東北数学教育学会 年報第41号 2010年3月31日

三角形の求積について

－ 算法天生法指南 巻之二 の問題のいくつかの解法 －

萬 伸介
(宮城教育大学 教育学部)

概要：「算法天生法指南 巻之二」で取り上げられている長方形に内接する三角形の面積を求める問題のいくつかの解法を紹介する。これらは中学校・高等学校の教材として利用できる話題であると考えられる。

キーワード：會田安明、算法天生法指南、三角形の面積、
二次方程式、等積移動

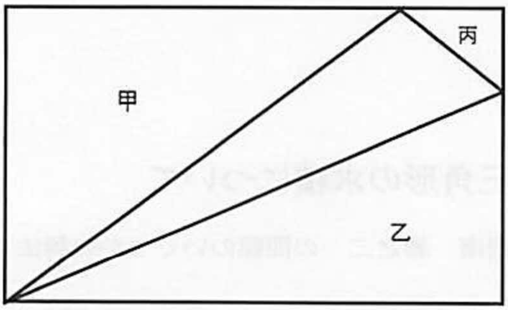
1．算法天生法指南 巻之二

資料として使用したものは山形大学附属図書館の蔵書

算法天生指南 巻之二
最上流元祖 會田算左衛門安明 編集
門生 市野金助茂喬 丸田源五右衛門正通 校訂

のコピーである。このコピーは、以前開催されていた和算の勉強会の機会に、東北大学名誉教授 土倉 保 先生から提供されたものである。このなかの十番目に記載されている問題について、その解法のいくつかを紹介する。「算法天生法指南」(計 五巻) は１８１０年 (文化７年) 會田算左衛門安明によって編集刊行され、当時の代表的な (和算の) 教科書といえるものである ([１])。

問題文は



今有三如レ圖直内容二三斜一只云甲積九十歩乙
積八十歩丙積一歩問二三斜積幾何一

であり、その現代語訳は

今、図のように長方形の内に三角形が含まれている。

甲の面積を９０歩、乙の面積を８０歩、丙の面積を１歩とする。

三角形の面積はいくらか。

というものである。

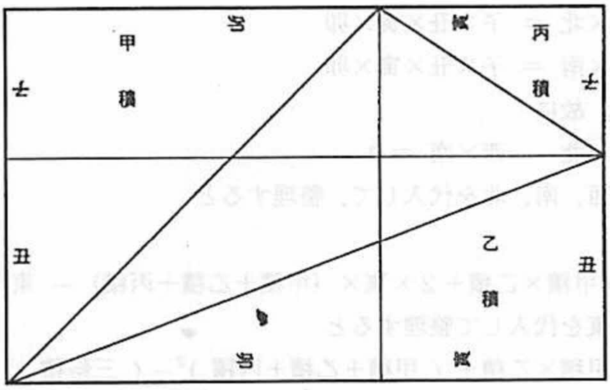
以下で紹介する解法は、私の二つの講演(*)でこの問題を紹介したことをきっかけに、宮城県内の高等学校に勤務している方々から寄せられた解法を加筆修正したものである。一つの問題に対する解法がいくつも有ることを知ることができること、それらが高等学校の二次方程式の解法に関わる授業での活用できること、等を考慮して紹介するものである。和算に関することが中学校、高等学校の教材として活用されることを期待したい。

2.「算法天生法指南　巻之二」の解法

和算の勉強会で土倉　保先生が解説された内容を吾妻一興先生（宮城教育大学名誉教授）が整理されたものを基に、それに加筆修正等を加えたものを以下に示す（問題文の次からの部分）。

答を云う（述べる）と、三角形の面積は２１歩[注1]である。

証明を示す（述べる）と、（以下のようである。）



未知数を三斜積（三角形の面積）とする。

図によって、それぞれを求めると[注2]、

甲積[注3]　＝{卯×（子＋丑）}÷2

乙積　＝{丑×（寅＋卯）}÷2

丙積　＝{子×寅}÷2

三斜積　＝（寅＋卯）×（子＋丑）－（甲積＋乙積＋丙積）

である。これらを撰んで代入すると

三斜積 ＝{(子×卯）÷2}＋{(丑×寅）÷2}

＋{(子×寅）÷2}

である。これを括って（整理して）

三斜積 ＝ －(丑×卯)＋(甲積＋乙積＋丙積)

である。すなわち、矩合（等式、「＝0」と表示されるもの）

－ 三斜積 －（丑×卯）＋(甲積＋乙積＋丙積)＝0

が求まる。これらを整理して

東 ＝（甲積＋乙積＋丙積)－ 三斜積

と置くと、東 ＝ 丑×卯　である。

これ（東）を甲積の2倍より減じ

西 ＝ 2×甲積 － 東　と置くと、西 ＝ 子×卯 を得る。

また

南 ＝ 2×乙積 －東　と置くと、南＝ 丑×寅　を得る。

また

北 ＝ 2×丙積　　と置くと、北＝ 子×寅　を得る。

よって、等式

　　東×北 ＝ 子×丑×寅×卯
　　西×南 ＝ 子×丑×寅×卯

が求まる。故に

　　東×北 － 西×南 ＝0

を得る。西、南、北を代入して、整理すると

$$-4\times甲積\times乙積+2\times東\times（甲積+乙積+丙積）-東^2=0$$

である。東を代入して整理すると

$$-4\times甲積\times乙積+(甲積+乙積+丙積)^2-(三斜積)^2=0$$

よって

$$(三斜積)^2=(甲積+乙積+丙積)^2-4\times甲積\times乙積$$

を得る。

故に答術（答を得る手法・手段）を施すと、左の如くになる。
手法を述べると、甲積、乙積、丙積の和の２乗より甲積と乙積の乗じたものの４倍を減じて、それを平方に開けば三斜積を得、間に合う。

（すなわち、

$$三斜積=\sqrt{(甲積+乙積+丙積)^2-4\times甲積\times乙積}$$

によって三斜積が求まり、これは間に合うものである。）

（注１） 面積の単位。矢野健太郎　他編「数学小辞典」（[５]）の付録によると、「１歩（ぶ）」は「3.30579 m^2」である。１町（町歩）＝１０反（反歩）。１反（たん）＝１０畝（せ）。１畝＝３０歩。

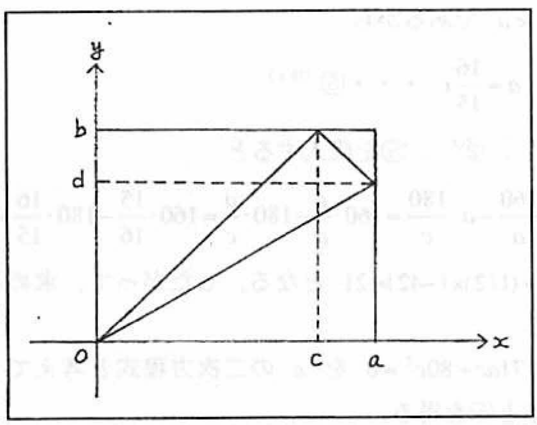
（注２） 現在の数学では頂点に「A」、「B」等と英大文字を付け、この２点を結ぶ線分（辺）を「線分 AB」（「辺 AB」）と表すのが一般的であるが、和算では辺に「子（ね）」、「丑（うし）」等と名前をつける。「辺 AB」の長さを「AB」と表すが、和算では「子」と名付けられた辺の長さを「子」と表す。これは、和算では図形の「辺」自体を議論の対象とすることがなく、常に「辺」はその長さが議論の対象となっているからであろう。

（注３）「甲」と名付けられた三角形の面積（の値）を「甲積」と表している。「（辺の長さ）卯に子と丑の和を乗じたものを２で割ったものが（三角形）甲の面積である。」を式では「甲の面積は、卯に子と丑の和を乗じたものを２で割ったものに等しい。」と順序を逆にして示すことにする。一般の三角形は「三斜」、直角三

角形は「勾股弦（こうこげん）」と表す。「勾（こう）」は直角を挟む二辺のうちでその長さが短い方の辺の名称で、「股（こ）」は直角を挟む二辺のうちでその長さが長い方の辺の名称である。「弦（げん）」は斜辺の名称である（[2]）。

3．座標を用いた解法

平面上に x-y 直交座標系を定め、下の図（図１）の様に長方形 ABCD と各辺上に点 E、F、G、H を定める。すなわち、A(0,0)、B(a,0)、C(a,b)、D(0,b)、E(a,d)、F(c,b)、G(0,d)、H(c,0) とそれぞれの点の座標を定める。ここに、$0<c<a$ 、$0<d<b$ である。



（図１）

三角形 AFD（甲）の面積が９０、三角形 ABE（乙）の面積が８０、そして三角形 ECF（丙）の面積が１であることより、

$$\frac{1}{2}bc=90 \quad \cdot\cdot\cdot ①、\quad \frac{1}{2}ad=80 \quad \cdot\cdot\cdot ②、\quad \frac{1}{2}(a-c)(b-d)=1 \quad \cdot\cdot\cdot ③、$$

が成り立つ。

点 F(c,b) から二点 A と E を通る直線 $dx-ay=0$ までの距離は $\dfrac{|cd-ab|}{\sqrt{a^2+d^2}}$ であるから、三角形 AEF の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+d^2}\frac{|cd-ab|}{\sqrt{a^2+d^2}}=\frac{1}{2}|cd-ab|$$

と表される。よって

$$cd-ab \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

を求めれば三角形 AEF の面積が求まる。

①より $b=\dfrac{180}{c}$ ・・・①′ 、②より $d=\dfrac{160}{a}$ ・・・②′

となり、これらを③に代入すると $\dfrac{1}{2}(a-c)(\dfrac{180}{c}-\dfrac{160}{a})=1$ を得る。これを整理すると

$$90a^2-171ac+80c^2=0$$

が得られる。上式は $(15a-16c)(6a-5c)=0$ と因数分解できるから、

$$a=\frac{16}{15}c \ 、\ a=\frac{5}{6}c$$

が成り立つが $c<a$ であるから

$$a=\frac{16}{15}c \quad ・・・⑤ \text{(注4)}$$

を得る。④に①′ 、②′ 、⑤を代入すると

$$cd-ab=c\cdot\frac{160}{a}-a\cdot\frac{180}{c}=160\cdot\frac{c}{a}-180\cdot\frac{a}{c}=160\cdot\frac{15}{16}-180\cdot\frac{16}{15}=150-192=-42$$

となるから、$S=(1/2)\times|-42|=21$ となる。したがって、求める三角形 AEF の面積は 21 である。

（注４）$90a^2-171ac+80c^2=0$ を a の二次方程式と考えて a について解き、$c<a$ に注意すると⑤を得る。

この解法において、現行「数学Ⅱ」の「点と直線の距離」が大きな役割を演じていることを指摘しておく。

４．面積比を用いた解法

長方形 ABCD の辺 BC 上に点 E 、辺 CD 上に点 F を定める。辺 DA 上に点 G を EG // CD となるように定め、辺 DAB 上に点 H を HF // BC となるように定める。さらに、線分 GE と HF の交点を I とする（図２参照）。そして、三角形 AFD の面積が９０、三角形 ABC の面積が８０、三角形 ECF の面積が１であるとする。

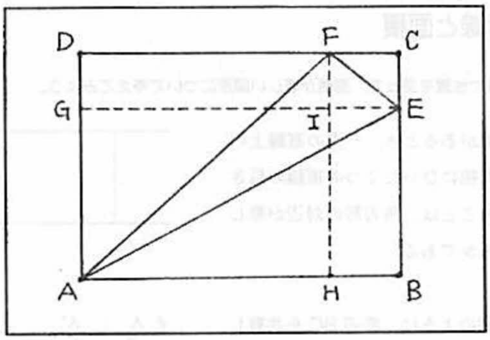
仮定より、三角形 AFD の面積（△AFD と表す。以下同様）は９０、すなわち、△AFD = 90、さらに △ABE = 80 、△ECF = 1 である。

今、長方形 FDGI の面積（□FDGI と表す。以下同様）を α、すなわち、□FDGI $=\alpha$ とおき、□IGAH $=\beta$、□EIHB $=\gamma$、□CFIE $=\delta$ とおくことにす

る。このとき

$\alpha + \beta = 90$・・・①、$\beta + \gamma = 80$・・・②、$\delta = 2$・・・③

が成り立つ。



（図２）

①と②より、$\gamma = \alpha - 20$ 、$\beta = 180 - \alpha$ が得られる。ところで、四つの長方形 FDGI、IGAH、EIHB、CFIE の面積の間には次の比例式

$$\square FDGI : \square CFIE = \square IGAH : \square EIHB$$

が成り立つ。よって、

$$\alpha : 2 = (180 - \alpha) : (\alpha - 20)$$

が成り立つ。この式を整理して

$$\alpha^2 - 180\alpha - 360 = 0$$

これより　$(\alpha + 12)(\alpha - 30) = 0$ を得るから、$0 < \alpha$ に注意すると

$$\alpha = 30$$

を得る。よって、$\beta = 150$ 、$\gamma = 10$ を得る。

ゆえに、求める三角形 AEF の面積は、

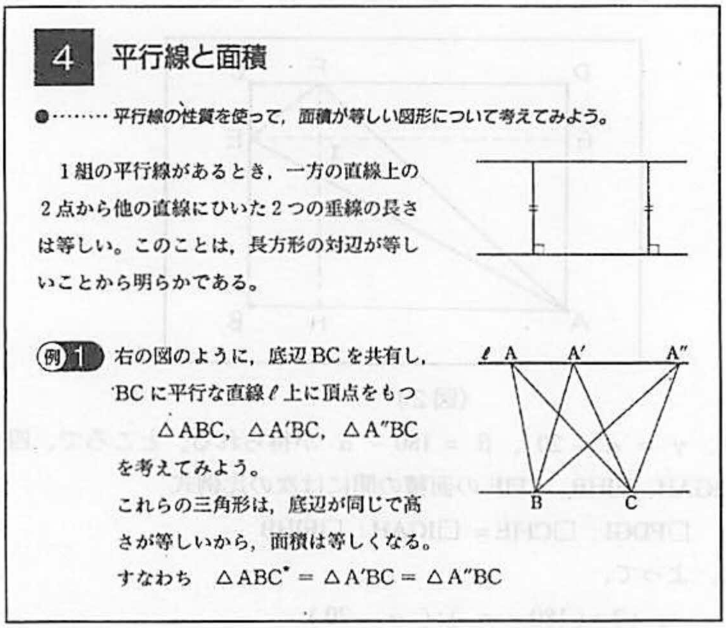
$$\begin{aligned}
&\triangle AEF \\
&= \square ABCD - (\triangle AFD + \triangle ABE + \triangle ECF) \\
&= (\square FDGI + \square IGAH + \square EIHB + \square CFIE) - (\triangle AFD + \triangle ABE + \triangle ECF) \\
&= (30 + 150 + 10 + 2) - (90 + 80 + 1) \\
&= 21
\end{aligned}$$

となるから、２１である。

５．等積移動を用いた解法

三角形の等積移動（面積を変化させることなく、三角形を他の三角形に変える

平面図形の移動）は、例えば、中学校数学科用「新編　新しい数学　２」（平成１７年検定済、平成１８年発行）（[３]）に以下のようにして取り扱われている（図３）。



４　平行線と面積

●……平行線の性質を使って，面積が等しい図形について考えてみよう。

１組の平行線があるとき，一方の直線上の２点から他の直線にひいた２つの垂線の長さは等しい。このことは，長方形の対辺が等しいことから明らかである。

例１　右の図のように，底辺 BC を共有し，BC に平行な直線 ℓ 上に頂点をもつ

△ABC，△A′BC，△A″BC

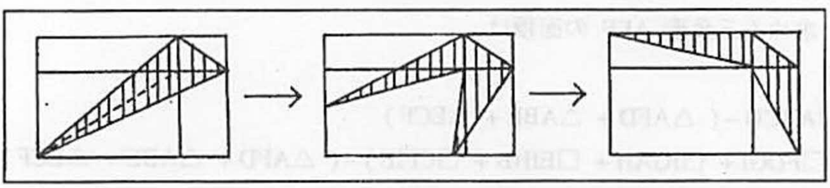
を考えてみよう。

これらの三角形は，底辺が同じで高さが等しいから，面積は等しくなる。

すなわち　△ABC = △A′BC = △A″BC

（図３）

三角形の底辺を固定し、頂点を通り底辺に平行な直線上のどこに頂点を移動しても三角形の高さが変わることがないので、三角形の面積に変化が無いのである。今考えている三斜（三角形）の等積変形の状況を下図（図４）に示す。

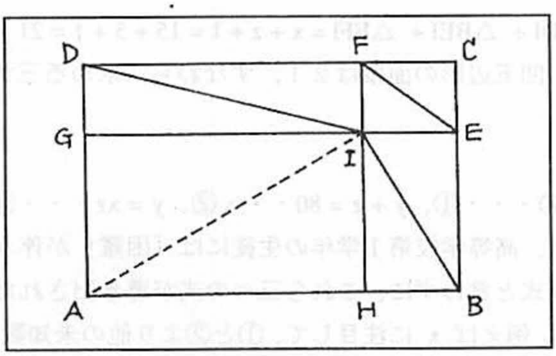


（図４.a）　　（図４.b）　　（図４.c）

面積を求めようとしている三角形は（図４.a）の縦線が描かれている三角形である。この三角形を三つの三角形に分割し、その内の二つの三角形に等積移動を行って三つの三角形をまとめた図形は（図４.b）の凹五辺形を経て、（図４.c）の縦線が描かれている凹五辺形へと変化する。そして、（図４.a）の三角形の面積と（図４.c）の凹五辺形の面積は等しいことがわかる。すなわち、三角形は等積変形さ

れて凹五辺形になったのである。よって、問題を「(図 4.c) の凹五辺形の面積を求めよ。」と言い換えることができる。

下の図（図 5）の長方形 ABCD において、四点 E、F、G、H はそれぞれ辺 BC、CD、DA、AB 上にあり EG // CD、FH // DA である。さらに、線分 EG と線分 FH の交点を I とする。このとき、凹五辺形 BEFDI の面積を以下のようにして求める。



(図 5)

三角形 FDI の面積を x 、三角形 AIG の面積を y 、三角形 BEI の面積を z とすると、長方形の面積はその対角線によって二等分されるから、

$\triangle FDI = \triangle DGI = x$ 、$\triangle AIG = \triangle HIA = y$ 、$\triangle BEI = \triangle HBI = z$

そして、仮定より $\triangle EFI = \triangle CFE = 1$ となっている。

三角形 AID は三角形 AFD （三角形　甲）を等積移動した図形であるから、$\triangle AID = \triangle AFD = 90$ 、すなわち

$x + y = 90$ ・・・①

が成り立っている。三角形 BEI は三角形 ABE（三角形　乙）を等積移動した図形であるから、$\triangle BEI = \triangle ABE = 80$ 、すなわち

$y + z = 80$ ・・・②

が成り立っている。次に、長方形 ABCD が四つの長方形に分割され、これら四つの長方形の面積について注目すると

□GIFD : □AHIG = □IECF : □HBEI

という比例式が成り立っていることがわかる。これより $2x : 2y = 2 : 2z$ が得られるから、

$y = xz$ ・・・③

が成り立つ。①より $y = 90 - x$ 。① - ②より $x - z = 10$ 、すなわち、$z = x - 10$

を得る。これら二式を③に代入して

$$90 - x = x(x - 10)$$

よって、$x^2 - 9x - 90 = 0$ という x の二次方程式が得られる[注5]。$0 < x$ に注意してこの二次方程式の解を求めると $x = 15$ 。よって、

$$x = 15 \text{ 、} y = 75 \text{ 、} z = 5$$

を得る。従って、凹五辺形 BEFDI の面積は三つの三角形 FDI、BEI、EFI の面積の和であるから

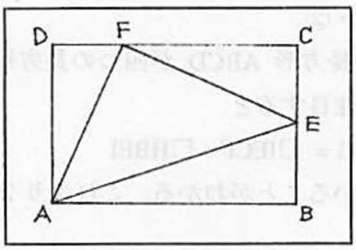
$$\triangle FDI + \triangle BEI + \triangle EFI = x + z + 1 = 15 + 5 + 1 = 21$$

である。よって、凹五辺形の面積は２１，すなわち、求める三角形 AEF の面積は２１である。

（注５）$x + y = 90$・・・①、$y + z = 80$・・・②、$y = xz$・・・③ の三元連立方程式を解くことは、高等学校第１学年の生徒には「困難」が伴うことがあると思われる。連立方程式と言わずに、これら三つの式が導き出されたその所に書き置き、一つの未知数、例えば x に注目して、①と②より他の未知数 y と z を x を用いて表す。そして、それらを③に代入して未知数 x の二次方程式導き出す。この手順を丁寧に説明し、二次方程式の解を実際に求める部分を生徒に課すことによって、「困難」を回避することを考える必要があろう。

６．関連する問題について

２００５年４月から６月にかけて名古屋市科学館で開催された「[特別展] 庶民の算術展」のカタログ（[４]）に関連する問題が紹介されている。その解説部分９４頁に、福島県田村市の秋田山龍穏院の算額（写真は２２頁）の第三番目の問題が現代語訳によって示されている。前述の４，５で取り上げた図形（図６参照）と表記を同じくするように書き直して以下に示すと



（図６）

長方形 ABCD の面積は１６であるとする。

辺 BC 上に点 E を三角形 ABE の面積が4となるように定める。

辺 CD 上に点 F を三角形 AFD の面積が2となるように定める。

このとき、三角形 AEF の面積を求めよ。

である。解説に「この問題は中学校レベルであるがとても面白い。提案者佐藤刻治の気持ちが伝わる。数学の先生方に是非この問題を教室で利用して欲しい。」と記述されている。ここでは解法については述べないが、点 E は辺 BC の中点であり、点 F は辺 CD の四分の一等分点（F は、辺 CD を 3：1 に内分する点、あるいは、辺 DC を 1:3 に内分する点）であることを指摘しておく。

以上で取り上げた「算法天生法指南　巻之二」と「秋田山龍穏院の算額」のそれぞれの問題の重要な点は、与えられている長方形の形が定められていないこと、すなわち、縦横の辺の長さの比が定められていない長方形に対する「問い」であることである。このような「自由さ」を許容する問題に接する機会が少ないので、その教育的価値は大きいと思われる。

謝辞

「三斜積」の解答を寄せられた　風間智恵先生（東北生活文化大学高等学校）、本田敏夫先生（宮城県築館高等学校）、渡辺幸雄先生（宮城県石巻工業高等学校）の三名の先生方に感謝申し上げます。

風間先生からは、数学教育研究会総会での講演後に、座標を用いた解法以外にも辺の長さを設定しての解法など多くの解法をいただいた。しかしながら紹介は一つだけにしました。本田先生からは面積比を用いた解法をいただき、数学教育研究会総会での講演の趣旨（「比と比例」）を生かした解法です。渡辺先生からは、県図書館での「等積移動」（一つの三角形を三つの三角形に分割し、その内の二つの三角形を等積移動する方法）について紹介した講演終了直後に、等積移動を用いた解法をいただきました。各先生方が私の講演を真剣に聴かれ、直ぐに解答を寄せられたことがこの小論作成の原動力となりました。本来ならば、4名の共著とすべきところですが、私の責任で加筆修正したところがありますので、単著とすることにしました。

注（＊）宮城県高等学校数学教育研究会総会（平成１９年５月１１日、仙台市泉文化創造センター）での講演「高等学校『数学』における比と比例について」および平成２０年度東北大学附属図書館 / 宮城県図書館合同企画展　関孝和没後 300 年記念「はっぴいさんぽう　―和算の世界へようこそ！―」での講演（平成

２０年１１月８日、宮城県図書館)「いろいろな見方で楽しもう！和算の問題」

引用・参考文献

［1］佐藤健一・大竹茂雄・小寺裕・牧野正博、「和算史年表」、東洋書店、2002 年.

［2］佐藤健一・安富有恒・疋田伸汎・松本登志雄、「和算用語集」、研成社、2005 年.

［3］杉山吉茂・俣野博　他、「新編　新しい数学　2」、東京書籍、2006 年.

［4］深川英俊　解説・監修、「庶民の算術展　世界がびっくり！絵馬に見る最強の謎解きパワー」、朝日新聞社事業本部名古屋企画事業チーム、2005 年

［5］矢野健太郎　他編、「数学小辞典」、共立出版、1968 年.

Find the area of a triangle

-- some solutions of the problem included in "Sanpo-Tensyoho-Shinan" --

YOROZU　Shinsuke

(Miyagi University of Education)

Abstruct: We introduce some solutions of the problem: What is the area of the triangle inscribed in the rectangle. This problem is included in "Sanpo-Tensyoho-Shinan Maki-no Ni". We think these solutions give good teaching materials for lower or upper secondary school teachers.

Keywords: AITA Yasu-aki（會田安明）, Sanpo-Tensyoho-Shinan（算法天生法指南）, area of triangle, quadratic equation, equivalent transformation(toseki-idou)