

「正四面体の切り開き問題」の教材としての可能性

大澤 弘 典

山形大学教育実践研究科

hiro@e.yamagata-u.ac.jp

要 約

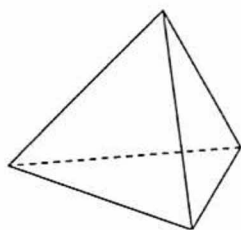
本研究の「正四面体の切り開き問題」では、展開の意味を広義に捉え、辺上を切り開くことに限定しない場合に注目した。そのような場合における教材として可能性を探るべく、公立小学校 6 年生 1 クラス 23 名を対象に授業実践を行った。その結果、次の①～③のことがわかった。①ほとんどの児童は、紙で作られた正四面体を切り開き、長方形等の様々な平面図形をつくることできる。②長方形のつくり方（切り開き方）は複数あり、そのことが 1 つの要因となり、児童間で自発的なコミュニケーションが行われうる。③問題提示等の工夫（例：正方形の作成可能性の探究等）により、小学生向けの図形教材に留まらず中学生向けの発展的な教材となりうる。

キーワード：正四面体，展開，図形教材

1. 研究の目的と方法

「正四面体の切り開き問題」とは、「紙などで作られている正四面体を切り開くとき、どのような図形（平面図形）ができるか」という問題である（図 1）。紙を切り開く際、通常の算数数学の授業では、展開図の観点から辺上を切り開くことに限定して取り扱う場合が多い。そのような取り扱いに対して、本教材では展開の意味を広義に捉え、辺上を切り開くことに限定しない場合に注目した。つまり、本研究の目的は、広義の展開における教材化の可能性を明らかにすることである。

具体的な研究の方法としては、(1) 展開の意味を広義に捉え正四面体を切り開くとき、具体的にどのような平面図形ができるかの考察、(2) 授業の構想と実践、(3) 実践した授業の分析・考察により本問題の教材化の可能性を検討している。

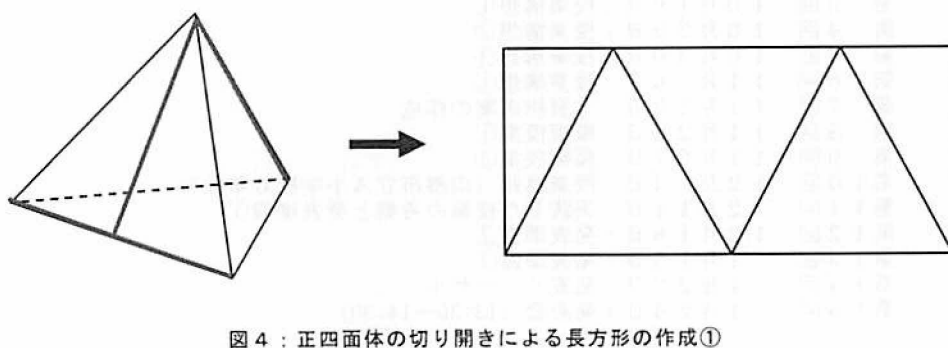
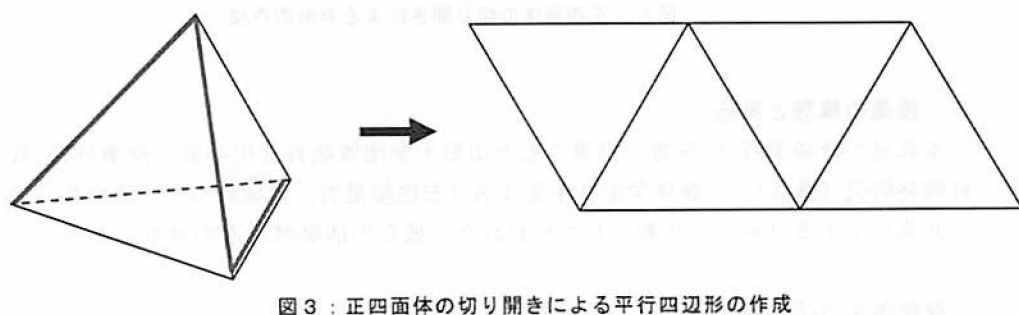
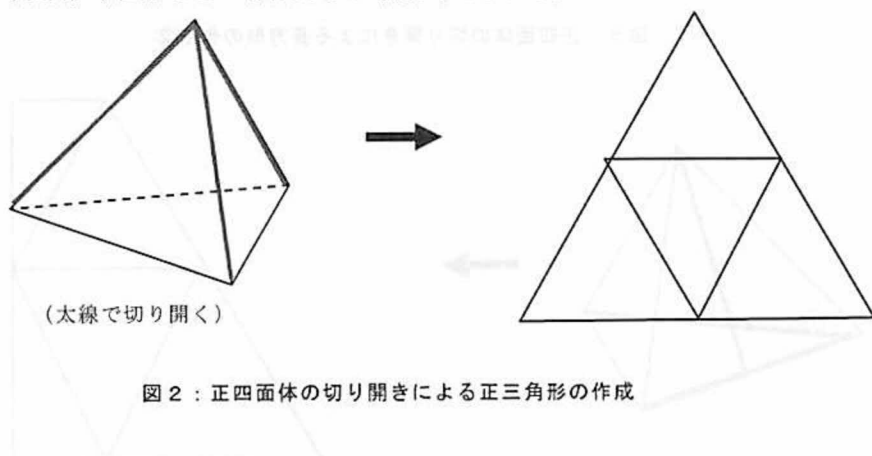


正四面体を切り開くとき、
どのような図形ができるか？

図 1：正四面体の切り開き問題

2. 正四面体の切り開きによる平面図形の作成

次の図2～図6のように、紙などで作られた正四面体を切り開く(赤色の太線で切り開く)とき、既習の様々な平面図形をつくり出すことができる。図2～図3から示唆されるように、正三角形や平行四辺形の作成は、通常の展開図の指導と同質であり、辺上を切り開くことによりできることから比較的容易に作成できる。一方、図4～図6から示唆されるように、長方形や台形の作成には、辺上以外の部分を切り開く必要性があり、児童にとって問題解決に多少の困難性が伴う。また、図4や図5のように、長方形や台形などの作成方法は複数考えられる。



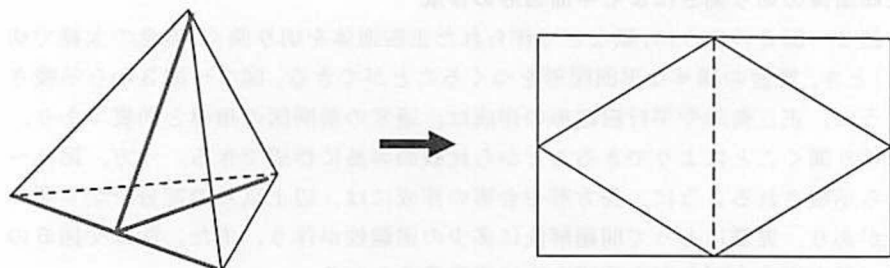


図 5 : 正四面体の切り開きによる長方形の作成②

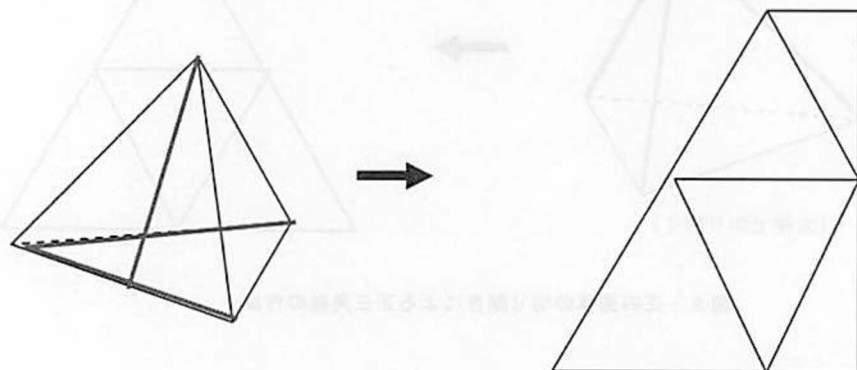


図 6 : 正四面体の切り開きによる台形の作成

3. 授業の構想と実施

本教材の授業実践は、筆者の指導のもと山形大学地域教育文化学部の授業科目「教材開発研究（算数）」の履修学生 3 年生 4 名（安住絵里香、犬塚真以子、岡崎亮、田中直美）によるグループ活動として行われた。彼らの活動歴は次の通りである。

< 履修学生の活動履歴 >

第 1 回	10 月 2 日	: ガイダンス (授業概要の説明)
第 2 回	10 月 9 日	: グループ編成
第 3 回	10 月 16 日	: 授業構想①
第 4 回	10 月 23 日	: 授業構想②
第 5 回	10 月 30 日	: 授業構想③
第 6 回	11 月 6 日	: 授業構想④
第 7 回	11 月 13 日	: 学習指導案の作成
第 8 回	11 月 20 日	: 模擬授業①
第 9 回	11 月 27 日	: 模擬授業②
第 10 回	12 月 4 日	: 授業実践 (山形市立 A 小学校 6 年生)
第 11 回	12 月 11 日	: 実践した授業の考察と発表準備①
第 12 回	12 月 18 日	: 発表準備②
第 13 回	1 月 15 日	: 発表準備③
第 14 回	1 月 22 日	: 発表リハーサル
第 15 回	1 月 24 日	: 発表会 (13:30-14:30)

学習指導案(略案)例

- (1) 授業名：色々な図形に切り開いてみよう
 (2) 対象児童：山形市立第五小学校第6学年3組23名
 (3) 実施日：2008年12月4日(木)10:55-11:40
 (4) 授業者：田中直美(山形大学地域教育文化学部3年)
 (5) 本時の目標：
 ・立体図形である正四面体を展開すると、平面図形である正三角形・平行四辺形・長方形ができることを理解できたか。
 ・切り開き方を考え、周りの人と教え合うことを大切にすることができる。

(6) 指導の過程：

区分 (時間)	学習活動	主な発問・反応・指示 (◎)(△)(○)	指導上の留意点(・)
導入 5分	1. 正四面体を展開すると正三角形ができることを理解する。	◎切り開くとどんな図形ができますか。 △三角形 △四角形 △わからない。 ○今から切り開いてみます。 △すごーい。 △正三角形だ。 ◎展開した正三角形は何個の正三角形でできていますか。 △4つ。	・展開した正三角形が4つの正三角形で構成されていることを理解させる。 ・黒板に見取り図を提示し、切ったところを赤く印をつけることで、展開するまでの手順を確認する。
展開 5分	2. 正四面体を展開すると平行四辺形ができることを理解する。	○もう一回切り開いてみます。 △また正三角形かな。 △すごーい、平行四辺形だ。 ○平行四辺形ができました。	・早く切り終えた児童には、他の切り開き方を考えさせる。
10分	3. 正四面体を平行四辺形に展開する。	○平行四辺形に切り開いてみましょう。	
20分	4. 正四面体を展開すると長方形ができることを理解する。	○長方形に切り開くことができます。 △長方形もできるんだ。 △どうやってできるんだらう。 ○長方形に切り開いてみましょう。 △難しい。 △わからない。 ○先生からヒントを出します。 △長方形ができた。 △台形ができた。 △変な形になったよ。	・児童の学習意欲に合わせて、段階的に助言を与える。 ・つまづいている児童に周りの児童との交流を促す。 ・早く切り終えた児童には、他の切り開き方を考えさせる。 ・活動の中で、おもしろい切り開き方があったら紹介し、どの方法も肯定し、認める。
終末 5分	6. ワークシートに感想を書く。	○ワークシートに今日の感想を書きましょう。	

(7) 評価：

- ・立体図形である正四面体を展開すると、平面図形である正三角形・平行四辺形・長方形ができることを理解できたか。
 ・切り開き方を考え、周りの人と教え合うことを大切にすることができたか。

4. 授業実践の考察

ここでは、実践した授業を振り返り、「正四面体の切り開き問題」の教材としての可能性を省察する。

(1) 数学的コミュニケーションを促す教材

前掲の図4、図5で示したように、紙で作られた正四面体を長方形に切り開く方法は複数考えられる。次の写真1から窺えるように、実際の授業において異なる長方形の作成方法に出会う場面で、多くの児童の知的好奇心がより掻き立てられている。どのように切り開いて異なる2種類の長方形を切り開いたのか、それらの知見を児童間で共有するため、広義の展開図ばかりでなく見取り図などを用いて説明しあう自発的な活動が見受けられた。

以上のことから、本教材が数学的コミュニケーションを促す教材となり得ることがわかった。



写真1：授業実践の様子（正四面体の切り開き問題）

(2) 児童の状況等に応じた実践性の高い教材

前述の(2)で示したように、正三角形や平行四辺形の作成は通常の展開図の作成と同質であり、辺上を切り開くことによりできることから比較的容易に作成できる。一方、長方形や台形の作成には、辺上以外の部分を切り開く必要性があり、問題解決に多少の困難性が伴う。これらのことは実際の授業における児童の活動の様子からも窺える。また、「正四面体から正方形を切り開けるか」といった発展的な問いを取り扱うことも可能である。つまり、本教材は課題の設定等の工夫によって、問題の難易調整や授業の展開等を制御しやすい実践性の高い教材であると示唆される。

5. 「四面体の切り開き問題」における正方形の作成可能性

ここでは、「紙で作られた正四面体から正方形を切り開けるか」といった発展的な問いについて数学的に考察する。結論から言えば、「正四面体を切り開いて正方形にすることはできるか」という問いに対する答えは、「できない」である。「なぜ、正方形に切り開けないのか」、その数学的な理由を次に述べる。

略解

1 辺の長さが 1 の正四面体を切り開き正方形をつくることのできたと仮定すると、その正方形は 1 辺の長さが $\sqrt[4]{3}$ の正方形である。

$$(\because [1 \text{ 辺が } 1 \text{ の正四面体の表面積}] = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 4 = \sqrt{3} = [\text{正方形の面積}])$$

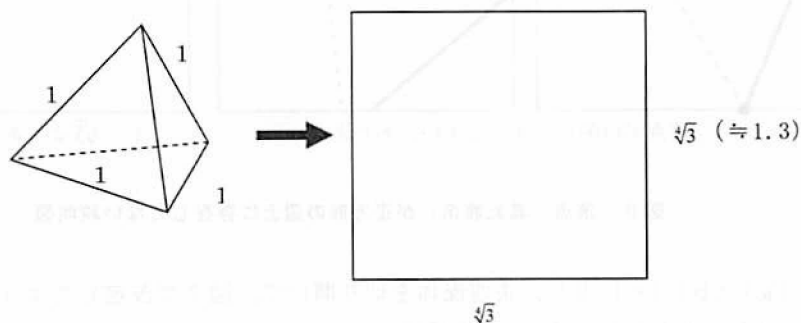


図 7：正方形に切り開けたと仮定した図

(a) 正四面体の頂点は正方形の内側（周辺を含まない）には存在しえない。
 (∵ その頂点のまわりが平面になってしまい、立体の頂点をなしえない)

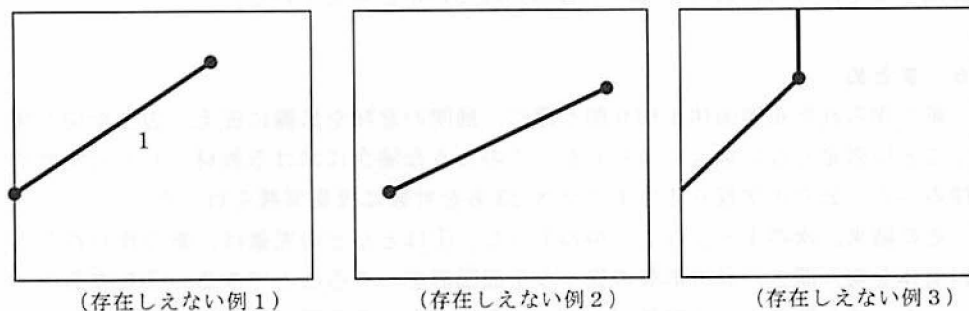


図 8：頂点（黒丸表示）が正方形の内側に存在しえない説明図

(b) 正四面体のある辺の一部は、正方形の内側に必ず描かれる。
 (∵ 正四面体の辺の長さは合計 $1 \times 6 = 6$ であるが、正方形の辺の長さの合計は $\sqrt[4]{3} \times 4 < 6$ なので、正四面体の辺を正方形の辺だけで描くことは不可能)

- (c) 正四面体の頂点が正方形の辺上（内側ない）にある場合も存在しえない。
 (∵ 図9のように、頂点が内側にできてしまうことから存在しえない)

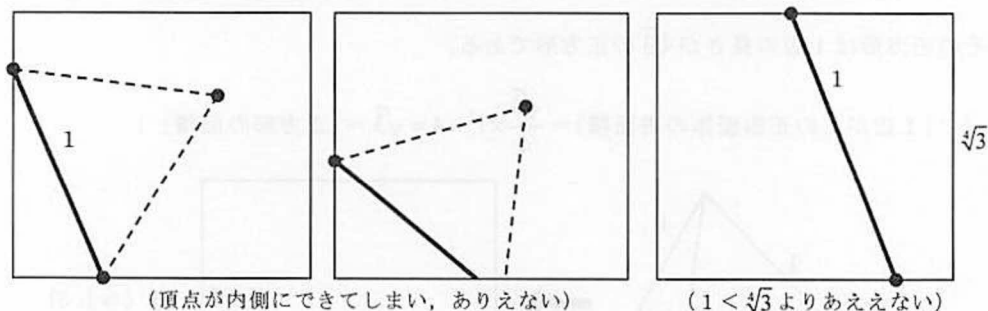


図9：頂点（黒丸表示）が正方形の辺上に存在しえない説明図

(a) (b) (c) より、正四面体を切り開いて、図7で仮定したような正方形をつくれなことがわかる。…（略解終）

以上の略解を言い換えれば、「四面体の切り開き問題」で正四面体を切り開いて正三角形・平行四辺形・長方形・台形が作れるのは、正四面体の頂点をそれらの平面図形の内側ではなく周辺上に位置させることが可能だからとも言える。これらの内容は、小学生には認識困難なことかもしれないが、中学校数学における発展的な課題として、一つの教材になりうるのではないかと考えている。

6. まとめ

紙で作られた正四面体を切り開く際に、展開の意味を広義に捉え、辺上を切り開くことに限定しない場合に着目した。そのような場合における教材として可能性を探るべく、公立小学校6年生1クラス23名を対象に授業実践を行った。

その結果、次の①～③のことがわかった。①ほとんどの児童は、紙で作られた正四面体を切り開き、長方形等の様々な平面図形をつくることできる。②長方形の作り方（切り開き方）は複数あり、そのことが1つの要因となり、児童間で自発的なコミュニケーションが行われうる。③問題提示等の工夫（例：正方形の作成可能性の探究等）により、小学生向けの図形教材に留まらず中学生向きの発展的な教材となりうる。

7. 注および引用・参考文献

大澤弘典. (2008). 山形大学における教員養成プログラムについての研究(その1): 新授業科目「教材開発研究(算数)」の試行と実施. 東北数学教育学会年報, 第39号, pp. 51-62.

大澤弘典. (2009). 紙とハサミの算数. 山形大学教材開発研究 2009, pp. 3-37.

大澤弘典. (2010). 教材開発研究: 紙とハサミの算数・数学. 沼津市教育振興会 算数・数学部研修会講演 (実施日 2010. 2. 18)

文部科学省. (2008). 小学校学習指導要領解説: 算数編. 東洋館出版.

Possibility as teaching material of "Problem of cutting open of tetrahedron"

Osawa Hironori
Yamagata University

Summary

In "Problem of cutting open of tetrahedron", I paid attention when I did not limit it to cutting on the vicinity open. In other words, I interpreted the meaning of development as the wide sense. To search for the possibility as a teaching material for that case, the teaching practice was done for 23 people the sixth grader in public elementary school class. As a result, the following ①-③ were obtained. ① Most children can do cutting tetrahedron made from paper open, and making various plane figures including the rectangle. ② As for how (how to cut it open) to make the rectangle, there are plurals, that becomes one factor, and voluntary communications can be done among children. ③ It is possible to become a progressive teaching material for the junior high school student (The example: search for a square making possibility etc.).