東北数学教育学会 年報第41号 2010年3月31日

図形の対称移動と証明問題作り

福島大学人間発達文化学類
森川幾太郎

概要 中学校における幾何分野の学習では、考察対象図形の性質探しや与えられた命題の証明は生徒の手で行われてはいても、自分の手で証明問題を作る、という授業例は残念ながら多くはない[1]。
本稿では、証明問題作りに挑戦する生徒を生み出すことを目的に、角の二等分線や線分の垂直二等分線をはじめ合同に関わる命題と対称性の関わりに焦点を合わせていくつかの論証問題を提示する。

検索語 角の二等分線 線分の垂直二等分線 直角三角形

1 はじめに

1998年10月、山形大附属中2年生に対して、証明題の作題は自宅で行う、という条件ではあったが、当時、同校に勤務しておられた田中克氏に論証問題作りを指導して頂いた。この課題に対して生徒から寄せられた解答例と解答にみる特徴は後に「資料1」として報告する。なお、この「宿題」を出した際、併せて、「合同に関する証明を行うとき、その論証対象とする事項はどのような図形の移動で重ね合わせができるかに注意したか」も質問した。この問に対しては、この設問を設定する際に予測した通り、全員が考えていないと回答した。ただ、次のように書いている生徒もいた。

(証明のときに移動のことを) あまり注意していなかったけど、移動なども利用したりすると、さらに楽に (証明が) できることがわかってよかった

この1998年における実践では、「資料1」で触れるように、正方形と平行四辺形の辺の長さに関わる課題を一題ずつ取り扱ったに過ぎなかった。本稿では、合同に関わる論証問題を扱う折り、その考察対象とする命題がどのような合同変換で重ね合わせができる図形に関わっているかにまず目が向く生徒を育てることを目標に、角の二等分線や線分の垂直二等分線に関わるいくつかの問題を提示する。さらに、現在の標準的指導では相似学習の中で扱われている「三角形の中点連結定理」を点対称移動の観点から扱うことやその命題の活用例として「直角三角形の斜辺の中点に関わる命題」の扱いにも触れる。本稿で例示する事柄を契機に、合同に関わる数多くの命題が合同変換と関わりをもつことを知り、その観点から合同に関する命題を証明するための方針が立てることができ、併せて生徒の手で合同に関する論証問題が多数作成されることを期待したい。

ただ、今回例示する問題のいくつかについてはその論証過程が通常教室で扱うものよりも長い。そこで、これらの問題に生徒が取り組めるように証明する事項を小問に分割するなどの工夫を行った。ところで、二等辺三角形の作図法を検討する、という観点からではあるが、

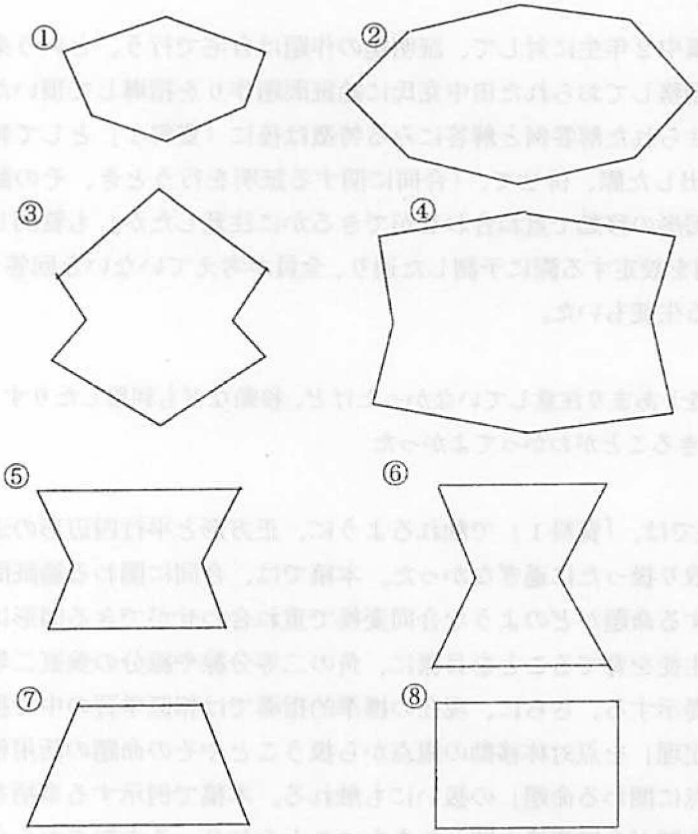
黒木伸明氏も様々な機会に二等辺三角形の取り扱いに関して提案されておられる[2)]。今回、その提案にも学んで作題した。なお、対称軸や対称の中心は不動直線や不動点としての意味ももつが、本稿では作図法の工夫を扱わないこともあって、これらには触れないことにした。また、「注意２」の後段で背理法も扱った。これは、背理法を指導する機会があったら試みていただきたい、という程度のものであって、今回行う提案の中心的課題ではない[3)]。

2　提案したい事柄

以下、対称性に関わる事柄を、論証問題の作題も含めて、６点にわたって提案する。

（Ⅰ）対称性をもつ直線図形の軸の本数による分類

問１　下に８個の図形がある。これを、様々な観点から分類した。それぞれ、どのような観点で分類しているか指摘せよ。



分類法

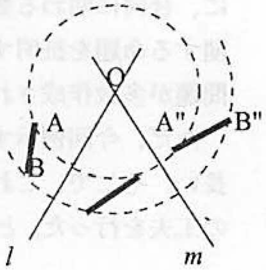
Ⅰ 次の３つのグループに分類
{①、⑤、⑥}
{②、③、④}
{⑦、⑧}

Ⅱ 次の２つのグループに分類
{①、②、⑦、⑧}
{③、④、⑤、⑥}

Ⅲ 次の２つのグループに分類
{①、②、③、④}
{⑤、⑥、⑦、⑧}

Ⅳ 次の２つのグループに分類
{①、③、⑤、⑦}
{②、④、⑥、⑧}

問２　点Ｏで交わる２直線 l と m とがある。この２直線を軸として順に線対称の位置に与えられた図形を移動した。このとき、対応する点ＡとＡ"、ＢとＢ"などの間にどのような関係があるか説明せよ。



また、そのことによって、問１で扱った図形②、④、⑥、

⑧を例にして、対称軸を２本もつ図形にはどのような特徴があるか整理せよ。

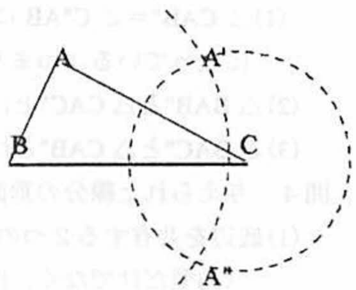
問３　線対称な四角形および六角形について、次の問に答えよ

(1)線対称な四角形と六角形を図示し、それらを対称軸の本数で分類せよ

(2)対称軸が偶数本の図形についてその特徴をあげ、それらを円を用いて作図する方法を述べよ。特に、対称軸の本数が４の倍数である図形についてその特徴を、例えば正十角形などと対比するなどして、整理せよ。

問４　対称軸を偶数本持つ五角形や七角形を考えることができるかどうか判定せよ。

(Ⅱ)線分の二等分点、垂直二等分線



問１ △ABCを定める。点Bを中心に半径CAの円と点Cを中心に半径BAの円とをそれぞれ描く。その２つの円の交点のうち、直線BCに対してAと同じ側にあるものをA'、直線BCに対してAと反対の側にあるものをA"とする。さらに、線分A"AとBCとの交点をM、線分A'BとACの交点をD、直線BAとCA'との交点をEとする。

このとき、以下の事柄を証明せよ。

(1)Mは線分BCの中点である。

(2)はじめに(2-1)～(2-3)を証明し、それらをもとに(2-4)を証明せよ。

(2-1)△ABC≡△A'BC

(2-2)△BDCは二等辺三角形

(2-3)△BDM≡△CDM

(2-4)直線DMは線分BCの垂直二等分線

(3)はじめに(3-1)と(3-2)を証明し、それらを用いて(3-3)を証明せよ。なお、それらの証明の際、上の(1)および(2)で証明した事柄を用いてもよい。

(3-1)△EBCは二等辺三角形

(3-2)△EBD≡△ECD

(3-3)直線EDは∠Eの二等分線であり、線分BCの垂直二等分線である

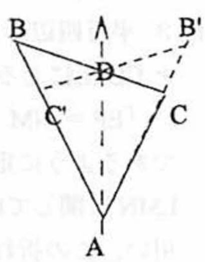
(4)以下の事柄を証明せよ。

(4-1)△AMA'は二等辺三角形

(4-2)△AMD≡△A'MD

(4-3)直線MDと線分AA'とは直交し、AA'はMDによって二等分される。

(4-4)△ABCと△A'BCとは直線MDに関して線対称の位置にある。

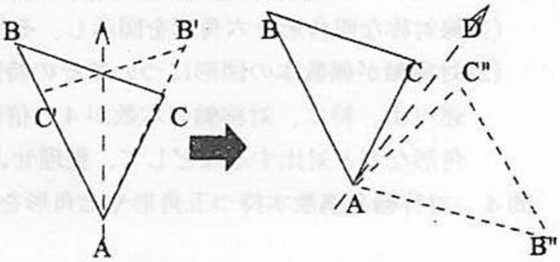


問２　△ABCを頂点Aを固定してC'が直線AB上に、また、B'が直線AC上にあるように、線対称の位置に移動してできる△AB'C'について次の問に答えよ。

(1)△AB'C'を作図する方法を述べ、その方法によって△AB'C'を作図せよ。なお、この場面では対称軸が与えられていないことに注意したい。

(2)辺 BC と辺 B'C'の交点を D とする。直線 AD は、2つの△ ABC と△ AB'C'についての対称軸であり、それ故、∠ BAB'の二等分線であることを証明せよ。

問3　△ ABC を頂点 A を固定して点 B'が直線 AC 上に、また、点 C'が直線 AB 上にあるように、線対称の位置に移動し、それを、さらに点 A のまわりにある角度分回転して△ AB"C"を作る。



このとき、以下の事柄を証明せよ。

(1)∠ CAB"＝∠ C"AB に注意して、∠ CAC"の二等分線 AD は同時に∠BAB"の二等分線になっている、つまり、△ ABC と△ AB"C" は AD に関して線対称の位置にある。

(2)△ BAB"と△ CAC"とは中線 AD を共有する二等辺三角形である。

(3)△ BAC"と△ CAB"とは合同で、直線 AD に関して線対称の位置にある。

問4　与えられた線分の垂直二等分線の作図法を次のいくつかの観点で整理せよ。

(1)底辺を共有する２つの二等辺三角形をもとにする場合。

(凸型だけでなく、凹型もあることに注意する)

(2)底辺を共有する合同な２つの三角形をもとにする場合。

問5　与えられた角の二等分線の作図法を次の観点で整理せよ。

(1)角の頂点と角を構成する直線を共有する２つの二等辺三角形をもとにする場合。

(2)角の頂点と角を構成する直線を共有する合同な２つの不等辺三角形をもとにする場合。

(3)上記(1)および(2)の方法は、結局は、

軸を共有する２つ以上の線対称図形、あるいは、線対称の位置にある図形について対応する線分の交点を結ぶことによって求められる

ことを説明せよ。

(Ⅲ) 円と点対称図形

問1「点対称図形では、対応する点を結ぶ線分は同一点で交わり、その点でそれぞれの線分が二等分される。したがって、点対称図形では対応する頂点毎にそれらを結ぶ線分の中点を中心とする同一円周上にある。」

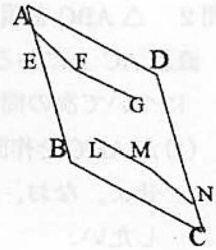
の他に、点対称な直線図形の特徴を平行四辺形に関わる性質を参考にして理せよ。また、そのいくつかを取り上げ証明せよ。

問2 平行な２直線は点対称の位置にあることを、「平行線では錯角が等しい」に注意して説明せよ。

問3 平行四辺形 ABCD で、AE＝CN になるように E と N を AB と CD 上にとる。以下、線分 EF と NM、FG と ML とを

「EF＝NM　かつ　EF ∥ NM、FG＝ML　かつ　FG ∥ ML」

であるように定める。このことを繰り返して作る折れ線 EFG…LMN に関して成り立つ性質を見つけよ。また、それらの性質を用い、この折れ線を作図せよ。



(IV) 直角をつくる

問1　次の各命題を証明せよ

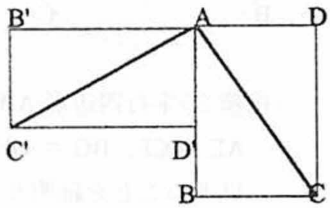
(1-1)　２本の同じ長さの線分 AC と BD を用意し、それぞれの中点 M と N を一致させて、四角形 ABCD をつくる。この四角形の各頂角は直角である。

(1-2)　向かい合う辺の長さが二組とも等しい四角形で、一つの角が直角であるとき、他の三つの角もすべて直角である。

(1-3)　辺 BC を底辺とする二等辺三角形 ABC で、AB を B の反対側に延長し、AB = AD となる点 D をその延長線上に定める。△ BCD は∠ C を直角とする直角三角形である。

(1-4)　線分 BC を直径とする円をつくる。この円周上に点 A を定めると∠ BAC は直角である。

(1-5)　辺 BC を底辺とする二等辺三角形 ABC で、点 D と E とを AD = AE であるように辺 AB、AC 上にそれぞれ定め、さらに、辺 DE を底辺とする二等辺三角形 DEF を作る。すると、直線 AF は辺 BC に垂直である。

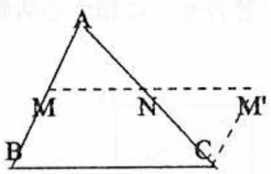


(1-6)　頂点 A を共有する合同な２つの長方形 ABCD と AB'C'D'を、図のように定めると AC と AC'とは垂直である。

(注記)問 1-1 で取り上げた性質は、Gerdes によれば、アンゴラで家を建てるとき、この方法で直角をつくる、という[4]。

(V)三角形の中線定理と直角三角形の斜辺の中点

問1　「△ ABC で AB の中点を M、AC の中点を N とすると MN は BC と平行で、その長さは BC の半分である。」の証明を「△ AMN を N を点対称の中心にして、点対称の位置に移動し、△ CNM'を作る」ことによって行う。



以下の事柄を証明せよ。

(2-1)三点 M、N、M'は一直線上にある。

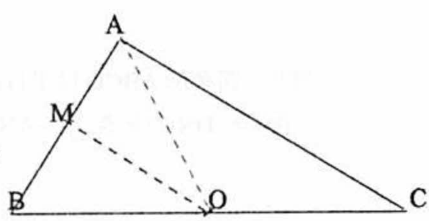
(2-2)四角形 MBCM'は平行四辺形である。

(2-3)MN は BC に平行で、その長さは BC の半分である。

問2「∠ A が直角である直角三角形 ABC の斜辺 BC

中点 O について AO = BO = CO である」

を次の手順で証明せよ。



(3-1)AB の中点を M とするとき、MO は辺 AC に平行

(3-2)△ ABO は二等辺三角形

(3-3)AO = BO = CO

問4　直角三角形の頂点は、その斜辺を直径とする円周上にあることを説明せよ。

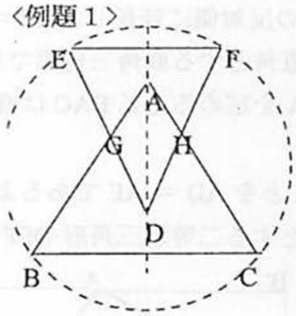
(VI)証明問題をつくる

合同に関わる数多くの命題が考察対象図形やその構成要素が対称性に関わりをもったり、回転に関連していることを確認し、さらに、以下のことも確認する。

★線対称図形は、対称軸を共有する線対称図形を組み合わせることによって作成される。
★点対称図形は、対称の中心を共有する点対称図形の組み合わせによって作成される。
★回転図形は、回転の中心を共有する回転図形の組み合わせによって作成される。

これらの学習を行った後、合同に関わる命題の作成を行わせ、合わせてそれらの証明に取り組ませる。

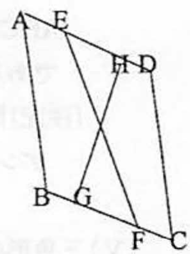
〈例題 1〉



二等辺三角形 ABC と DEF とを図のように、それぞれの中線を一致させ、頂点 A が △DEF の内部にあるように定める。また、AB と DE の交点を G、AC と DF の交点を H とする。

以下の事柄を証明せよ。
(1) DG = DH
(2) GH ⊥ AD
(3) G と H とは AD に関して線対称の位置にある
(4) BD = CD
(5) BE = CF

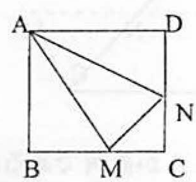
〈例題 2〉平行四辺形 ABCD の向かい合う辺 AD と BC 上に、図のように、AE = CF、BG = DH である点 E、F、G、H を定める。
以下のことを証明せよ。
(1)四角形 EGFH は平行四辺形
(2)線分 EF と GH の交点は線分 AC と BD の交点と一致する



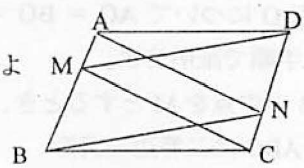
資料 1；生徒が作成した証明問題の特徴

① 1998 年に山形大学附属中学校で行っていただいた授業で扱った命題をまず紹介しよう。これらの命題の証明は生徒一人ひとりに行わせ、証明終了後「答合せ」に類する活動は行わなかった。

問 1　四角形 ABCD は正方形で、CM = CN のとき、
△AMN は二等辺三角形であることを証明せよ。



問 2　四角形 ABCD は平行四辺形である。
BM = DN のとき、△ANB ≡△CMD を証明せよ



②「宿題」で出した論証問題づくりに対し、生徒から寄せられた回答例といくつかの特徴

*1 証明につまずいた生徒は証明問題の仕組が見えていない

授業中に扱った上記した問題の証明は、表 1 に見るように、両問ともほぼ 90%の生徒が成功した。この証明を行った後、これらの問はそれぞれどのような合同変換をもとにして作成されているのかを生徒に指摘させたが、75%の生徒が正答であった。ところで、この問で

証明につまずいた生徒の大半が問題で用いられている変換を正しく指摘できなかった。このことから、証明につまづいた生徒はその問題構造を変換の観点からとらえるのが得意ではないことが見えてくる。

表１

問１に対し	この問に使われる変換の指摘 線対称と正解	無答など
証明 完成	28名	7名
未完	1	3

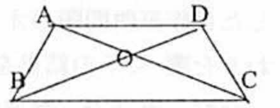
問２に対し	この問に使われる変換の指摘 点対称と正解	無答など
証明 完成	26名	8名
未完	1	4

*2 生徒が作成した問題は、線対称移動や図形の線対称性に注目したものが多かった

「論証問題の作成」を課題とする宿題では、図形の線対称移動、点対称移動をもとに作問するよう指示したが、全員が指示に従い論証問題を作成してきた。まず、生徒が作題した証明問題を２例紹介しよう。

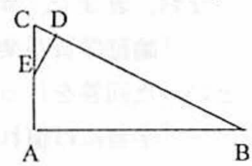
事例１　四角形 ABCD は等脚台形です。

△BOC が二等辺三角形であることを証明しましょう。



事例２　△ABC は角 A=90°の直角三角形である。斜辺 BC 上に BA＝ BD となる点 D をとり、点 D から斜辺 BC に対し垂線を引き、辺 AC との交点を E とする。

この時、AE＝DE であることを証明しなさい。



生徒が作成した問題で用いられている変換あるいは図形は表２に見るように、点対称あるいは回転といった、いわゆる正の合同変換に関わるものが多かった。なお、表２は、生徒の作った問題で用いられている実際の変換と生徒が申告した変換との適合の様子や問題の独創性、さらに問題文は正しく文章表現できているか、という項目も入れて作成した。

表２

独創の度合が	指摘した変換が適合している回答 線対称移動		点対称移動		回転＋平行		適合しない回答		計
高い	9	(5,4)	4	(3,1)	1	(0,1)	1	(0,1)	15
中間	1	(0,1)	2	(1,1)	0	(0,0)			3
低い	2	(2,0)	12	(7,5)	4	(3,1)	3	(0,3)	21
計	12	(7,5)	18	(11,7)	5	(3,2)	4	(0,4)	39

表中の数字は回答者数で、（　）内の数字は、順に、仮定、結論の記述がしっかりした命題、仮定あるいは結論の記述が不十分な命題を作った生徒の数を表す。

○表２から以下の事柄が見えてくる。

▼ 生徒の作った問題で実際に用いられている運動と生徒が申告した変換との間に乖離が生じた事例は１割にとどまった。

▼ 独創度の高い問題は線対称に関わるもので、反面、回転や点対称に関わる問題では独創の度合いが低い問題が多かった。

▼ 命題を正確に表すことができる、即ち、各図形の決定条件を正確に使える生徒は半数程度にとどまった。これは、

＊ 問題に添えて図を描き、条件を図に語らせたため、図形の決定条件を仮定として書くことを省略した

ためなのか、それとも、

＊ 図形の決定に対する認識の度合いが低い

ためなのかは不明である。ここに見るように、独創の度合いが高い問題を作っていても、命題の表現能力は高いとはいえない生徒が多いことにも注意したい。

*3 独創度の高い問題を作成した生徒は論証学習への参加意識が高い

生徒達は*1 で見たように高い証明能力を持っていた。しかし、論証学習に全員が積極的に取り組んでいたわけではない。この学習に対する参加度の度合いと上記した自作証明問題のオリジナル度との関わりを調べ、その結果を表３として示した。

表３ 論証の授業への参加意欲と自作証明問題のオリジナル度

問題のオリジナル度	授業への参加意欲 高い	低い
高い	11名	4名
中位	1	2
低い	8	13

なお、表３で、参加の度合いが高い生徒とは、

「論証学習が楽しかった」、「はじめは大変だったが現在は考えに慣れた」

といった回答を行った生徒で、反対に、参加の度合いが低い生徒とは、

「学習には慣れたがまだ大変さを感じる」、「証明は難しくていや」

と述べた生徒である。表に見るように、自作証明問題のオリジナル度が高い生徒ほどこの論証学習への参加感の度合いが高いことが見える。

上に見たように、合同変換をもとにした論証問題作りは生徒が十分取り組むことができる課題である。なお、上で報告した「調査」で扱った問題の作成や結果の集約に際しては、当時、山形大学学生であった、三戸学君に協力を仰いだ。

注記２；三角形の中線定理と直角三角形の斜辺の中点に関する命題の別証明

三角形の頂角の二等分線による対辺の分割比に関する命題や三角形の重心に関わる中線の内分比など平行線や線分比に関する命題は、拙編著(2006)『あなどるな数学　図形編』(きょういくネット) で扱ったように、三角形の面積公式を前提にすれば、相似に関わる諸性質を用いなくとも導くことができる。今回、三角形の面積公式を前提に、(V)「三角形の中線定理と直角三角形の斜辺の中点」で扱った証明とは異なる証明をこれらの命題に対して与えよう。なお、三角形で底辺の長さと高さがともに等しいときそれらの面積が等しいことは『ユークリッド原論』第一巻の命題 37 および命題 38 で、合同な平行四辺形に命題を還元して扱われている[5]。

①平行四辺形と平行線の性質

問１　以下の事柄を証明せよ。

(1-1) 平行四辺形 ABCD で、頂点 A と D とから対辺 BC に垂線 AE と BF をひくと、△ABE

と△DCFとは合同である。したがって、△ABEと△DCFとは面積が等しい。

(1-2)底辺BCを共有する△ABCと△DBCとの面積が等しいとき、直線ADとBCとは平行である。

(1-3)線分BCと線分EFとは共に直線BC上にありその長さが等しく、△ABCと△DEFとの面積が等しい場合、線分ADと直線BCは平行である。

問2　△ABCで、辺ABと辺ACの中点をM、Nとすれば、MNはBCと平行であり、その長さはBCの半分であることを、次の手順で証明せよ。

(2-1)△ABN＝△ACM＝$\frac{1}{2}$△ABC

(2-2)△MBN＝△MCN＝△AMN

(2-3)BCの中点をOとすると、△OAB＝△NAB

(2-4)MNはBCに平行で、また、ONはABに平行で、四角形MBONは平行四辺形

(2-5)三角形の中点連結定理が成り立つ

問3「∠Aが直角である直角三角形ABCの斜辺BCの中点OについてAO＝BO＝COである」を次の手順で証明せよ。

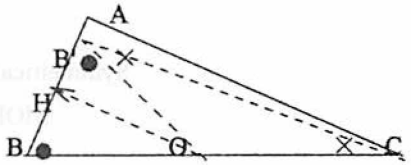
(3-1)Mを辺ABの中点とするとき、∠OMB＝∠A＝直角

(3-2)△AOBは二等辺三角形であり、したがって、AO＝BO＝COが成り立つ。

②－〈1〉背理法を用いた直角三角形の斜辺の中点に関する性質

証明；∠Aが直角の三角形ABCでBCの中点をOとする。その点Oより、辺ABに対し、垂線OHをおろし、その垂線の脚をHとする。

△BOHをOHを軸にして折り返すと、∠BHOが直角であることにより、OBをOHに関して折り返した線分はHA上にある。いま、BとOHに関して対称の位置にある点をB'とする。そして、△BB'Cを作ると、その三角形は∠BB'Cが直角の直角三角形になる。



その理由は、△BB'Cが二つの二等辺三角形△BOB'と△OB'Cで作られ、

∠BB'C＝●＋×＝直角

となっていることによる。こうして、点Cから直線ABに異なる2本の垂線が引けることになる。これは、AとB'とが異なる点であるとしたためである。つまり、AとB'とは同一点であり、直角三角形は2つの二等辺三角形に分割されることがわかり、命題が証明された。

②－〈2〉背理法を導入するために扱う命題群

背理法の導入は、以下のように、三角形の内角和定理をもとに図ることになろう。

問1「三角形では直角、あるいは鈍角が2つ以上含まれることはない」ことを、それらの角が2つ以上あったらどのようなことが起きるか、に注意して証明せよ。

問2「四角形では鈍角は最大でも3つである」ことを、それらの角が4つあったらどのようなことが起きるか、に注意して証明せよ。

問３　直線 l 外の点Ａから l に下ろした垂線は２本以上はないことを証明せよ。
問４　直線 l 上に定めた異なる２点ＡとＢとから l に対する垂線を引くと、この２直線は点を共有しないことを証明せよ。

参考文献等

1) 段裕朗が行った証明問題作りの授業例が竹内芳男・沢田利夫『問題から問題へ』（東洋館 1984）に所載されている。岡本光司他(1998)『生徒が「数学する」数学の授業』には、三角形、四角形の性質調べに関わる報告はあるが、命題作りは扱っていない。また、1980 年代に幾何教育の教育課程に大きな影響を与えた、Pierre van Hiele もその著"Structure and Insight"（Academic Press, 1985）で、洞察力の育成の大切さには触れても論証問題作りに関わる提案は行っていない。

2) 例えば、黒木伸明「図形の分類活動の数学的意義について」、数学教育実践研究会「算数・数学の授業 no. 115」, pp. 125-130,2004

3) 2001 年、山形大学附属中学校で３年生を対象に行った「選択授業」の一テーマとして「三角形の辺や角に関わる不等関係を考察する」を組み込んで頂き、当時、同校に勤務していた小関広明氏に、６時間扱いで、指導して頂いた。この授業の様子は、森川幾太郎「二等辺三角形と不等辺三角形」, 数学教育実践研究会「実線研究第 20 号] (pp.1-11,2007) で報告した。なお、この授業では、教材作りや各種調査のまとめで、当時、山形大学の学生であった佐々木章子君にお世話になった。

4) P.Gerdes "On Culture, Geometrical Thinking and Mathematics Education", Educational Studies in Mathematics vol. 19, pp. 137-162, 1988

5) T.L.Heath "Euclid The Thirteen Books of The Elements vol.1", Dover, pp. 326-336, 1956

Symmetrical Figure and Making some Problems to Prove

MORIKAWA Ikutaro (Fukushima univ.)

From 1990s a few mathematics teachers did trials to change junior high school students from receiver to sender on geometry teaching by treating many Japanese traditional problems as one subject material; They demanded his/her students to make new propositions by using their old problems as samples or objects to remake from newly viewing points.

In this paper, we propose another teaching method to change students as sender by making new propositions on some congruent figures by setting one summarized lesson to the proofs about congruent propositions; to do the asking, we recognize that many propositions treated in the lesson about congruence are induced by viewing the objective figures such isosceles triangle or parallelogram as symmetrical figure. By the recognition, at first we ask students to find the adequate drawing methods with reasons to the bisector for each given angle as the axis to them And more we treat the methods to draw the midpoint to each given segment with proofs as center of point symmetry. And then, we ask 8th graders to make some propositions related to congruence as exercise on deductive geometry by finding symmetrical things in many figures.