東北数学教育学会 年報第40号 2009年3月31日

三角形の傍心に関する定理

－数学的活動に向けて－

宮城教育大学　萬　伸介

概要： 三角形の傍心（傍接円の中心）に関する二つの定理を紹介する。これらの証明は「角の二等分線」、「相似比」、「三角形の面積」等を用いてなされる。そして、これらの結果は中学校・高等学校における数学的活動の教材として用いることができると思われる。

キーワード： 傍接円、傍心、角の二等分線

1．はじめに

本学数学教育講座が保管・管理している林鶴一蔵書（算数・数学の教科書や数学の専門書など）の林が編纂した教科書の記述と現在の教科書の記述の比較をする中で、三角形の傍心に関する一つの定理を証明することができた。さらに、林が編纂した教科書（林（1915））に現在ではほとんど紹介されることのない傍接円の半径に関する定理を見つけることができた。現在の学習指導要領（文部科学省（2004、2005））によると、三角形の傍接円・傍心は中学校・高等学校の数学では学習することがない。しかしながら、これらの定理は、「角の二等分線」、「三角形の相似比」など中学校で学習する内容を基に、中学校第3学年や高等学校第1学年の数学の発展問題として十分に対応できるものと思われる。これら二つの定理とその証明を紹介する。

2．三角形の内接円・内心と傍接円・傍心

三角形 ABC に対して、頂点 B における内角の二等分線と頂点 C における内角の二等分線の交点を I とする。このとき頂点 A と点 I を結ぶ直線は頂点 A における内角の二等分線である。すなわち、頂点 A における内角の二等分線、頂点 B における内角の二等分線、そして頂点 C における内角の二等

分線は一点 I で交わる。そして、点 I から３辺 AB、BC、CA へ垂線を引きそれぞれの交点を D、E、F とすると、３線分 ID、IE、IF の長さが等しいことが示される。よって、点 I を中止とし半径 ID の円を画くと、この円は三角形ABC の辺 AB と点 D で接し､辺 BC と点 E で接し､辺 CA と点 F で接する。この円を三角形 ABC の内接円といい、点 I を三角形 ABC の内心という（小平（1993))。一つの三角形に対して、内接円とその中心である内心は唯一つである。

三角形 ABC に対して、頂点 B における外角の二等分線と頂点 C における外角の二等分線の交点を Ia とする。このとき頂点 A と点 Ia を結ぶ直線は頂点 A における内角の二等分線である。すなわち、頂点 A における内角の二等分線、頂点 B における外角の二等分線、そして頂点 C における外角の二等分線は一点 Ia で交わる。そして、点 Ia から３直線 AB、BC、CA へ垂線を引きそれぞれの交点を T、U、V とすると、３線分 IaT、IaU、IaV の長さが等しいことが示される。よって、点 Ia を中心とし半径 IaT の円を画くと、この円は三角形 ABC の辺 AB の延長と点 T で接し、辺 BC と点 U で接し、辺 AC の延長と点 V で接する。この円を三角形 ABC の（一つの）傍接円といい、点 Ia を三角形 ABC の（傍接円の）傍心という（小平（1993))。一つの三角形に対して、傍接円は三つ有り、それぞれの中心である傍心も三つである。

・頂点 A における内角の二等分線、頂点 B における外角の二等分線、そして頂点C における外角の二等分線の交点を Ia とする。

・頂点 B における内角の二等分線、頂点 C における外角の二等分線、そして頂点A における外角の二等分線の交点を Ib とする。

・頂点 C における内角の二等分線、頂点 A における外角の二等分線、そして頂点B における外角の二等分線の交点を Ic とする。

3. 傍心が作る三角形

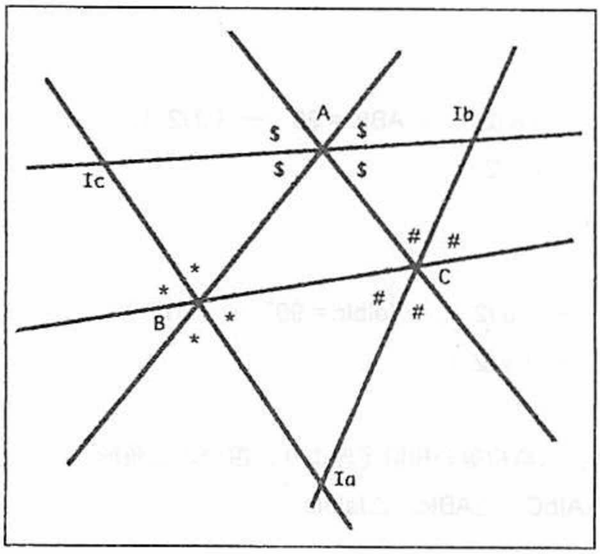
以下で示す定理は既に知られているか否かは不明であるが，手元にある初等幾何関係の書籍にはこれに関した記述はなく，まして定理として記述しているものはなかった．萬（2009）にはこの定理の発見・再発見の経緯につい

ての記述がある。

定理１： $\triangle$ABC の三つの傍心 Ia, Ib, Ic を頂点とする四つの三角形

$\triangle$IcBA, $\triangle$IaCB, $\triangle$IbAC, $\triangle$IcIaIb

は互いに相似な三角形である。



（図１）

証明： 上の（図１）を参照。記述を明確にするために、$\triangle$ABC において

$\angle$CAB = α、$\angle$ABC = β、$\angle$BCA = γ

とおく。三角形の内角の大きさの和は 180° であるから、$\alpha+\beta+\gamma$ = 180° が成り立っていることに注意する。直線 IaIb, IbIc, IcIa が外角の二等分線であることより

$\angle$IbAC = $\angle$BAIc = 90° ―（α/2）

$\angle$IcBA = $\angle$CBIa = 90° ―（β/2）

$\angle$IaCB = $\angle$ACIb = 90° ―（γ/2）

である。よって、再び三角形の内角の大きさの和が 180° であることに注意すると、

$\triangle$IaBC において

$\angle$CIaB = 90° ―（α/2），$\angle$IaBC = 90° ―（β/2），

$\angle$BCIa = 90° —（γ/2）,

が成り立ち、

△AIbC において

$\angle$CAIb = 90° —（α/2）, $\angle$AIbC = 90° —（β/2）,

$\angle$IbCA = 90° —（γ/2）,

が成り立ち、

△ABIc において

$\angle$IcAB = 90° —（α/2）, $\angle$ABIc = 90° —（β/2）,

$\angle$BIcA = 90° —（γ/2）,

が成り立つ。さらに

△IaIbIc において

$\angle$IcIaIb = 90° —（α/2）, $\angle$IaIbIc = 90° —（β/2）,

$\angle$IbIcIa = 90° —（γ/2）,

が成り立つ。

以上のことより、二角相等の相似定理より、四つの三角形

△IaBC, △AIbC, △ABIc, △IaIbIc

は相似である。すなわち

△IaBC ∽ △AIbC ∽ △ABIc ∽ △IaIbIc

である。（証明おわり）

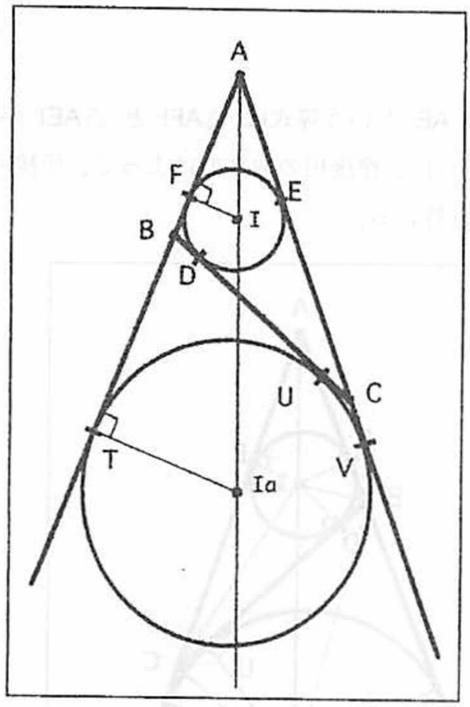
4．内接円の半径と傍接円の半径の比

△ABC の周の長さの半分を s とする。すなわち、辺 BC、CA、AB の長さをそれぞれ a、b、c とおくと、$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ である。また、△ABC の面積を S とする。このとき、三角形の内接円の半径と傍接円の半径の比について、次の定理が成り立つ。

定理２： △ABC の内接円の半径 r と点 Ia を中心とする傍接円の半径 r' の比について

$$r:r'=(s-a):s$$

が成り立つ。



（図２）

証明：上の（図２）を参照する。

二角相等の相似定理より △AFI と △ATIa は相似な三角形であることがわかる。よって IF : IaT = AF : AT、すなわち $r : r'$ = AF : AT である。

さて、

$$2s = AB + BC + CA = AF + FB + BC + CE + EA$$

と AF = EA、FB + CE = BD + DC = BC より

$$2s = 2\,AF + 2\,BC$$

が得られる。よって AF = $s - a$ が成り立つ。次に、

$$2s = AB + BC + CA = AB + BU + UC + CA$$

と BU = BT、UC = VC より

$$2s = AB + BT + VC + CA = AT + VA$$

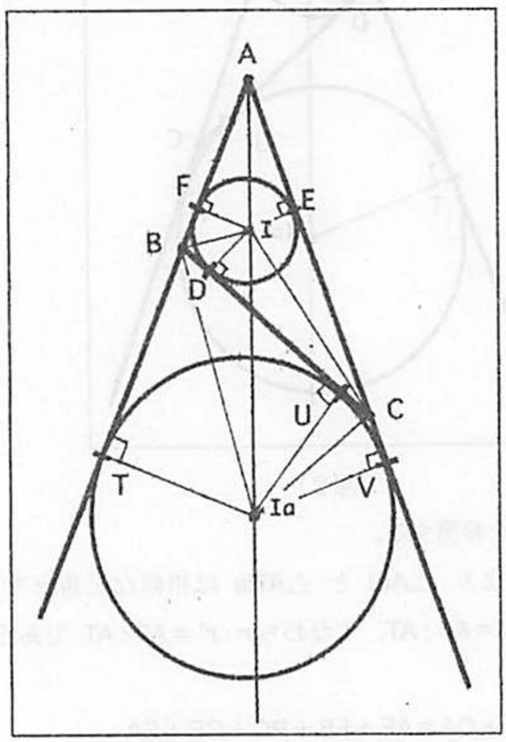
が得られる。ところで AT = AV であるから、AT = s が成り立つ。

従って

$$r : r' = (s-a) : s$$

が成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明おわり）

（注意）例えば AF = AE という等式は △AFI と △AEI が合同な三角形であることから従う。さらに、傍接円の取り方によって、傍接円の半径 r' の式表示は a、b、c が入れ替わる。



（図３）

別証明：上の（図３）を参照する。

$S=$（三角形 ABC の面積）

＝（三角形 ABI の面積）＋（三角形 BCI の面積）

＋（三角形 CAI の面積）

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot IF + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot ID + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot IE = \frac{1}{2} \cdot cr + \frac{1}{2} \cdot ar + \frac{1}{2} \cdot br$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=sr$$

よって $r=\frac{S}{s}$ を得る。

一方

$S=$ （三角形 ABC の面積）

＝（四角形 ABIaC の面積）－（三角形 BIaC の面積）

＝（三角形 ABIa の面積）＋（三角形 AIaC の面積）

－（三角形 BIaC の面積）

ところで

（三角形 ABIa の面積）$=\frac{1}{2}\cdot$ AB・IaT $=\frac{1}{2}\cdot cr'$

（三角形 AIaC の面積）$=\frac{1}{2}\cdot$ AC・IaV $=\frac{1}{2}\cdot br'$

（三角形 BIaC の面積）$=\frac{1}{2}\cdot$ BC・IaU $=\frac{1}{2}\cdot ar'$

がなりたつ。これら三つの式を上の式に代入して

$$S=\frac{1}{2}\cdot cr'+\frac{1}{2}\cdot br'-\frac{1}{2}\cdot ar'=\frac{b+c-a}{2}\cdot r'=(s-a)r'$$

よって $r'=\frac{S}{s-a}$ を得る。以上より

$$r:r'=(s-a):s$$

が成り立つ。（証明おわり）

（注意）この別証明は森（1918）の p.97 の記述を一部修正したものである。

定理２の二つの証明は中学校第３学年に対して提示できるものと思われる。しかしながら、内接円の半径と傍接円の半径を三角形の三辺の長さを用いて記述するためには、以下の命題の証明に示すように、高等学校で学習する内容を必要とする。

命題：△ABC の内接円の半径を r とし、点 Ia を中心とする傍接円の半径を r' とする。このとき

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad、\quad r'=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

が成り立つ。

証明：倍角・半角の公式と（第二）余弦定理より

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$$
$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

ここで $2s=a+b+c$ を用いて上式を書き直すと $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$ が得られる。よって $\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}=1$ より $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$ が得られる。$\sin\frac{A}{2}>0$ であるから $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ が成り立ち。さらに、$\cos\frac{A}{2}>0$ であるから $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ が成り立つことも示される。よって、倍角・半角の公式より

$$\sin A=\sin(2\cdot\frac{A}{2})=2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

が得られる。ところで、△ABC の面積 S は $S=\frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin A$ で与えられるから上式を用いると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

を得る（この公式をヘロンの公式という）。

一方、先の別証明の中で示されたように

$$r = \frac{S}{s} \text{、} r' = \frac{S}{s-a}$$

が成り立っていたから、それぞれの分子の S に上で得られた式を代入して

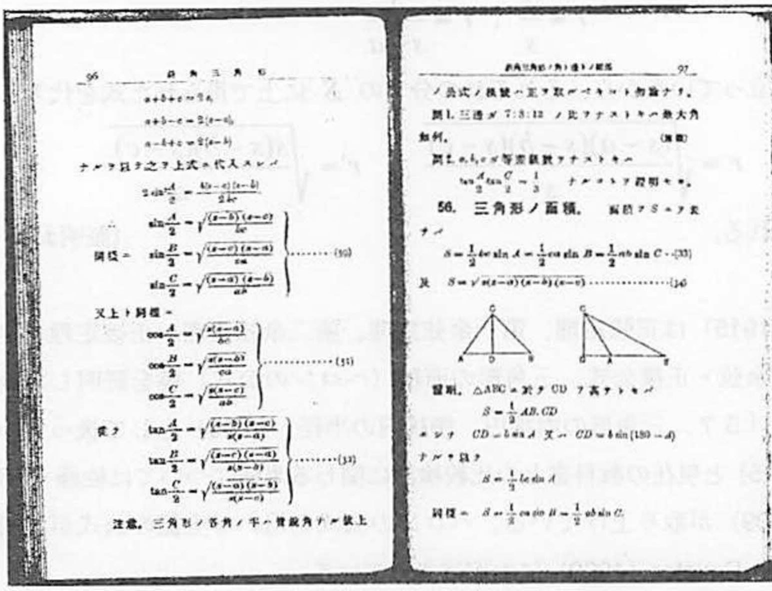
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \text{、} r' = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明おわり）

林（1915）は正弦定理、第一余弦定理、第二余弦定理、正接定理、半角の正弦・余弦・正接公式、三角形の面積（ヘロンの公式）等を証明した後、この系を「５７．三角形の内接円、傍接円の半径」(p.99) として扱っている。林（1915）と現在の教科書との比較検討に関わる事柄については佐藤・森岡・萬（2009）が取り上げている。ヘロンの公式を用いて上記の公式が証明されることは Coxeter（1969）にも記述されている。

５．おわりに

傍接円とその中心である傍心は、現在の中学校・高等学校の学習指導要領によると、中学校・高等学校での取り扱うことがない内容である。しかしながら、「傍心」と言わずに内角の二等分線と二つの外角の二等分線の交点ということにより、傍心が作る三角形に関わる「定理１」は中学校第 3 学年で十分学習できる教材と考えられる。もちろん、中学校では角の大きさを表しているギリシャ文字を「a、b、c」と書き換える必要がある。この定理では三角形の辺の長さを用いていないので混乱はないと思われる。また、内接円と傍接円の半径の比の関係（「定理２」）は中学校第３学年の教材となり、内接円の半径と傍接円の半径を三角形の辺の長さで表す公式（「命題」）は三角比を学習する高等学校第 1 学年の教材として採用できるものと考えられる。林（1915, p.96~p.99 以下の図４と図５を参照）による内接円と傍接円の半径公式は現在の高等学校でそのまま学習指導することは難しいが、説明を丁寧に行うことにより、高等学校での発展問題として提案できると考えている。これらの結果が現職教員の方々により取り上げられてよりよい教材となることを願っている。



96 斜角三角形

$a+b+c=2s,$

$a+b-c=2(s-c)$

$a-b+c=2(s-b)$

ナルヲ以テ之ヲ上式ニ代入スレバ

$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}$

同様ニ $\left.\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(30)$

又上ト同様ニ

$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(31)$

從テ $\left.\begin{array}{l}\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{array}\right\}\cdots\cdots(32)$

注意. 三角形ノ各角ノ半ハ皆鋭角ナルニ依リ上

斜角三角形ノ角ト邊トノ關係 97

ノ公式ノ根號ハ正ヲ取ルベキコト明白ナリ。

問1. 三邊ガ 7:5:12 ノ比ナルトキハ最大角如何。(答略)

問2. a, b, c ガ等差級數ナルトキハ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ナルコトヲ證明セヨ。

56. 三角形ノ面積。 面積ヲ S ニテ表ハセバ

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\cdots(33)$

及 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots(34)$

證明. △ABC ニ於テ CD ヲ高サトセバ

$S=\frac{1}{2}AB.CD$

然ルニ $CD=b\sin A$ 又ハ $CD=b\sin(180-A)$

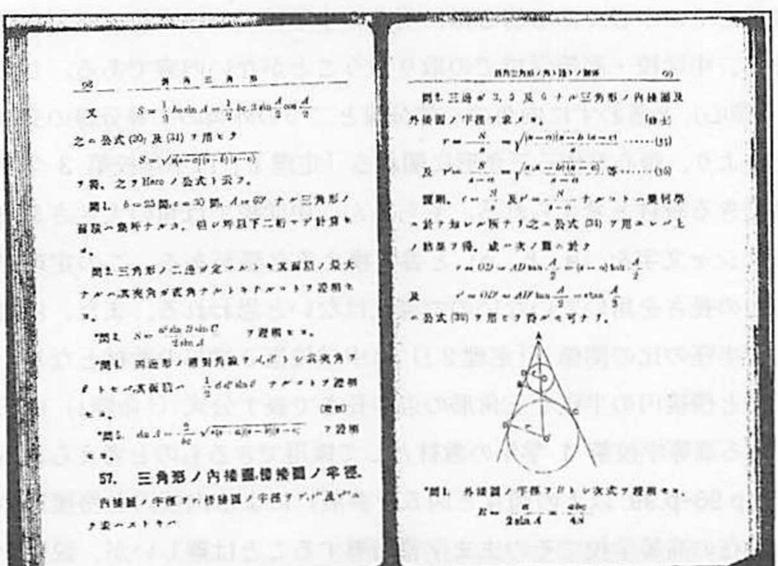
ナルヲ以テ

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

同様ニ $S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

注意. 三角形ノ各角ノ半ハ皆鋭角ナルニ依リ上

（図4）



98 斜角三角形

又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

之ニ公式(30)及(31)ヲ用ヒテ

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヲ得。之ヲ Hero ノ公式ト云フ。

問1. $b=25$ 糎, $c=30$ 糎, $A=60°$ ナル三角形ノ面積ハ幾平方糎ナルカ。但シ小數以下二桁マデ計算セヨ。

問2. 三角形ノ二邊ガ定マレルトキ其面積ノ最大ナルハ其夾角ガ直角ナルトキナルコトヲ證明セヨ。

*問3. $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ ヲ證明セヨ。

*問4. 四邊形ノ對角線ノ長ヲ d, d' トシ其ノ夾角ヲ θ トセバ其面積ハ $\frac{1}{2}dd'\sin\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。(略)

*問5. $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ヲ證明セヨ。

57. 三角形ノ内接圓・傍接圓ノ半徑。

内接圓ノ半徑ヲ r、傍接圓ノ半徑ヲ r' ニテ表ハストキハ

斜角三角形ノ角ト邊トノ關係 99

問1. 三邊ガ 3, 5 及 6 ナル三角形ノ内接圓及外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。(答略)

$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\cdots\cdots(35)$

及 $r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ 等 $\cdots\cdots(36)$

證明. $r=\frac{S}{s}$ 及 $r'=\frac{S}{s-a}$ ナルコトハ幾何學ニ於テ知レル所ナリ之ニ公式(34)ヲ用フレバ ノ結果ヲ得。或ハ次ノ圖ニ於テ

$r=OD=AD\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}$

及 $r'=O'D'=AD'\tan\frac{A}{2}=s\tan\frac{A}{2}$

ニ公式(32)ヲ用ヒテ得ルモ可ナリ。

*問1. 外接圓ノ半徑ヲ R トセバ次式ヲ證明セヨ。

$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4S}$

（図5）

参考文献

・H.S.M.Coxeter, (1969) : Introduction to Geometry, Second Edition, (Wiley Classics Library), John Wiley & Sons, Inc.

・小平　邦彦（1993）：幾何のおもしろさ（1985 年第１版発行)、第１１版、岩波書店。

・佐藤　貴之、森岡　正臣、萬　伸介（2009）：三角形の角の大きさと辺の長さの関係　－　林鶴一の中等教育教科書と現在の教科書との比較　－、科学研究費補助金研究成果報告書「林鶴一蔵書のデータベース化とそれに基づく教材開発」(研究代表者　萬伸介)。

・林　鶴一（1915）：中等教育　平面三角法　教科書、修正三版、(初版は大正元年（1912）8 月発行)、東京開成館。注1)

・森　吉太郎（1918）：三角法（初等数学叢書第２８篇第２９篇合篇)、大倉書店。注2)

・文部科学省（2004）：中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）解説　－数学編－、平成 16 年 5 月一部補訂、大阪書籍。

・文部科学省（2005）：高等学校学習指導要領解説　－数学編　理数編－、平成 17 年 2 月一部補訂、実教出版。

・萬　伸介（2009）：図形による敷き詰めから傍心に関する結果に至る作業過程　－ 特殊から一般への流れの一例 －、科学研究費補助金研究成果報告書「林鶴一蔵書のデータベース化とそれに基づく教材開発」(研究代表者　萬伸介)。

注１）資料「林文庫邦書目録　原稿」(修正版）に（その１）１３０番として記載されている書籍。

注２）資料「林文庫邦書目録　原稿」(修正版）に（その１）５１９番として記載されている書籍。

（注）本論文は科学研究費（基盤研究（C）19500717 ）の交付を受けた研究の一部である。

Two theorems on excenters of a triangle

-- for mathematical activity --

YOROZU Shinsuke
(Miyagi University of Education)

Abstract: We show and prove two theorems on excenters (centers of escribed circles) of a triangle. We prove them by using concepts of "bisector of an angle", "ratio of similitude" and "area of a triangle" that are the fundamental concepts of mathematics for Lower Secondary Schools. We think that these results are teaching materials of mathematical activity in Lower/Upper Secondary School mathematics.

Key words: escribed circles of a triangle、excenters of a triangle,
bisector of an angle