る。

以上のことが、学習された後、次のような生徒の演習が主体の指導が続く。

①　（長さ、面積）の（１０、２１）を、（１０、１６）とした問題で、上のように解かせる。（１０，２４）とした問題について答えさす。

ここでも、また次でも、平方・平方根表を使わせる。

②　逆に、（長さ、面積）を与える問題を生徒各自に作らせる。生徒の作った問題を、黒板上に書き上げる。与える（長さ、面積）ごとにその問題の答も添えて一覧表にする。

③　（長さ、面積）を (a, b) と書けば、小正方形の辺はどう書かれるか、問題の答はどう書かれるかと問う。

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\quad ,\quad \frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$$

④　問題を２次方程式に書く。$xx+b=ax$

以上の①〜④は、生徒の学びについて知るために試したい、一つの素案の、全くの粗筋であるが、あらかじめそうは断らなくても、②では、自然の成り行きで、生徒は解が自然数の問題を探すであろう。また、解から問題の（a, b）を作るという発想は、この段階では生まれ難いと思われる。

そこが面白い。この論考の発見だと考える。代数方程式を教えるという目下の、まず x について２次の式、次に方程式と書いて進める方式では、因数分解、解と係数の関係、解の公式、の印象は平板に並んでいる。そして、なぜか因数分解がもっぱら整数の範囲で演習され、解と係数の関係は問題解決とは無縁に導き出している。

それが、素朴幾何の、二次方程式に至る問題を取り上げることで、学ばれることの並びが平板でないものに変わる。

なお、上では、小さい解のみを取り上げたが、大きい解を図形変形で解くことを授業の課題にすることも考えられる。「数学教科の変容を描き、数学授業の時代変化を読む」[1]には、そちらの方をより詳しく説明しておいた。

繰り返すが、上では二次方程式という言葉は要らないし、授業では使わない。この論文の副題で、二次方程式の幾何問題と代数のいい方をするのも、現代語による喩えで、生徒に話すのではない。ちょうど、児童には鶴亀算を連立一次方程式の算術問題と言って教えないように。

古代メソポタミヤでは、方程式を立てれば、① $xx+ax=b$，② $xx=ax+b$，の型になる幾何問題も解いていた。数値（a, b）は（長さ、面積）であり、いずれも、正の解が１つである。授業案の③ $xx+b=ax$ は正の解（答の長さ）が２つある。

①の図形的解法を教材とした実践研究があり[2]、その論文で、素朴幾何（Naive Geometry）の語を使用している歴史研究が参照されている[1]。

§５．幾何学的代数：「原論」の第Ⅱ巻

ユークリッドの「原論」第Ⅱ巻に命題５として、前節に掲げた面積変形の図とそっくりなのが載っている。正確には、少し違っていて、正方形は左でなく右にして、斜線の図２つは、ともに、長方形を２等分する縦の線の右に書かれている。上下も逆。

その方が、小正方形＋２１＝５×５となることを説明し易いようにも思われる。われわれの§３からの問題を「長方形は、横が a で、正方形と面積が b の長方形とからなる」とすると、求める縦の長さを x として、代数の式にして書けば、小正方形の辺は、

$\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$ で、　問題は $xx+b=ax$ 、結果の関係は $\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ となる。

前節の図は、「アル・ジャブルの書」（８３０年）の１４世紀写本によるが、実は、それに左右対称な図に変更してある[2]。ともあれ、その図にそっくりなのが「原論」に載って

いるのである[3]。そういうことから、「アル・ジャブルの書」はメソポタミヤで生まれているが、古代ギリシャの遺産を引き継いでいるといわれる。だが、二次方程式は、4000年前に古代バビロニア（メソポタミヤ）で、解かれていた[4]。ギリシャの遺産という前に、古代メソポタミヤのテキストが、ユークリッドによって、また、それより前のアレキサンドリアでも、読まれていたことを思うべきであろう。それが、「原論」Ⅱ巻の素材になった。

それを古典学者の考証が肯定しているかどうか詳しいことは知らない。でも、そのように歴史変化をとらえると、数学思潮の流れとしてよく分る。学習段階と内容のレベルの進展、展開によく見合う。

古代メソポタミヤでは、二次方程式を解いた。ただし、「二次」は面積で「方形」の「平方」であり、素朴幾何の問題としてであった。

辺や面積は数値で書いているが、解法は一般的である。

「原論」Ⅱ巻は、命題５で、上記の二次方程式が立つ面積図に対し、結果の面積関係を作図し、証明しているのである。

命題４では、$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$を「証明」している。

命題５でなく、こちらの方の命題の日本語訳を読んでおこう。

「もし線分が任意に２分されるならば、全体の上の正方形は、二つの部分の上の正方形と、二つの部分によってかこまれた矩形の２倍との和に等しい。」

その「証明」には、Ⅰ巻で証明の「二等辺三角形の底角は等しい」、その逆、「錯角が等しければ２直線は平行である」、平行線の作図、正方形の作図、その他が用いられる。

平行線の公理を、公理としていることになる。

それが、論証の幾何学である。

§６．論証の幾何と、測量の三角法

幾何に対する代数の基本イメージは方程式である。実世界の問題との結びつきで、幾何や代数の輪郭を描いてこそ教科内容の議論を実のあるものにする。だが、実世界の問題といってみても結びつきはあいまいなままである。実物や現実を扱かった問題と言い換えてみてもあまりかわらない。伝統の問題がそうであるように、数学の記号ではなく日本語文で書かれて現に在る問題と考えればいいと思う。

だから、方程式は実の問題ではなく、実の問題を解くときの手段であったり、解く方法である。スポーツ記事の「勝利の方程式」がそういう意味で使われているようなのはなかなかおもしろいと思う。

上で取り上げた面積の問題は、未知数の縦の長さについて$xx+21=10x$となる。未知数を空欄の四角に書いて、提示することもできる。そうやって、四角に入る数字を探しまし

ょうと言えば、小学生でも探せる。答の3を得ることができる。7も見つけられる。

先に、鶴亀算で似たような探し方をするのを、算数の解き方らしくなく面白くないと評した。面積の問題についても方程式にして整数解を探す問題にしては面白くない。問題の文章から分離して、因数分解の反復練習に組み込まれるようなものにしてしまう。

ともあれ、個数を問う算術の問題は、代数の連立一次方程式に連関し、素朴幾何の問題は、代数の二次方程式に歴史的に、また数学教材としても親密に連関する。

連関の形は、問題を安易に文字式にしては、見えなくなってしまう。それを、別の実例によって示そう。

そう言いながらやむを得ず方程式を伝達手段の目印に使うが、$xx+b=ax$の答を導く面積変形の命題が「原論」II巻の命題5にあると記した。そこに述べられた面積関係は、代数記号で、次のように要約される。

$\left(\dfrac{a+b}{2}-b\right)^2+ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. こうされては、問題との関連は見えなくなってしまう。

命題5では、線分が不等な部分a,bに分けられたならば、として、面積関係を式にしている。線分$a+b,b,a$それぞれを、問題の$a,x,a-x$にすれば、面積abは問題では与えられたb（21）として、命題5の要約式は前節に書いた結果の関係式になっている。

文字式に表せば、文脈の変わることは、次のようなところにも見られる。II巻の命題1は、$a(b+c+d+.....)=ab+ac+ad+.....$　と要約される。われわれの知識では、これは分配法則を表し、分配法則からは、命題4や命題5の式が導かれる。しかし、それでは「原論」の証明にならない。

論証の幾何の話に戻る。

「二等辺三角形の底角は等しい」、「三角形の外角は内対角の和に等しい」を証明するのが論証の幾何であり、それは、「原論」第I巻に盛られていて、今日も学校で教えられている。あるときは、「三角形の内角の和が2直角である」は、紙三角形の角を3つにちぎって並べる実験や、分度器の測定で調べただけでは厳密でないと説いて「証明」が教えられる。

第III巻の「円」の内容も、「証明」の文脈で教えられてきた。だが、第II巻の「面積の変形」は、いわゆる余弦定理を含め、学校数学で論証の幾何の内容とされてはいない。

今日、学校で教えている二次方程式の導入問題にもならない。

さて、教科内容としての三角法の輪郭を描く準備が整ったように思う。

論証の幾何と別のところに、直角三角形の直感の系譜として、それは位置させられる。二等辺三角形や平方四辺形より身近に見慣れている正方形、長方形の並びである。4つの角は全て直角で、対角線で2分して得られるのが直角三角形。直角三角形の、直角でない2角は余角を成す。

これらのことに「証明」は不要である。論証しないで十分にわかる。論証幾何のことは

気にしないで学習することができる。というより、三角法で解決法を勉強する「問題」は、論証幾何と別のところにある。

三角法は、測量作業、あるいは測量もどきの身体の運動記憶を実の世界とする。

三角関数（円関数）の傘下に入れられるような、純数学の内容にはさせられない。

かくのように、この論稿の最後に三角法のことを描いてみると、その輪郭を作ることは、指導要目を並べて出来ることではないことを改めて思い知る。

辺が a,b の長方形の面積は、a 掛ける b であるというときの、a,b や $a \times b$ は、測定値の小数イメージから、健全に形成されるのではないかと考える。

「三角法」の現実感が実数イメージを作る。対数表を使う算術計算で実数は「量」のイメージを超えて行く。正の数・負の数の四則学習の有り難味が感じられることは、あっても、その感じは場所ごとに違う。

§7．むすびに

「数学教科の変容を描き，数学授業の時代変化を読む」[1] はある社会学者の思い出の記に触発されて書いたものである。著者は大正１２年生まれ、数学にも数学教育にも素人である。書名は「軍国少年の歩んだ道」で、そのときどきの出来事に付随してではあるが、何箇所かで数学の勉強のことが鮮明に語られている。少年は旧制中学校で優等生であった。少年には、代数と幾何とは学びの違う内容として判然としていた。数学は地域のエリートの共通科目として学ばれ、それで鍛えられ、旧制高等学校の学生の素養となったことが「歩んだ道」からうかがわれる。

現今、大学生もエリートでなくなって、数学は鍛錬の科目の座から引きずり下ろされつつある。

工学部で、新入生のために数学を復習する内容の講義をするようになって、わたし自身、そのテキストで高校の数学を勉強し、概観する機会になった。大教室のその講義では、学生が二次方程式の因数分解に取り組む姿勢に戸惑い、計算力を測りかねたりした。

なるほど、解の公式は唱えて暗唱するものになっていると思った。代数が学びの土俵として判然としていたときの簡明さが今の数学にはなくなっている。

さて、「数学教科の変容を描き，数学授業の時代変化を読む」[1] は、わたしが高校時代に「幾何」を習った先生に送ったところ、丁寧なお手紙を頂くことになった。そこには先生ご自身の和算研究の近況も記されてあった。「戦国少年」と同時代人として数学科目に触れた部分もあり、そこを引用して、拙論をむすぶことにする。

「（中学校の）授業の思い出としては、漢文の授業の始めに、前の時間に指定された当日教材の漢文の数行を暗唱させることでした。（中略）意味の理解はずっと後になるでしょうが、記憶力の強い若年期に有意義な学習方法と思われます。数学では代数と幾何が主体で、幾何は証明が主で、計算のはいる問題は融合問題と呼ばれ主流ではなかった。座標

の使う問題は紹介程度であったと思います。一年で算術、五年で三角（法）、立体幾何が入っていた。」

エピローグ：米沢富美子「人物で語る物理入門（上）、岩波新書、２００５.」から。

「私は大学で二十年間、電磁気学の講義をしました。理工学部の一年生に、マクスウェルの電磁気学を毎年一年間かけて教えるのです。講義では、たくさんの数式を使って説明をしましたが、マクスウェルの電磁気の体系が、うっとりするくらい「美しい」数学で構成されていることに、毎年のように感激しました。世の中には「美しい数学」がいくつもあります。しかし、実際に起こっている自然現象を、これほど完璧で見事な数学の言葉で表現した例は、あまり多くはありません。マクスウェルの方程式については、ボルツマンがゲーテの言葉を借りて、「こんな符牒を記したのは神ではあるまいか」と述べています。」

ジェームズ・C・マクスウェル（１８３１～１８７９）が学んだ数学には、ベクトル空間も行列も集合という言葉もなかった。「人物で語る物理入門」に紹介されていることであるが、彼が最初に書いた論文は少年のときで「卵形線の作図法」であった。

参照文献

[1] Luis Radford and George Guérette. Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach, *Using History to Teach mathematics, edit.Victor Katz,* MAA Notes 51, 69~75, 2000.

[2] E.ハイラー／G.ワナー，蟹江幸博訳：解析教程・上，シュプランガー・フェアラーク東京，1997.

[3] 中村幸四郎，他訳：ユークリッド原論，共立出版，1971.

[4] Boyer, Carl B.: Merzbach, Uta C., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1989

[5] 板垣芳雄：和算家の平方根の計算術（和算の記述様式で，論証志向の提示を照らし，計算主体の発見学習を夢見る），鳴門教育大学「学校数学研究」，Vol.15,No.1,5~25, 2007.

註

1) 数学教科の変容を描き，数学授業の時代変化を読む　―計算し，作図し，頭をひねり，後々までも思い出す学習は，昔の教科書に埋れたままか―　（他誌に投稿を予定している。）

2) 「縦と横の和が２０で、面積が９６の長方形の縦・横の長さを問う。」

「横が１０の長方形に、縦が同じの正方形が横に並んで、全体の面積は３９である。縦の長さを問う。」

これらの素朴幾何の解決法を教材にしている。

Characterizing the relations of algebra-geometry-trigonometry by historical problems of second degree equations: Teach area-exchanging solutions of quadratic equations before introducing symbolic expressions

ITAGAKI Yoshio
(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

Various aspects of quadratic equation are taught mainly with quadratic expression in a variable x. By changing the expressions we teach factorization, solution formula, discriminant, and other relational formulae. In this article, the author proposes to teach in classes area-exchanging solutions of quadratic equations by naive geometry, in which many relations such as solution formula and the coefficient formulae of roots would be learned through problem-solving by students themselves. This approach to symbol manipulation and arithmetic approaches enable to made pedagogical comments on the differences between algebra, geometry, and trigonometry.

Keywords: simultaneous linear equations, geometric magnitudes, naive geometry, Euclid's Element, trigonometry