東北数学教育学会 年報第40号 2009年3月31日

「折り重ね切り問題」の教材化についての一考察

大澤弘典
山形大学地域教育文化学部

要約

「折り重ね切り問題」の中学校および小学校における関数教材としての有効性を考察した。最初に,「折り重ね切り問題」にどのような関数的な関係が内在しているかを考察した。次に，それらの関数的な関係を児童生徒がいかに数学的に捉えられるか，それぞれの関数的関係について吟味した。以上の考察を通して，次の(1)～(3)ことが分かった。(1)「折り重ね切り問題」には様々な関数的な関係が内在している。また，それらの関数関係には未学習の f(n)＝2ⁿ＋1等を含むが，対応表等を注視することにより，児童生徒はそれらの関数関係を見出しうる。(2)「折り重ね切り問題」に内在する様々な関数的な関係を数学的に捉えたり証明したりする際，深く柔軟な数学的な見方や考え方が必要となる。そこでは，数式や図を用いた表現・処理や解釈・読みなど，豊かな数学的活動が伴う。(3)「折り重ね切り問題」の教材化は，中学校や小学校における関数指導の教材として少なからず有効であり，教員自身の数学的な活動を促進し資質を高める価値も保有する。

キーワード：折り重ね切り，教材，関数

1．研究の目的と方法

(1) 研究の目的

本研究の目的は,「折り重ね切り問題」の教材としての有効性を検討することにある。ここでいう「折り重ね切り問題」とは,「帯状の紙を何回か折り重ねて(谷折りを繰り返して)切り分けるとき，何枚の紙に分けられるか」という問題である(図1)。折り重ねの回数が1・2回程度ならば実際に切り分けて答えを求められるが，折り重ねの回数が多い場合は数学的に一般化して捉えなければならない。「折り重ね切り問題」は，これまで先進的な授業等で教材として取り上げられている(例えば，坪田,2008)。しかしながら，それらの試行では幾つかの数学的な関係や規則の発見に留まる場合が多く，数学的な捉えや証明を積極的に取り扱う授業の検討が望まれる。

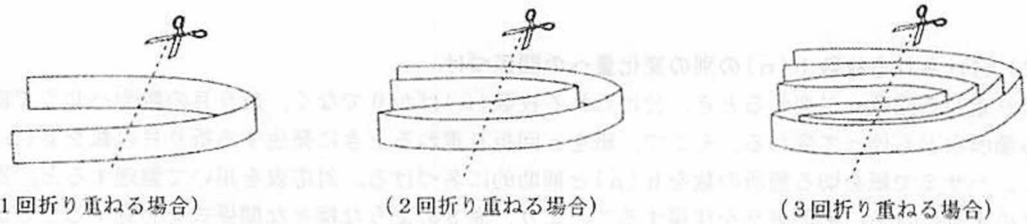


図1：折り重ね切り問題

(2) 研究の方法

本研究の方法としては，最初に,「折り重ね切り問題」にどのような数学的な関係や規則(主に関数的な関係)が内在しているかを考察する。次に，それらの関数的な関係を児童生徒がいかに数学的に捉えられるか，それぞれの関数的な関係について吟味する。以上の考察を通して,「折り重ね切り問題」の教材としての有効性を検討する。

2．「折り重ね切り問題」に内在する関数的な関係の発見

（1）分けられる枚数 f（n）の変化量への着目

ここでは，「折り重ね切り問題」にどのような数学的な関係や規則が内在しているのか考察する。折り重ねる回数nと分けられる枚数 f（n）の関係を対応表で整理すれば，次の表1のようになる。

表1：「折り重ね切り問題」の対応表例

折り重ねる回数：　n	1	2	3	4	5	6	…
分けられる枚数：f（n）	3	5	9	17	33	65	…

表1で，nに伴って変わる枚数 f（n）の変化量等に注目すれば，$f(1)\times 2-1=5=f(2)$，$f(2)\times 2-1=9=f(3)$，$f(3)\times 2-1=17=f(4)$，$f(4)\times 2-1=33=f(5)$，…であり，一般に $f(n)\times 2-1=f(n+1)$ といった関係式を予想できる。最終的には，分けられる枚数 f（n）は折り重ねる回数nの関数として，$f(n)=2^n+1$ と一般化できる。また，f（n）の階差に注目すれば，$f(n+1)-f(n)=2^n$ を見出すことが可能であり，次のように f（n）を捉えることもできる。

分けられる枚数：$3 \xrightarrow[+2]{} 5 \xrightarrow[+4\ (=2^2)]{} 9 \xrightarrow[+8\ (=2^3)]{} 17 \xrightarrow[+16\ (=2^4)]{} 33\cdots$

$$\cancel{f(2)}-f(1)=2$$
$$\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}=4\quad(=2^2)$$
$$\cancel{f(4)}-\cancel{f(3)}=8\quad(=2^3)$$
$$\cdots$$
$$f(n)-\cancel{f(n-1)}=2^{n-1}$$

両辺をそれぞれ足すと，

$$\left.\begin{aligned} f(n)-3&=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\\ f(n)&=3+\underline{2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}}\\ f(n)&=3+\underline{2^n-2} \end{aligned}\right\}*)$$

*)
$$a=\underline{2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}}\cdots①$$
$$2a=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n\cdots②$$
②−①より，
$$a=\underline{2^n-2}$$

したがって，

$$f(n)=2^n+1$$

（2）分けられる枚数 f（n）の別の変化量への関係づけ

折り重ねる回数nが変わるとき，分けられる枚数(n)ばかりでなく，折り目の数やハサミで紙を切る箇所なども伴って変わる。そこで，紙をn回折り重ねるときに発生する折り目の数を g（n）をとし，ハサミで紙を切る箇所の数を h（n）と補助的に名づける。対応表を用いて整理すると，次の表2のようになる。その表2を注視することより，表3のような様々な関係式を発見することができる。

表2：「折り重ね切り問題」の対応表の拡張例

折り重ねる回数：　n	1	2	3	4	5	6	…
分けられる枚数：f（n）	3	5	9	17	33	65	…
折り目の数：g（n）	1	3	7	15	31	63	…
切る箇所の数　：h（n）	2	4	8	16	32	64	…

表3：「折り重ね切り問題」に内在する様々な関係式例

番号	関係式	言葉の式など
①	$f(n)=g(n)+2$	(分けられる枚数)＝(折り目の数)＋2
②	$f(n)=h(n)+1$	(分けられる枚数)＝(切る箇所の数)＋1
③	$h(n)=g(n)+1$	(切る箇所の数)＝(折り目の数)＋1
④	$f(n)\times 2-1=f(n+1)$	(前の枚数)×2－1＝(次の枚数)
⑤	$f(n+1)-f(n)=2^n$	枚数の増加量は2の累乗ずつ増えている。
⑥	$h(n)\times 2=h(n+1)$	切る箇所の数は2倍になっている。
⑦	$g(n)\times 2+1=g(n+1)$	(前の折り目の数)×2＋1＝(次の折り目の数)
⑧	$g(n)+h(n)=g(n+1)$	(折り目の数)＋(切る箇所の数)＝(次の折り目の数)
⑨	$\{f(n)+g(n)\}\div 2=h(n)$	(分けられる枚数＋折り目の数)÷2＝(切る箇所の数)

3．発見した関係式の数学的な捉え

前述2では，「折り重ね切り問題」に様々な数学的な関係や規則が内在することを指摘した。それらの関係や規則を，児童生徒は数学的に捉えることが可能なのか。そこで表3に掲げた①～⑨の関係式を，小学校および中学校で学ぶ算数・数学を使ってどのように数学的に捉えることができるかを考察する。

（1）「$f(n)=g(n)+2$：(分けられる枚数)＝(折り目の数)＋2」の数学的な捉え

折り目は，両端の紙2枚を除き切り分けられる紙に必ず入っている。端的に言えば，両端の2枚を除いて考えれば，枚数 $f(n)$ は折り目の数 $g(n)$ に一致する。$f(n)=g(n)+2$ の「＋2」は，両端の紙の枚数2を意味すると解釈できる。結局，折り目の数 $g(n)$ を把握できれば，この関係式 $f(n)=g(n)+2$ をもとに枚数 $f(n)$ を捉えることができる。

ところで，折り目の数 $g(n)$ を把握するためには，例えば次の図2のように輪状の紙テープの折り重ねる場面」を「折り重ね切り問題」に対比させながら考えればよい。一般に，「輪状の紙テープの折り重ねる場面」では，n回折るとき，折り目の数は 2^n となる。「折り重ね切り問題」では，紙テープの一端が開いていることから，「輪状の紙テープの折り重ねる場面」に比べて，折り目の数は常に1つ少ない。つまり，折り目の数 $g(n)$ は，$g(n)=2^n-1$ となる。以上のことより，最終的に $f(n)=g(n)+2=2^n+1$ を得る。

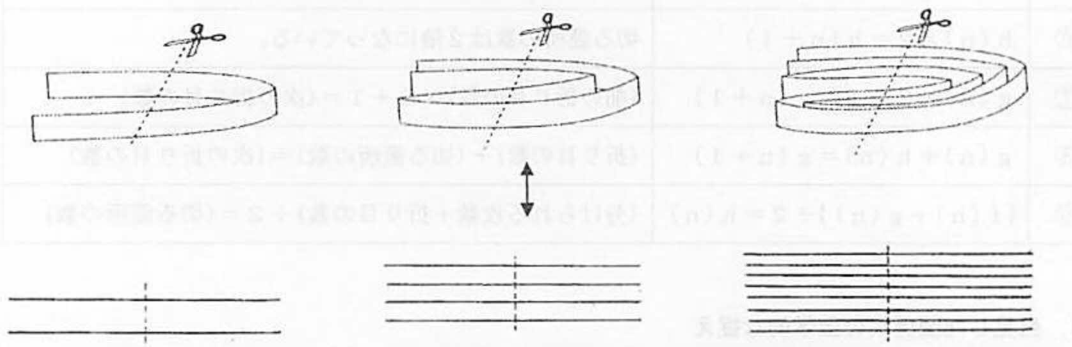
（1回折ったとき：折り目の数 2^1）　（2回折ったとき：折り目の数 2^2）　（3回折ったとき：折り目の数 2^3）

図2：輪状の紙テープ折り重ねる場面

（2）「$f(n)=h(n)+1$：(分けられる枚数)＝(切る箇所の数)＋１」および
「$h(n)\times 2=h(n+1)$：切る箇所の数は２倍になっている」の数学的な捉え

関係式$f(n)=h(n)+1$には，「ハサミで１箇所を切れば，切り分けられる紙が１枚増える」という紙を切り分けるときの原理が内在する。また，$f(n)=h(n)+1$の「＋１」は，ハサミで切り分ける前に元々あった紙１枚を意味すると解釈できる。

ところで，ハサミで切る箇所の数$h(n)$は，次の図３のように，単純に紙を重ね切る場面（両端が繋がっていない紙を重ねて切る場面）で捉え直しても，その数$h(n)$は変わらない。１回折る度に重なる枚数が２倍になるからハサミを入れる箇所は２倍ずつ増えることになる。式で表現すれば，$h(n)\times 2=h(n+1)$，$h(n)=2^n$となる。以上のことから，$f(n)=h(n)+1=2^n+1$を得る。

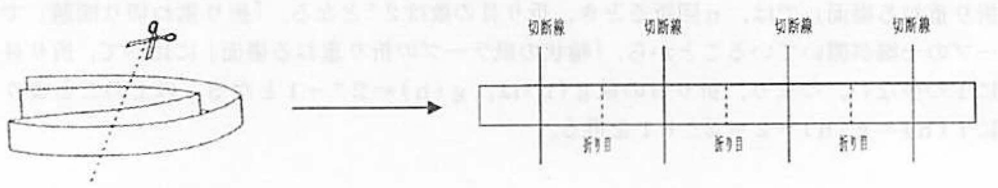


（１回折ったとき：切る箇所の数2^1）　（２回折ったとき：切る箇所の数2^2）　（３回折ったとき：切る箇所の数2^3）

図３：単純に紙を重ね切る場面

（3）「$h(n)=g(n)+1$：(切る箇所の数)＝(折り目の数)＋１」の数学的な捉え

前掲の表３①および②の関係式，$f(n)=g(n)+2$，$f(n)=h(n)+1$を連立して$f(n)$を消去すれば，$h(n)=g(n)+1$を得る。また，次の図４のように，図を用いて視覚的に理解を深められる。折り重ねた紙テープ(図４左)を，帯状に引き伸ばす(図４右)と等により，切断線（切る箇所）は，折り目と折り目の間に必ず入ることが視覚的に把握でき，「$h(n)=g(n)+1$：(切る箇所の数)＝(折り目の数)＋１」を捉えることができる。



（２回折り重ねる場合）

図４：「$h(n)=g(n)+1$：(切る箇所の数)＝(折り目の数)＋１」の視覚的理解

（4）「$f(n)\times 2-1=f(n+1)$：(前の枚数)×２－１＝(次の枚数)」および
「$f(n+1)-f(n)=2^n$：枚数の増加量は２の累乗ずつ増えている」の数学的な捉え

関係式「$f(n)\times 2-1=f(n+1)$：(前の枚数)×２－１＝(次の枚数)」を，数式の処理によって捉えられる。例えば前述３(1)(2)等より，$f(n)=2^n+1$，$f(n+1)=2^{n+1}+1$で

あるから，$f(n+1)-\{f(n)\times 2-1\}=2^{n+1}+1-\{(2^{n}+1)\times 2-1\}=0$となり，$f(n)\times 2-1=f(n+1)$と確認できる。また，$f(n)$の階差$f(n+1)-f(n)$に注目すれば，$f(n+1)-f(n)=(2^{n+1}+1)-(2^{n}+1)=2^{n}$を得る。

ところで，次の図5や図6のような図を用いて，関係式$f(n)\times 2-1=f(n+1)$を数学的に捉えることもできる。まず，図5のように，対象となる図を引き伸ばして捉え直す。図5下のように切り分けても，nに対する$f(n)$の値は原問題（折り重ね切り問題）の場合と変わらないことが分かる。引き続き，図6のように一般的な場合ついて考える。図6の左図でn回折るとき，$\boxed{n}$印の付いた切る箇所(：切る箇所総数2^{n}のうち一番右端にある箇所)の左側にa枚の紙があるとすると，$\boxed{n}$印の右側にある紙の数は折り目の入った1枚だけである。そこでさらにn＋1回折れば，図6の右図のようになる。$\boxed{n+1}$印の付いた箇所(：切る箇所総数2^{n+1}のうち一番右端にある箇所)の左側にある紙の枚数は2×aとなる。一方，$\boxed{n+1}$印の右側にある紙の枚数は1枚のままである。以上のことから，「$f(n)\times 2-1=f(n+1)$：(前の枚数)×2－1＝(次の枚数)」を得る。

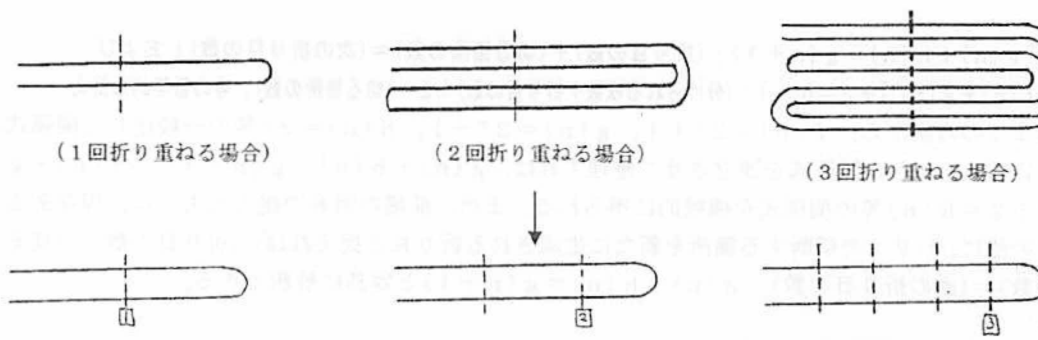


図5：図の引き伸しによる捉え（1回～3回折り重ねる場合）

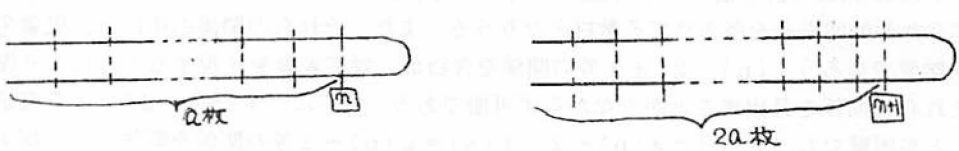


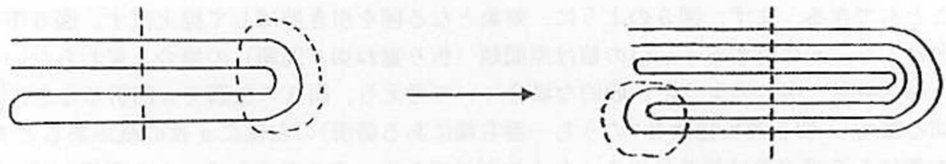
図6：図の引き伸しによる捉え（左図：n回折る場合，右図：n＋1回折る場合）

(5)「$g(n)\times 2+1=g(n+1)$：(前の折り目の数)×2＋1＝(次の折り目の数)」の数学的な捉え

例えば前述の3(1)(2)等より，関係式$f(n)=g(n)+2$，$f(n)=2^{n}+1$を得ている。それらの関係式を連立して$f(n)$を消去すれば$g(n)=2^{n}-1$となることから，$g(n)\times 2+1=(2^{n}-1)\times 2+1=2^{n+1}-1=g(n+1)$と確認できる。

また，図の視覚的な情報処理により，$g(n)\times 2+1=g(n+1)$を捉えることも可能である。例えば，折り目の発生する位置に注視しながら，次のような図8左図(2回折り重ねる場合)と図8右図(3回折り重ねる場合)を比較してみる。図8左図おいて，現在ある折り目(2回折り重ねで生じている折り目)の他に，ハサミで切断する箇所を図8右図で新たに生成される折り目(3回折り重ねで新たに生じる折り目)と捉え直すことができる。言い換えれば，図8右図で左側にある点線で囲んだ折り目は，2回折り重ねで既に生成されていた折り目であり，図8右図で右側にある折り目が3回折り重ねで新たに生じた折り目と考えられる。さらに，図8右図の左側一番上の端のみは開いて

おり，折り目がないことが確認できる。仮に，左側一番上の端が閉じており折り目があれば一般化して g (n)×2＝g (n＋1)となるが,「折り重ね切り問題」の場合，g (n)×2＝g (n＋1)－1となる。すなわち，g (n)×2＋1＝g (n＋1) を得る。



（2回折り重ねる場合）　（3回折り重ねる場合）

図8：折り目の発生の捉え

（6）「g (n)＋h (n)＝g (n＋1)：(折り目の数)＋(切る箇所の数)＝(次の折り目の数)」および「{f (n)＋g (n) }÷2＝h (n)：(分けられる枚数＋折り目の数)÷2＝(切る箇所の数)」等の数学的な捉え

前述までの考察から，f (n)＝2^n＋1，g (n)＝2^n－1，h (n)＝2^n等の一般化した関係式を得ている。それらの関係式を連立させて整理すれば，g (n)＋h (n)＝g (n＋1)，{f (n)＋g (n) }÷2＝h (n)等の関係式を機械的に得られる。また，前掲の図8で捉えたように，現在ある折り目の他に，ハサミで切断する箇所を新たに生成される折り目と捉えれば，(折り目の数)＋(切る箇所の数)＝(次の折り目の数)：g (n)＋h (n)＝g (n＋1)と容易に解釈できる。

4．「折り重ね切り問題」の関数教材としての可能性

（1）「折り重ね切り問題」に内在する豊かな関数的な関係

前述2では,「折り重ね切り問題」にどのような関数的な関係が内在しているかを考察した。前掲の表3で示したように,「折り重ね切り問題」には様々な関数的な関係が内在しており，児童生徒の発達段階に応じた知的好奇心を掻き立てる教材となりうる。また，それらの関係の中には，児童生徒にとって未学習であろう f (n)＝2^n＋1等の関係を含むが，対応表等を注視することにより児童生徒でもそれらの関係を見出すことが少なからず可能である。さらに，f (n)＝2^n＋1を直接的に捉えることが困難でも，f (n)＝g (n)＋2，f (n)＝g (n)＋2等の関係を駆使して，捉えやすいものに結び付けて f (n)を間接的に捉えるといった授業展開が期待できる。

（2）「折り重ね切り問題」に内在する豊かな関数的な関係の数学的な捉え

前述3では,「折り重ね切り問題」で見出した関数的な関係を児童生徒がいかに数学的に捉えられるか,それぞれの関数的な関係について吟味した。それらの吟味を通して，各関数的な関係を数学的に捉えたり証明したりする方法や手順は多様にあり，深く柔軟な数学的な見方や考え方が必要となることが分かった。とりわけ，数式や図を用いた表現・処理や解釈・読みなどは,「折り重ね切り問題」の解決過程における必要不可欠な数学的な活動である。

（3）カリキュラム上の位置づけ

通常，小学校算数における関数指導（数量関係指導）では，比例および反比例を主たる指導内容としている。また，中学校数学における関数指導では，比例・反比例，1次関数，2乗に比例する関数が主たる指導内容となる。「折り重ね切り問題」で見られる f (n)＝2^n＋1等の関数は，これまで本格的に取り扱われていない。しかしながら，従来の関数指導で取り扱われてきたそれらの関数をより鮮明に理解させるためにも，児童生徒の発達段階を考慮しつつ,「折り重ね切り問題」で見られるような様々な関数を取り上げることは少なからず意義あることと考える。新学習指導要領で

は，これまでにも増して具体的な操作や実験が奨励されている。「折り重ね切り問題」は，手軽に紙とハサミを用いて実際に行うことができる現物実験と頭の中で行う念頭操作や思考を兼ね備えた優れた教材と言える。また，中学校３年で関数ｙ＝ｘ^{2}の他に，色々な関数を取り上げることになっており（文部科学省, 2008b），「折り重ね切り問題」を積極的に取り上げるよい機会となろう。また，前述２および３で考察した通り，「折り重ね切り問題」に内在する関数的な関係は多様であり，それらを数学的に捉えたり証明したりすることは，教員自身の数学的な活動を促進し資質を高める機会になると少なからず考えられる。それらの実践報告は，次に機会に述べる予定である。

引用・参考文献

坪田耕三．(2008)．紙テープを使って．算数授業研究，第 56 号．東洋館出版．p. 52
文部科学省．(2008a)．小学校学習指導要領解説：算数編．東洋館出版．
文部科学省．(2008b)．中学校学習指導要領解説：数学編．教育出版．

A Study on teaching material of ORIKASANE-KIRI

OSAWA, Hironori
Yamagata University

abstract

In this paper, I considered the effectiveness in the junior high school and the elementary school as the function teaching material of ORIKASANE-KIRI. First of all, I considered what function relation existed inside ORIKASANE-KIRI. Next, I examined how students being able to catch them mathematically closely. As a result, the following finding was obtained. (1)Function various relations exist inside ORIKASANE-KIRI. Moreover, students can find those function relation by gazing at the correspondence table etc. though $f(n) = 2^n + 1$ of the unstudy is included in those function relation. (2)When they mathematically catch or prove function various relations that exist inside ORIKASANE-KIRI, a deep, flexible mathematical view and idea are needed. They do mathematical activities such as the expressions, processing, the interpretations, and reading that use the expressions and figures. (3)Making ORIKASANE-KIRI a teaching material is effective as the teaching material of the function guidance in the junior high school and the elementary school, and the teacher's own mathematical activity is promoted.