ユークリッド「原論」を読み返しながら書くカリキュラム論：

高等学校の数学に平面幾何の復興する日を夢みて

板垣芳雄
（宮城教育大学名誉教授）

「証明」は中学校の図形領域で教えている。高校の数学にはそれに続く平面幾何は設定されていない。中学校だけでは、分量、程度ともに非常に限定されたものになり、少しでも複雑になるような定理について考えさせることはなく、教導の重点が証明文を綴ることに置かれることはない。授業の中身は、証明を生徒に実行させることではなく、「証明」についての知識を雑多に授けることになって、中学２年，３年の平面図形についての内容を教科の中でも孤立したものにしている。そもそも定理を積み重ね、証明そのことの実行に集中するのは中学生の段階では無理である。かつて学習体験が思考の鍛錬として記憶され、数学教科を越え、文系進学者にも印象強く働いた幾何、「証明を綴ること」の場を提供していた総合幾何、その論証を中心に据える平面幾何の復権が改めて模索されるべきと説く。

はじめに.

初等幾何の教育のあり方について考えることは、もうないだろうと思っていた。どんな幾何の定理であれ、その証明法を思い出そうとすることもないであろう。証明のようなことに取り組む気力が自分になくなっていることは、日々の起居のなかで十分に自覚される。

中学校数学の図形領域の論証について、指導要目とその並びから、すなわち要領が規定している制約からくる内容の不備は多々あることは承知しているつもりであった。だが、今あるように成り来たりて、これからも成るように成るだけのことであるという思いに気持が支配されるようになってみると、不備についての私人の不満などは小さいことに思えてくる。

たとえば、「二等辺三角形」の語を算数教科から教え、中学で「二等辺三角形の両底角は等しい」と記しその「証明」について教えている。

このことについては何度か発言したことであるが、生徒は、命題が「証明」されてこそ、三角形が「二等辺なら」「両底角が等しく」なることを堅く認識する、わけではない。

地面に立つ２本の柱が作る三角形を見て、あるいは脚立の三角を念頭にしたとき、「両底角が不等なのに等脚な三角形」はないし、「２つの脚の長さは等しくないが両底角が等しい三角形」が存在しないことは、「証明」など知らなくとも、生徒は当然であると認識するであろう。

それをこと荒立てて、定理と名付け、折り紙を折って二等辺三角形を切り取ったり、辺や角を実測してみたりするのではなく、厳密に、筋道立てて説得する方法だと説明しながら、その「証明」について語るのであるから、つい「一般に」や「普遍的に」のような難解な語を口に出したくなる。ご苦労なことに、「証明」のことをくだいて熱心に教え込もうとするほどに、教師には悩ましい教導の内容である。

日常普段の認識の言質ではない物言いの「定理」や、気楽な納得を超える「証明」の学習を、なぜ、我々は学校数学で生徒たちに強いているのであろうか。

そのなぜに対するわたしの答えは、泰西の地の古代文化がユークリッドの「原論」を生み、この著作に二等辺三角形の「定理」とその「証明」が載っていたからである。

「原論」は中世まで中近東の地で読み継がれ、ルネサンス期を経て後いろいろな言語に訳されて、数学の精髄として近代の教育でも主要科目の一翼を担い続けた。

我が国の学校は、西欧近代の制度を真似て設立され、音楽を、体育を見習い、理科や数学の教科書は彼の地のものを翻訳、翻案したものを使用して出発した。

幾何は、代数とともに、国の欧化政策の下、エリートであった中学生が学ぶものとされた。敗戦後は、新制の高等学校で学ぶものとなる。その後、欧米の改革に追従して数学教科の屋台骨を取り改え、新装したこともあったが、そういう国定カリキュラムの迷走の時を経ても、指導内容から幾何の「証明」は除去されることなく、今もって二等辺三角形の定理を教えている。

思えば、「定理」、そして「証明」と記述するのは数学教科の中にしかない。現代の数学が引き継いでいるこの語り口は、歴史をさかのぼれば古代ギリシアの書「原論」にたどり着く。

言うまでもなく中学校の図形領域で「原論」を源流とするのは二等辺三角形の定理だけでなく初等幾何全般に及び、別の例を一つだけ上げれば、現在の教科書にある定理「三角形の内角の和は２直角である」の証明法は「原論」にあるのとそっくりである。「原論」の定理・証明を、２３００年の時を飛び越えて日本の義務教育の書が伝えている、その歴史の長さを思うとき、思いは感嘆に、さらに驚嘆へと移行する。

ともあれ、還暦から１２年が過ぎ、隠居を夢見ている我が身が、教科内容は「成るように成る」と達観していたのを忘れて、図形・論証教育のことをいろいろに考える羽目になったのは、「数学科教育法」の臨時講師で、学生に「原論」の数学を語り「原論」を紹介しようと企てたことに始まる。

講義では最初に第Ⅱ巻の最後の命題１４を採りあげ、それをめぐって何回か講義し、準備に第Ⅱ巻の他の命題も読み進むうちに、命題内容を代数の文字式にして考えたのではし

っくりしないと感じるようになった。第Ⅲ巻のおしまいのところを占める「方べき（冪）の定理」についても代数式に書いて話したのでは「原論」の記述展開の筋から離れてしまう。

そのうち、「原論」には代数式だけでなく、中学校の図形領域で教えているような幾多の記号のないことが強く意識されようになった。「原論」の書き方が質素で素朴なものに感じられるとともに、今まで気にしたこともなかったことが気になって、新たな興味が内から湧いてきた。その心情に向き合うことが、この論稿を書くことに向わせたのであった。

もっとも、「原論」の書き方の原始的なのに心が共鳴するのはいいが、その気持を現代の授業の形に準備する体力がない。若い学習者の熱意からも縁遠くなって、彼・彼女らの置かれている学びの状況を推測する意欲も希薄になっている。

小テストをする余裕もないまま７週目に中間試験をしたところで、わたしは大学院の学生に内容・方法論を話しているような調子で講義しているのかもしれないと振り返ることになった。相手は学部３年生である。

平成２１年の大学３年生は、幾何の「定理」や「証明」のことは中学で習ったきりで、高校では勉強していない。中学の「定理」を思い出すような講義には大学の１年、２年でも出会わなかったらしい。定規とコンパスには、みなが皆、中学卒業後の６年間、触ったことがないと考えられる。講義回数で中間の折り返し点を過ぎる頃に、彼・彼女等の置かれている状況をやっと意識するようになった。

「ピタゴラスの定理」についてどんな証明を習ったか尋ねて各人に書かせたら、しっかり記憶している学生もいるが、習ったかどうかも忘れているのが多数を占めている。もちろん、それは学生個々人が受けた授業の指導法を反映していると推定することは可能である。この三平方の定理への教師の思い入れようも様々であろう。

学生の習ったという「ピタゴラスの定理」の証明法は、三角形の内角の和定理の「証明」と同じ系譜のそれではなく、作図法と関わりないものが提示されていると断じていいであろう。学生の記憶の形を想像すれば、明治前の我が国で伝授された数学の、和算がそうしていたように、「定理」ではなく、いわば計算「公式」である。

そんなことを思ううちに気付いたのであるが、二等辺三角形の定理や円周角の定理などの、図形領域の「証明」は、中学で勉強するだけで、高校の数学に必須ではない。大学１年で提供されている数学の内容とも多分、無縁であろう。「証明」の仕方がそうであるし、「証明」により提示されていることも、中学の方程式、関数の式などの勉強には要らない。つまり、図形についての定理・証明と他領域の内容との関わり様はカリキュラム編成で考慮されていない。古代の書にある「証明」を図形について教えているが、文字の式や、数量関係など他領域の内容自体、「原論」のⅠ～Ⅳ巻とは無縁の現代的なものになっている。座標やベクトルも然り、記憶されるような鎖のつながりはなく、つながりの線は細く、問題解決の血流では結びついていない。

中学校数学の図形領域の論証は、中学・高校の数学の中で孤立しているのである。

学習する内容が孤立し、他から独立している「定理」や「証明」を何のために今もわれわれは中学数学で大切なこととしているのであろうか。

ここでは肝心の細部に目を配るのは避けて、荒っぽい言い方で先に進むことになるが、何のために「証明」の作法を教えるのか、教える意義について考えたときのわたしの結論は、西欧近代文明を生成した特異な思考スタイルに接触させるためだと思う。そしてそれは、文明の底流としての西欧文化を学ぶのに最良の方法だったとも思う。だから現代の日本でも、基礎教養として大事な勉強材なはずである。

国を囲む四方の海が壁になっていた時代は遠くにかすみ、西洋との垣根は見え難くなってはいるが、宗教心に及ぶ西欧の意志の知、人間の精神にまで働きかけるその大切なところに中学でちょっと触れさせるだけというのはもったいない。というより、中学だけで伝えるのは無理、難題である。「証明」は中学生には難しい。そして、図形論証のことは高校で集中してまとめて教えることにしなければおもしろいところまでは扱えない。

もちろん、西欧に対峙するエリートの教養科目としてあったのは過去のことである。遠い過去のことではないが、時代は急激に変化している。上のように主張するには、図形論証の内容について吟味し緊密に再構成して提示して語ることを要する。

この論稿では、高校から教える初等幾何の構築について絡め手から語ろうとしている。それは予期せぬ出番の講義がもたらした「原論」の拾い読みで啓発されたこととして記述される。

それを、筆者をこの論考に向わせた動機の一つとして、件の講義でも資料にした、中学校の学力調査の問題のことから書き始めることにする。

なお、カリキュラム論に及ぶこの論稿を補足することは、細部にこだわらざるを得ぬ「証明」指導についての論文としては書く能力を持ち合わせていないので、論考としてではなく、個人的回顧として別建てで語りたいと思っている。

我が国の算数科における、子供の心理にやさしい、「原論」の系譜から抜け出る図形教材の提示方法については、また、別個に論じなければならないと考えている。

§１．全国学力テスト：三角形の内角の和：平行線の公理

あらかじめ断っておいた方がいいと思うが、のっけから調査テストのことで、それもテストの問題番号や、選択肢の記号を記してあれこれ述べるので、読み進む意欲をなくされぬよう、番号はメモぐらいに思って読み流していただければと思う。ちょくちょく記すことになる「原論」の命題番号の数字についても同じようなもので、問題群の順番や、命題が書かれているおおよその位置、前後の命題との関係を知る手掛かりになるところで眺めていただければと思う。

さて、件の講義で資料にした調査テストは、正式には「全国学力・学習状況調査」と称されるもので、平成２１年４月２１日実施の中学校数学の問題である。その問題Ａは問１

〜問１３からなり、そのうち４〜８が図形領域の問題になっていて、その５問のうちの３つ、問６，７，８が「証明」に係わる問題である。

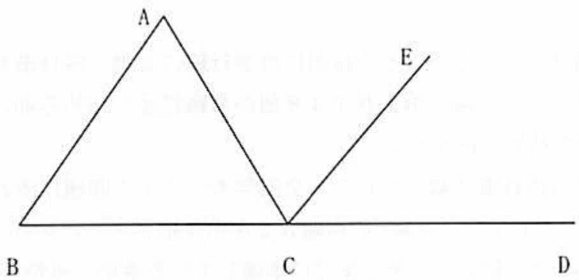
はじめに記した講義の話し相手は、数学教員の資格を取ろうとしている学生であり、全員がこれらの問題についてすらすらと正しい選択肢を答えるだろうと思う。そういう意味では標準的な、難しくない問題である。だが、この論稿で調査問題を取り上げるのは、中学校で教導の目標としていることがそこに具現されていると考えられるからであり、内容を考証の材料にするのが目的である。詳しい成績比較がなされ、調査結果が報告されるであろうが、そちらには関心を向けない。

問題が掲載された新聞をめくってまず目に付いたのは、「三角形の内角の和は１８０°であることの証明について」の問８である。問題のなかの証明はよく見慣れたもので、証明文の最初の部分をそのまま写せば、

「下の図の△ＡＢＣで,

辺ＢＣを延長した直線上の点をＤとし，点Ｃを通り辺ＢＡに平行な直線ＣＥをひく。」

というものである。



ちなみに、これと全く同じ証明文が平成２０年の調査テストの問題にも出ている。平成２０年の図形領域の問題については別の観点からであるが２１年の問題と並べて後でちょっと触れるであろう。

さて、上の図はユークリッド「原論」第Ｉ巻の命題３２の図に同じであり、証明を「頂点Ｃを通り、対辺ＡＢに平行な線ＣＥをひく」と言って始めるのも「原論」に同じである。

命題３２「三角形の三つの内角の和は２直角である」に述べられている証明の骨子も、調査テストが記している証明に同じである。

ところで、ＡＢに平行な線ＣＥは実際はどのようにしてひくのか。

それは、∠ＡＣＥが∠ＣＡＢに等しくなるようにひけばよい。すなわち、２直線ＢＡ，ＣＥにＡＣが交わってなす錯角が等しくなるように線ＣＥを作図するのである。

錯角が等しければ平行になる。平行になるから、その平行２直線に直線ＢＣが交わってなす同位角として、∠ＥＣＤと∠ＡＢＣは等しい。

ゆえに、三角形ＡＢＣの内角の和 ∠ＣＡＢ＋∠ＡＢＣ＋∠ＢＣＡは、和 ∠ＡＣＥ＋

∠ＥＣＤ＋∠ＡＣＢに等しく、１８０°である。

「原論」でも、命題３２だけ読めば、「平行な線をひく」と述べるだけで、「錯角を等しくなるようにひく」というひき方を述べてはいない。だが、実は、命題３２の直前に命題３１としてそれを記している。そして、「錯角を等しくひけば平行になる」という原理のところは、この「ひき方」の作図命題３１に先立って、命題２７として証明している。

論理の鎖をさらにさかのぼれば、「錯角を等しくなるようにひく」作図で行っている「与えられた直線上にその上の点において与えられた角に等しい角をつくる」かき方は、命題２３として述べている。

以上の話を２つに分けて繰返すと、一つには、命題３２の証明中に「平行な線をひく」とあるが、そのひき方は命題３１として述べており、それは命題２３の等しい角の作図によっている。

ここで、ひき方の原理となる「錯角が等しければ平行」は、「ひき方」を述べている命題３１の前に、命題２７として、証明している。

もう一つとしては、この命題２７の逆であり、やはり「内角の和は２直角である」の証明で使っている「平行ならば錯角が（従って同位角も）等しい」ことは命題２９として述べている。

さて、この命題２９であるが、その証明には平行線の公理と呼び倣わされた公準５が使われている。公準５は「原論」第Ｉ巻で４８個の命題記述を始める前に記されていて、この命題２９の証明で初めて使われる。

つまり、中学校の教科書に載っていて、全国学力テストの問題に使われている「内角の和は２直角である」の証明は「原論」の命題３２を引き継ぎそこにあるのと同じであるが、教科書では、「原論」で命題３２に至るまでに準備している事柄が省略されているのである。

さらに敷衍すれば、省略していることの一つは、作図法を順々と丁寧に記述しているところである。その作図作業で、いわば存在性が保証された平行線について、命題３２で「平行線をひく」と言っていると読むことができる。

省略しているもう一つは、平行線の公理（公準５）である。

こう言うと、省略しているのではない、公理の語は使わないし中学で教えていないが、平行線の公理に当たる「平行ならば錯角が等しい」ことは教科書で説明している。その逆になる「錯角が等しいならば平行である」もちゃんと教科書に載せている、と反論されるかもしれない。

「錯角が等しければ平行である」の証明を「原論」（命題２７）のように背理法でやるのは中学生には難しいしから、これも公理のように証明なしで使うことにしているのである、と。

そういう風に考えることになるのだろうな～と、教科書を読んで、わたしも納得していた。だが、今は違う。なぜ、我々は、中学校で、「原論」に書かれてある、素朴にわかる作図のこと、物語の筋で肝心なところはみな省略して、「内角の和は２直角である」の証明だ

け取り出して、中学生の知識として教え込もうとしているのか、と考える。

指導要領の変遷にその答をみつけることもできようが、ここで考えたいのは、この証明が中学生にぜひ教えたい知識なのか、そうであるならば、我が国でこれからもずっと教えたい知識の形はこれでいいのかという点である。

定理「三角形の内角の和は２直角である」は、平行線をひいて、「平行ならば錯角（同位角）が等しい」ことから証明される、と教え授ける知識になっていていいのか。このような知識で数学教科が証明イメージを子どもにインプットしていていいのか。

念のため付け足しておくが、「原論」の文脈からすれば、「三角形の内角の和は２直角である」は、「平行ならば錯角が等しい」と、その逆の「錯角が等しいならば平行である」を使って証明されていると読むことができる。でも、命題３２だけだと、「平行ならば錯角（同位角）が等しい」（命題２９）を使うだけで、その逆は見掛け上使わなくよい。そこは、中学校の教科書でも同じことになる。

繰返すが、その逆の「錯角が等しいならば平行である」（命題２７）は、平行な線の「ひき方」の原理である。

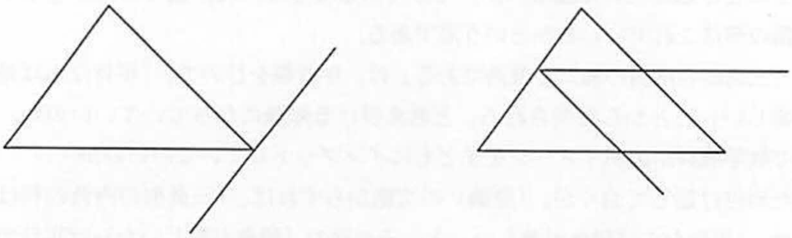
「平行ならば錯角が等しい」（性質）と、その逆「錯角が等しいならば平行である」（条件）を異なる命題として峻別するのは「原論」の根幹に係わる。それら順と逆の二つを、教科書がそうしているように、平行線の図とともに並べ書き、平行線の（性質）と（条件）として自明なことに扱われたのでは、区別意識は薄れる。

「平行ならば錯角が等しい」ことを公理としていることは第Ｉ巻の展開全体を特長付けている。よって、そのことは記述の細部にも及んでいる。ユークリッドは「平行ならば錯角が等しい」が公理とされるべき命題であることを発見した。その発見内容は「原論」第Ｉ巻編成と記述に表出されているということができると思う。

ついでに記すが「原論」の後の数学でよく知られているように、「三角形の内角の和は２直角である」の成立することを仮定すれば、平行線の公理「平行ならば錯角が等しい」が証明される。平行線より、三角形の方が身近であり、素朴な感覚には、平行線の性質より、三角形の内角の和を考える方が楽である。と考えれば、内角の和が１８０°であることを自明とする幾何入門の方が、子どもには親しみやすいと思われる。

このことは、算数科における図形教材の提示法として別個に論じることにして、今は、文脈を無視しての「原論」の断片であっても、現に、それをそこに記してある証明とそっくりに教えているということを立脚点にして論を進める。

断片を中学で教えているに過ぎないが、断片でも教えているからこそ、「中学で習ったことが古代ギリシアの書に（そっくり）載っている」と知る機会も生まれることになる。そう考えると、内角の和定理を証明するのに、補助の平行線のひき方は他にもあるのに、教科書は「原論」にあるのと同じ図を掲載しているのも、むべ（宜）なるかなである。



中学で習った平行線の（性質）や、三角形の合同条件や、平行四辺形なるための条件や、二等辺三角形などについて「原論」にも書いてあると言っては、話は逆で、中学で教えているこれらの事柄は、図形領域の論証教材が「原論」の傘、西洋の教育史の傘の下にあることを証拠づけているに過ぎない。数学は、西洋史の文化的傘下にある。よって、ここでの教材論の議論も、教科内容からではなく、しばらくは本家の数学「原論」から、逆に、我が国の現下の教科内容を考えることになる。

上では、中学数学の用語を流用して、「平行ならば錯角が等しい」（性質）と、その逆「錯角が等しいならば平行である」（条件）という言い方をしたが、後の主張のために、「原論」に沿った文脈に戻しておくことにする。

まず、平行なるための（条件）の「錯角が等しいならば平行である」であるが、これは「原論」で、与えられた点を通り与えられた直線に平行な線のひき方の原理とされ、証明している命題であった。したがって、論理の高みから見て、平行な線の存在を保証する命題とみなすことができる。それに対し、平行線の（性質）の「平行ならば錯角が等しい」こと、すなわち、平行な２直線に１直線が交じわってできる錯角は互いに等しいことは、公準５に基づいて証明される。

公準５は、数学史が解明したように証明不可能な命題である。そして、平行な線の存在を前提にすれば、この公準５は、平行な線はただ一つであると言い換えられる。

したがって、論理の高みから、（性質）と（条件）をひとつにすれば、「与えられた点を通り与えられた直線に平行な線は一つあって、一つに限る」となる。近代の数学の括り方では、平行な線の存在と一意性ということになる。

「一つあって、一つに限る。」これを平行線の公理と称して、わたしたちは高校で習った。

今は、中学校教科書では、「平行ならば錯角が等しい」（性質）と、その逆「錯角が等しいならば平行である」（条件）を自明なこととして、あたかも公理のように扱っていることを再度思い出して次の話題に進むことにしよう。

§２．二等辺三角形の底角：三角形の合同条件：三平方の定理

今年度の全国学力調査テストの問題文に、「二等辺三角形の２つの底角はひとしいといえます。」という文言を見ることができる（問７（２））。

底辺、底角、等辺、頂点などは数学が伝えている漢字語であると考えると、数学教科の都合は忘れて、国語の漢字への親しみ方が図形理解の鍵になるような感じが気持を満たす。でも、それでは予定の話に進まないから、気持を引き締めて、「二等辺三角形の両底角は等しい」の「証明」について考えることへと向うことにする。

この定理については、２０年以上むかしのことになるが、中学生が「証明法が２つあるのでしょう」と答えたことが何度となく思い出されて今日に至っている。２つの証明法がどういうものであるかは聞かないでしまったが、中学生は、証明そのもの、証明自体よりは、２つあるというところが大事なように記憶しているらしいのであった。先生が、２つあるということに強点をおいて教えていたと推測することもできる。

２つの証明というのは、多分、等脚（～二等辺）三角形の頂点から底辺に垂線を下ろすのと、頂角の２等分線をひくのとであろう。

今、あらためて二等辺三角形の定理の証明法を考えてみると、これら２つ、（１）頂角の２等分線をひく、（２）頂点から底辺に垂直な線をひく、に、（３）頂点と底辺の中点を結ぶ、というのを付け加えてもいいような気がする。証明は、（１）は二辺挟角の合同条件、（２）は直角三角形の合同条件、（３）は三辺の合同条件による、ということになる。

この節では、このことを出発点に「原論」案内を始めようと思う。はじめにで記した臨時の講師を引き受けたときに念頭に浮かんだ案内の仕方の一つであるが、そこで別の件で既に述べたように、学部学生向きの内容にはならなかった。前節の議論からも覗えるように、平行線の公準・公理について紹介するのさえ、なかなかたいへんである。要領の悪い話はこの節でも続くと思われる。しかし、この論稿は、図形・論証教育のカリキュラム批判のようなものであり、カリキュラム構築を目指すためにする「原論」の再読であるから、読み難いところは我慢して、黒板も使わずに講義調になるところも大目に見て下さるようにお願いしたい。

まず、二等辺三角形の定理には「原論」では命題５として出会う。続く命題６は、その定理の逆である。それらに先立つ命題４が２辺挟角の合同条件。しかし、「原論」は、（１）頂角の２等分線をひき、２等分線で２つになった三角形各々の２辺挟角が等しいから合同であるとする証明をしているわけではない。

命題５の証明は、命題４に基づいているが、頂角の２等分線をひくようなことはしない。「原論」では、角の２等分線のひき方は命題９として、後から出てくる。

頂角の２等分線のひき方の原理となるのは３辺の合同条件で、その故に、３辺合同の定理は、命題９の直前の、命題８としてある。その前に位置する命題７は命題８の証明の準備としてあり、その証明は二等辺三角形の定理である命題５によっている。

三辺合同の命題８は、垂線の作図命題１１，１２でも原理とされ、前節で、等しい（合

同な）角の作図法として言及した命題２３も、容易に分るようにこの命題８を原理としている。

ここでも、二等辺三角形の定理の証明法で、（２）頂点から底辺に垂直な線をひく、というのを「原論」がとらない状況がわかる。その垂線の作図法は命題１２として後で出てくるからである。

三辺合同、二辺挟角と出ると、もう一つの、二角挟辺の合同条件も「原論」にあるのかと探すことになるが、命題２６として出てくる。なお、命題２６は、正確には、単に二角挟辺ではなく「２角と挟辺か、２角のうちの対応する角の一つの対辺が等しければ、」合同である、という２角と１辺についての内容になっている。

念のため付け加えておくが、三角形の内角の和定理は、先に記したように命題３２であるから、その前に示されているこの命題の証明には使われていない。

二等辺三角形の定理の証明法の（２）頂点から底辺に垂直な線をひく、に対する、直角三角形の合同条件に当たる内容の命題は、「原論」にはない。

そこで、２辺と１角の等しい直角三角形は合同である、の証明を考えてみると、その２つの直角三角形を背中合わせに並べれば二等辺三角形になる、というのを思いつく。

「証明法が２つある」というのを取り掛かりにして「原論」の論理の鎖を照らし出す分にはいいが、いろいろと考えうる鎖の連なりは複雑に絡み出して始末に負えなくなる。

ともあれ、「原論」は、命題は一直線の並びで記述するのみであり、三角形の合同条件とか、平行四辺形なるための条件などと複数のことを併記するような書き方はしていない。

「なるための条件」については、後の節で着目することにして、ことのついでに、前節に取り上げた命題との係わりについて見ることができるので、「原論」における平行四辺形の命題について記しておくことにする。

平行四辺形の語は命題３４に現れる。第Ｉ巻の定義一覧にはなくて、この命題文で最初に現れる。よって、定義されないままここから使われると解説されることがある。

今回の「原論」再読で、「定義されないまま」と見るのは、現在のわたしたちの狭い数学観によるのだと気付いた。解説を「定義するのを忘れている」と理解したら、そのときの定義の意味は「原論」のそれではなく、多分、公理主義の思潮の生まれた後の、現代数学のものである。

さて、その命題３４とともに、命題３３についても翻訳原文を掲げる。

命題３３「等しくかつ平行な２線分を同じ側で結ぶ２線分はそれ自身等しくかつ平行である。」

命題３４「平行四辺形（parallelogrammic areas）において対辺および対角は互いに等しく、対角線はこれを２等分する。」

定義の文言がないまま、命題３４の言明に平行四辺形の語が現れるが、その前に、この命題３３があり、それに続く命題で、言明の図形特述（文字を伴う図形による表現）、証明、と読んでゆくと平行四辺形の語で意味していることが自然に確定すると思う。

似たようなことは、錯角、同位角という語についても当てはまる。使う語の意味をあらかじめ定めておくというのを、三角形の内角、外角、内対角についても行おうとはしていない。それらは、黒板に描いた図形を指差しながら、日常語のように使えば、生徒にわかる、と考えたらいいと思う。

ということで、命題5、32の言明もこの辺りで読んでおきたいと思う。

命題5「二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく、等しい辺が延長されるとき、底辺の下の角は互いに等しいであろう。」

命題32「すべての三角形において1辺が延長されるとき、外角は二つの内対角の和に等しく、三角形の三つの内角の和は2直角に等しい。」　・・・

定義して数学語にするようなことはしていないということでは、三角形の合同条件の「合同」についても同じである。正5角形、正6角形、のような語を定義することもしない（第Ⅳ巻）。

言葉は使われようで意味が確定する。「原論」の叙述では、命題の連なりのなかで数学用語が学ばれるようになっていると見るとき、その素朴に単線的な展開からは、中学校で用語や記号を教える様子は、はなはだ作為的で人工的のものに感じられてくる。

さて、平行四辺形（parallelograms）の語は、引き続き命題35，36と使われて、以下、三角形の面積の議論に続いている。三角形の面積は底辺×高さと習うあれである。

論証の鎖という面に目を向けておくと、先に記した命題34の証明には、「平行ならば錯角が等しい」（命題29）、三角形の2角と1辺の合同条件（命題26）、2辺と挟角の合同（命題4）が使われ、命題33の証明には、（命題29）と、（命題4）と、「錯角が等しければ平行」（命題27）とが使われている。

ここは、中学の教え方も似たようなものであろう。

なお、命題33，34の前は、命題32「三角形の三つの内角の和は2直角である」であり、前節で話題にし、この定理をめぐって、平行線の存在と一意性（命題27と29）について議論したのであった。

上の議論の閉めに、「二等辺三角形の両底角は等しい」の「証明」を、（3）頂点と底辺の中点を結ぶ、ことで行ったらというのを取り上げておく。

二等辺三角形は、底辺の中点を頂点と結ぶ直線で、2つの三角形に、3辺が等しい三角形2つに分けられる。よって、2つの三角形は合同であり、もとの底角に当たる2つの角の等しいことが導かれる。もっとも、「原論」の命題連鎖の筋では、三辺合同の命題8は、直接にではないが、二等辺三角形の命題5によっているので、この証明も「原論」はとることができない。

順序を逆転ということで、思い出されることがある。

やはり「二等辺三角形の両底角は等しい」のことで、この定理を、大学4年のゼミで講読中の本に「ターレスの定理」の一つに上げている記述があったので、当番の学生にどのように証明するかと、尋ねたことがあった。

驚いたことに、彼はピタゴラスの定理を用いて証明した。二等辺三角形の（２）頂点から底辺に垂直な線をひき、左右に分けられて２つになった直角三角形各々にピタゴラスの定理を適用し、垂線は底辺を２等分していることを示すものであったろうか。詳しいことは忘れたが、その証明にわたしが驚いたのは、一つに、「原論」第Ｉ巻命題４６として第Ｉ巻の最後（の命題の一つ前）に出てくるピタゴラスの定理を用いて、命題５を証明しているわけで、その奇想天外なところに、であった。

中学校の数学でも、三平方の定理は中学３年のクライマックスとして最後に学ぶ大定理で、二等辺三角形の定理は２年にあるのに。

しかし、今あらためて考えてみると、彼はピタゴラスの定理を用いて間違いのない推論を重ねていたのである。中学校で教えている証明法ではないが、なぜ、ピタゴラスの定理を用いたのではまずいのかは分らなかった。用いてはまずいとは感じられなかった。

二等辺三角形の定理を証明問題で使わせられた覚えはあっても、ピタゴラスの定理の証明には使っていない。どこがまずいのか、理屈では理解できないかもしれない。

二等辺三角形の定理の証明のことなど、高校の数学で思い出すことはない。大学の数学専攻に進んでからは、代数の講義でも、解析の講義でも、初等幾何と無縁な、いろいろな証明が出てくる。三角の余弦定理の公式を、二等辺三角形に当てはめるようなあそびを体験していることだってあるかもしれない。

ともあれ、大方の学生は、「二等辺三角形の両底角は等しい」というのを、定理の典型としてそれで「証明」の形を習ったと記憶しているであろうが、指導要目で「原論」にある命題がかくも大事にされているには、命題５として「原論」で最初の方にある定理らしい定理であり、二辺挟角の合同の定理の次に位置しているということが、目に見えないところで強く働いていたのだろうと思う。

日本に指導要目などなかった頃から、学ぶ側にとっても目立つ定理であったからこそ、愛着も生まれ、ロバの橋（asses’ bridge）というあだ名が付いたりしたのであろう。そこに、２３００年の歴史の重みを感じることもできる。

§３．余弦定理：文字式：幾何代数

何かの折、学生に三平方の定理について尋ねたら「余弦定理の特別の場合でしょう？」という返答が返ってきた。中学の教室でピタゴラスの定理の証明法を味わうことはなかったとしても、特別の場合として出るという説明が印象深く、それをしっかり覚えていたのであろう。

定理とは呼んでいるが、中学で習う定理イメージからすれば、余弦定理は文字式（formula）にされた公式（rule）である。

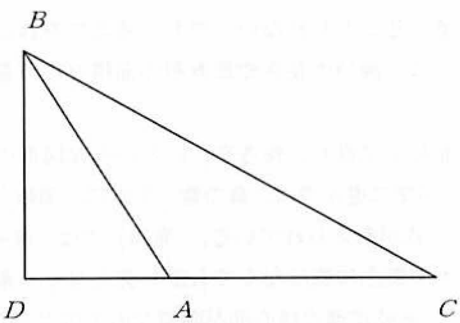
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

この一つの式ではなく、三角形の辺・角についての記号の付け方を固定して、平等に３

通りの式を並べて書くのが普及しているが、教材論、さらにはカリキュラム論としてそのことに触れるのは後のことになる。そのためにも、まずは、余弦定理が定理として「原論」第Ⅱ巻の命題にされていることを紹介しておきたい。「紹介」と言って、あえて講義調に語り出しては身の程しらずの不遜に感じられて筆先が鈍るのであるが、それは前の節で、案内と書いているときもあったことで、専門分科の学会の「論文」の範疇に入らない議論をしようとしているのであるから、耐えて、開き直って行くしかないと思う。「と思う」と堂々と書くのにも抵抗感がなくなったのは、まだ若かった多感な時代にはあった恥じらいや、躊躇の気持が薄れたからであるが、講義調になるのはそのせいばかりではない。学ばされる余弦定理に抱く印象は、指導要領の変遷に伴って随分と変わってきたと思うのである。変更の大きいときを経て年齢が１０才違えば、式にされた公式は共有していても証明法を伴った印象はかなり違う。若い世代には、初等幾何における証明というのにもかなりな講釈が必要になる。従って数学教育研究の現役の諸氏に読んでもらうためには、むかしを語らざるを得ず、そして、教導したいと考える「証明」の姿、戦前に日本の伝統になりつつあった教導の形を描くには、「原論」紹介によるのがやはり一番だと思うのである。

さて、「原論」第Ⅱ巻の命題１２，１３はいわゆる余弦定理である。命題１２では鈍角三角形の鈍角の対辺についての関係式に当たる内容が、命題１３では鋭角の対辺についての場合が証明されている。

鈍角三角形の鈍角 A に対する辺 a の上の正方形 a^2について、他の２辺の上の正方形の和 b^2+c^2 との差は、図の三角形 ABC について、CA と AD を２辺とする矩形（長方形）の面積の２倍に等しい。ここで、BD は CA を延長した直線への垂線である。



CA は b、AD は、角度 A の補角（１８０°$-A$）$=A'$ の余弦によって、$BC\cos A'$ あるいは $c\cos A'$ と書かれる長さになる。

「原論」の証明は、２つの直角三角形 ADB と CDB に、ピタゴラスの定理を適用するというものである。それとともに、式に書けば

$$DC^2=(DA+AC)^2=DA^2+AC^2+2DA\cdot AC$$

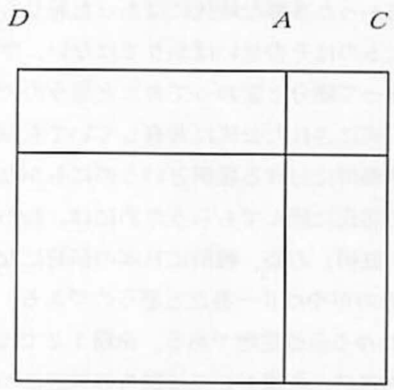
となる関係を用いる。この関係は第Ⅱ巻の命題４として用意されている。

命題１２は、このように証明されている。前節に述べたこととの係わりで言えば、まず、

この命題はピタゴラスの定理から証明されるということが明瞭である。

ただし、命題の形と証明について、気になるところがあると思われるが、文字式はもちろん、上のような記号式も使っていない。余弦記号もなければ、三角比の概念も現れない。

上では数の自乗（２乗）記号を使っているが、それは正方形の面積、$CA \cdot AD$は、CAと AD を２辺とする矩形の面積とみればすむことであり、上のような式は一切出てなくて、図形を描いてすべて文章で語られている。



もっとも、「面積」という語を使っているわけではない。CA と ADを２辺の「長さ」とする矩形ともしていない。単に矩形なる図形の広がりとしての量である。

実数とその四則演算の性質を基に$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$と文字式にすれば済む関係を、わざわざ命題４としていると感じるかもしれない。でも、考えてみれば、命題４の内容を実数についての文字式とするには、線分の長さや長方形の面積という量を数にすることを必要とする。

数と、数の四則計算、演算記号を学習し、長さや、いろいろな図形の広がりについての面積なる語を習い、使い慣れ、中学に進んでは、負の数、文字式、実数という学習の上に、$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$という式が教えられている。「原論」では、我々が算数・数学で教え込まれている、そういう諸々の概念知識はなくても差し支えなく、素朴な図形認識の上で証明されている。だからこそ、余弦定理の核心部が明瞭なのではないだろうか。実際に、式も数の言葉もなくて、かえって論証の筋はよく見えると思う。

上では、文字式$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$を気楽に実数の性質と言ったが、考えてみれば、今日いう「実数」をきちんと勉強するのは大学のレベルである。実数の公理、あるいは定義が必要とされる数学の問題は、そして、そういう問題を講義するに適した学部・学科・専攻はとなるとぐっと狭まる。中学生や高校生にとって文字式の文字が表す実数は、現代の数学が常識としている「実数」ではない。実数の意味は学習とともにふくらみ、変って行く。問題を解き考えるのに、実数という言葉は、正の数という言い方が、負の数を教えないうちは要らないように、虚数を教えない限り要らないのかもしれない。

そんなことまで言って訴えたいことは、「原論」の第Ⅱ巻の命題を、数についての可換法則、分配法則から導かれる簡単な関係式と見てはこの書が著わしている“教育的配慮”が見えてこないということである。未知数についての方程式、計算手続きについての恒等式を学ぶ過程、個々人で迷いが違う文字・漢字の担う多義性を思えば、面積関係を文字式で学べば済む関係と見るのは、自分の習得した数学を眼鏡にしていることになる。学びとともに発達する心理からは見ていない。

といっても、「原論」が学習心理を考慮した記述をしていると言いたいわけではないが、代数のなかった時代の数学書が、文字式なしで、式にすれば$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$のような関係になることを証明しているところから、その関係の素朴な認識の姿について教示される。このような面積関係として直に把握した後に、それの文字式表示として、$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$を勉強するのが自然の進み方で、こどもの心理に抵抗ないのではなかろうか。

心理学のことは解らないが、数についての関係としてこの文字式を教えて、それを適用した「例」として面積関係を説明するのはまずい、つまらない。素朴な面積関係の直の把握をおろそかにしないで、回り道になってもそこを教材化して教える手はあると思う。

「原論」では面積関係がそのまま述べられている。いくつか拾い出し、文字式に書いたものを、既に記している命題４も含めていくつか並べてみよう。

命題２　$(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$

命題４　$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

命題５　$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$

命題７　$(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$

命題９　$a^2+b^2=\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right\}$

鈍角の場合の余弦定理の証明に使われている関係は命題４であった。鋭角の場合の証明に使われるのは命題７である。関係を式にしてはずいぶん違ったものに見える。

それぞれが命題１２，１３と並んだ余弦定理の命題で使われるのに、番号が４，７と離れていることにも目が行く。

文字式にしては、「原論」記述の筋が見えないということであり、それは文字式の抽象性によるという言い方をして前に述べたように、その抽象性は面積関係の単なる一般化として生まれるものではない。

ちなみに、上の命題９の恒等式で、右辺の２項の記号を書き替えてみよう。すると、

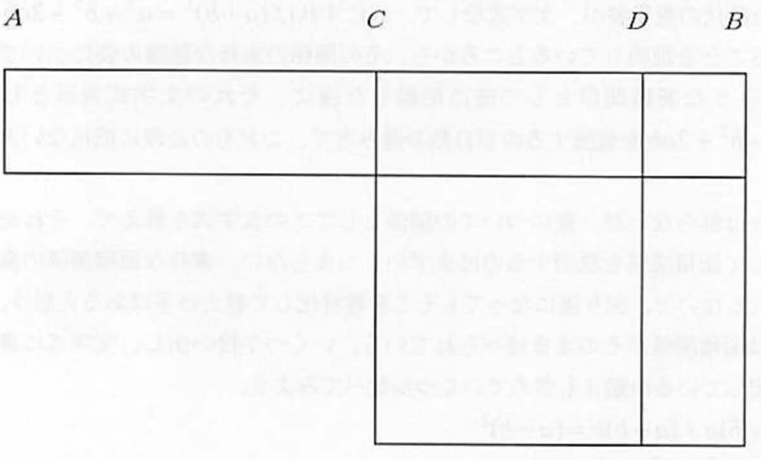
$$(A+B)^2+(A-B)^2=A^2+B^2$$

となる。

実は、命題９は「もし線分が相等および不等な部分に分けられるならば、」という書き出しであり、命題５と同じで、命題５についてその先も記せば、「不等な部分にかこまれた矩

形と二つの区分点の間の線分上の正方形との和はもとの線分の半分の上の正方形に等しい。」となる。

「原論」では、この命題の言明に続いて記号を付けた図が提示され、言明がその図に特定して述べられる（命題の特述)。前の節で、言明の図形特述と呼んだ部分である。「任意の線分ABがCにおいて等しい部分に、Dにおいて不等な部分に分けられたとせよ。AD, DBにかこまれた矩形とCD上の正方形との和はCB上の正方形に等しいと主張する。」



命題の特述のADを a、DBを b とおけば、CD, CBは、それぞれ$\frac{a+b}{2}-b$および$\frac{a+b}{2}$となり、面積関係は、式にして$ab+(\frac{a+b}{2}-b)^2=(\frac{a+b}{2})^2$と書かれる。命題９についての上の恒等式は、これに対応するように文字を取っている。この式で、記号を書き替えれば、$(A+B)(A-B)+B^2=A^2$と、上に命題５として書いた式と同じになる。

このような、命題５と命題９との間にある類似性が、命題６と命題１０との言明の間にもある。

これら４つの命題について、面積関係を式にしてしまえば、式の成立することは、２項式の展開で証明される。命題１～１０のどの式についても証明される。全て、矩形や正方形についての命題であるが、命題８以降の証明にはピタゴラスの定理が使われている。

代数式にしては命題間の関連が見えないというにとどまらず、「原論」が紡ぐ物語の筋は文字式にしては消えてしまうことがわかる。記号代数では語れないことが、そこで語られていると読まなければならない。そう読むことで、論証の教育で、また文字記号、代数方程式の教導について幾多のことを教えられる。学習段階に伴って評釈されるべき教育内容の連関について考えさせられる。

余弦定理と呼んで紹介した命題１２，１３の証明には、代数式も三角関数の記号も要らない。この面積関係から逆に三角比の考えや記号を導入する教導の道をとることが考えられる。それは、新たな道具や装置を用意して、その舞台の上で余弦定理の公式をすらすらと証明して教え、はい、次は余弦定理の応用例ですと括る道ではない。

命題１４もなかなか面白く、大学生にそのまま話しても興味深く聞いてもらえることは実証済みである。(縦、横が a, b である)矩形が与えられたとき、それと（面積の）等しい正方形を作図すること、という命題である。文字式にすれば、$x^2=ab$ を満たす x の作図である。解である正方形の、その辺 x は $\sqrt{ab}$ だということになる。が、ルート記号を使って答が書けたからといって作図法がわかる訳ではない。

命題１１は、与えられた線分 a に対し、$x^2=a(a-x)$を満たす線分 x の作図である。

なお、２次方程式ということでは、命題５は、$ax-x^2=b^2$、命題６は $x^2+ax=b^2$ を満たす x の作図法と関連して命題発見の歴史が推測されているが、その考証のところを筆者はまだ消化しきれなくている。それを知らなくても、「原論」の物語の筋そのものを読むことで、「証明」について取るべき教導の道を教えてくれるように思う。

話はカリキュラム改革の議論には直接関係しないことに及んでいるが、ついでのことでもあり、「原論」の物語の筋ということで、上に取り上げた第Ⅱ巻の命題について、紹介めいたことなど、もう少し記しておくことにする。

命題１４は、代数式に書けば、$x^2=ab$ となり、それを満たす x は $\sqrt{ab}$ である、となるが、そう書いても、「原論」にある作図法について何も伝えてくれないと記した。代数学の問題にもならないことに注意したい。命題を、幾何学的な表現をとった代数学の問題と見ることはできないのである。つまり、教育課程の観点からは、命題の内容は文字式に表すことはできない。第Ⅱ巻を幾何代数、すなわち幾何的な代数と見るのは、逆立ちして逆の見方をしていることになる。

順とか逆とかいってもそこは一本道ではなく、本稿が目指す「証明」教育の科目からは外れて「順の」内容ではなくなるが、命題１４を、２数 a, b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ を、２数を線分の長さに取ったときの作図法と読むことはできる。

命題５は命題１４の証明の、命題６は命題１１の準備の命題になっている。命題１１は正五角形の作図に関連深く、正五角形のことは、後の節（§６）で話題にする。

§４．定理の逆：「証明」に集中：特殊から一般へ

余弦定理の式を、三角形の２辺を挟む角とその対辺との関係で見れば、角が大きくなれば余弦は小さくなるから、対辺も大きくなる。このことも実物感覚で当たり前であるが、実は「原論」第Ⅰ巻の“命題”になっている。教えられなくなって久しいので、ここに記しておきたいと思う。

命題２４「もし二つの三角形において２辺が２辺にそれぞれ等しく、等しい線分によっ

てはさまれる角の一方が他方より大きいならば、底辺も底辺より大きいであろう。」

次の命題２５は、この命題の逆である。

つまり、角が大きいならば大きいほど対辺が大きいというのと、対辺が大きいならば角が大きいというのが、別の命題として証明されているのである。この区別は文字式にした余弦定理にはない。

ついでに記せば、命題２４の証明には、命題１９「すべての三角形において大きい角には大きい辺が対する」が使われていて、この命題に、「三角形の２辺の和は他の１辺より大きい」という命題２０が続き、その証明には命題１９を使用する。また、ここに取り上げた３つの命題１９，２０，２４いずれの証明でも、二等辺三角形についてのあの命題5「二等辺なら底角等し」が使われている。

その逆「両底角が等しければ二等辺である」は命題6として証明されている。

逆と順ということでは、命題１９と１８もその関係にある。

命題を略式表記だけで読まされることに抵抗感を覚える向きもあろうかと思うので、ここでも、まだ書いていない翻訳全文を２つの命題について写して、一呼吸おいてから先に進むことにする。

命題6「もし三角形の２つの角が互いに等しければ、等しい角に対する辺も互いに等しいであろう。」

命題１８「すべての三角形において大きい辺は大きい角に対する。」

一読して分るように、底角とか、対辺という語はない。数学用語として教えている対辺、対角のような語はない。漢字語の機能がこれらの用語を生み、数学の授業で教える語になったと見ることができる。語があれば、教える側には教育内容の目印にもなり、キーワードとなっていろいろと都合がいい。

なお、二等辺三角形の語は別で、「原論」最初の定義一覧にある。ただし、現在教えているのと違って、「二つだけ等しい辺をもつ」三角形である。

わき道にそれたのを本題に戻す。演繹・論証の精神は、定理とその逆を区別することにありと言ってもいいであろう。

「二等辺なら底角等し」とその逆は峻別しなければならない。しかし、順の命題（A→B）と逆（A←B）が共に成り立つなら、定理の仮定と結論は、たとえば図形の性質のような場合にはその図形で不可分の関係にあるということになり、直感は順と逆とに区別しないであろう。それを文章の上で区別して推論する、その意義はどこに求めたらいいのか。

同じ様なことを別の命題でかんがえると、三平方の定理の場合、直角三角形で３辺の間に成り立つ等式関係は、その三角形で直角の角を直角より大きくしたら対辺は大きくなり、小さくしたら対辺は小さくなるから、成り立たない。よって、三平方の関係が成り立つのは直角の場合に限る。逆の命題の成り立つ道理である。

さらには、三平方の定理の逆を用いて物事を考える場面はないので、この逆については中学では扱わない、ということにしていい。

円周角の定理の逆についても同じような考え方ができる。

これらの逆について中学校の教科書が「証明」を述べて、その練習問題を掲げているのを読んだとき、わたしはそのように思った。

これら定理は、教えられれば、教えられたその「順」だけで、逆の成り立つことは自然の感覚でわかる。

だが、本稿を書いている今は違った見地に立って、かつてとは違った考えの下にある。

「証明」は、命題を連ねて記述された演繹体系のなかで実行される。実行される記述そのものが「証明」の意味を確定する。「証明」の語がそこで使われていなくとも、そこに「証明」がある。そのことは「原論」の学習が伝え、培い、「原論」の記述体系が担ってきたことである。我が国の学習指導要領が、円周角の定理の逆と書いて解説するのも、論証の指導が「原論」の傘の下で思考されていることの証左だと思う。

先にも述べたように、三角形の内角の和定理を、平行線をひいて「証明」するのもそれである。算数ではそんな非日常的な思考には縛られない、非数学的な仕方をいろいろにさせる方がいい、と児童心理に近しくなりつつある老人感覚には思われるが、そして、「原論」の体系から出る演繹臭の言葉は算数に入れないことが大切であると考えるが、西欧の合理精神、科学精神の柱の理解、教育伝統の保持などなどのためには、演繹体系の学習は続けたいものである。その学習は中学の図形領域の一部としてはうまく行われない。ときには算数で学んだとし、ときには中学1年では無理だとし、項目を2年、3年に振り分け、ときには時間不足、教科書のページ数の制約を理由にして中身を按配していては全体がうまく定まりようがない。体系記述としての学習に集中させるには、また年齢相応にと考えたら、高校数学の一科目とする道を取ることになると思う。

定理も証明も、定理や証明についての講釈によって知識になるものではなく、証明の実行や定理の使用を通して理解し、徐々に身に付き、知識として獲得される。象を撫でるかのように説明されて、わかることではない。

定理とその逆の使用場面を教えられ、順と逆を自ら使い分けて、その違いを認識する。「証明」の学び初めに、「・・・なるための条件」としたり、証明法が2つありますとしたり、「・・・である。なんとなれば、」としたりするのは避けて、教師は板書の労を厭わずに、「原論」の記述のように、ぶれなく単調に繰返す、そういう証明の見本演技を真似るのが、「証明」勉強への一番の近道になるのだと思う。復興を夢みたのは、そういう論証幾何である。「幾何学に王道はありません」と答えたというユークリッドの故事が改めて思い出される。

ついでに言えば、高校の「集合と論理」も「証明」についての講釈のうち、証明の実行の勉強では要らないし、むしろない方がよくて、平面幾何の学習に付随して話題にされるぐらいでいい。

「原論」を読み返して、学校で教える論証幾何についていろいろに夢見るのはいいが、夢で現実は動かない。実行可能な現実に即した論証体系を、少しずつであれ構築するため

には、現在置かれている状況のもとで細部にこだわる内容を工夫することが一歩を踏み出すことになるのではないだろうか。

「証明」それ自体を学習対象に見据えると、中学の図形教育で振りかえられることもなくてあることが多々脳裏に浮かぶ。一つに円周角の定理の証明がある。

「円周角は一定である。」中心角をとれば、その半分になるからとして証明される。円周角の位置によって図は違ったものになる。証明のための補助線のひき方が違ってくるが、「二等辺なら底角等し」と「三角形の外角は２つの内対角の和に等し」を根拠に証明される。授業で証明の過程を学ばせる工夫はいろいろにあろうが、円周角の定理と括って教え、定理を、「円周角は中心角の半分」という「公式」もどきの知識の一つにしてしまうのは、「証明」に勉強の重きを置く立場からすると、もったいない。

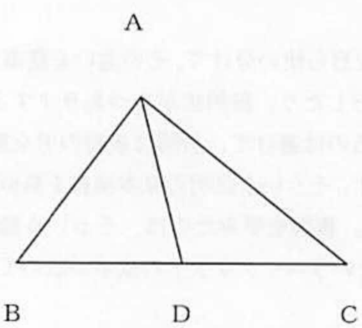
直径に対する円周角は９０°である。

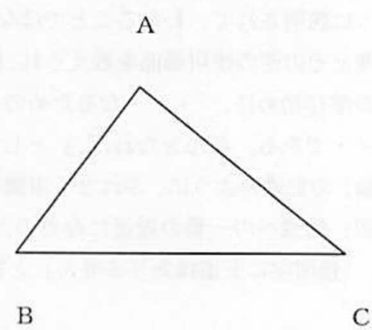
講義で、「直径を辺とし、円に内接する三角形の、直径に対する角は・・・直角である」というのが出るところで、「直角になることはどう分るか？」と問うたことがある。答えられない学生がいる。中心角が１８０°だからと答える学生がいると「君は中学で優等生だったな」と言う。

弧はだんだん大きくなって半円になったときの弦が直径だ。直径は中心角が１８０°という特別の場合である。

そういう認識に間違いはないが、「中心角が１８０°の場合であるから」という答を聞くと、半円の円周角が直角であることは（タレースの定理)、それはそれで直接の証明を考えさせたいと思う。

頂点と円の中心とを結んでできる２つの二等辺三角形ＡＢＤとＡＣＤについて「二等辺なら底角等し」と「三角形の内角の和は１８０°」というのを適用して証明される。





では、ここで問題、タレースの定理の逆「直角三角形の外接円は、直角三角形の斜辺を直径となす」を証明せよ。

斜辺ＡＢの中点Ｄをとり、頂点Ａと結んでＡＤがＢＤに等しいことを示せばよい、と考えてみるが、それだと、そこで止まって先に進まない。

そこで、「角DABが角DBAと等しくなるように、辺BC上に点Dをとる」。そのように直線ADを引けば、「両底角が等しければ二等辺である」から、AD＝BDであり、角DACと角DCAも等しいから、AD＝CDの成立を知る。

従って、DA＝DB＝DCとなり、Dを中心とする半径DAの円を書けば、円はB，Cを通り、BCはその円の直径である。

「二等辺なら底角等し」とその逆の「両底角が等しければ二等辺である」が使い分けられるところが面白いではないか、と言っては自画自賛になるが、円周角の定理の逆の特別の場合であるというような「考え方」は「証明」の教導では二の次にしたい、廃したいというのが趣意である。

§５．比例式：数直線：加比の理

かつての高校の教科書では、ユークリッドは、「幾何原本」の著者として紹介されていた。書名はマテオ・リッチの中国語本（１６０５）の題名からきたものであろう。だが、全１３巻からなる「ストイケイア」は単に幾何の本ではない。たとえば第Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ巻の内容は今日の数学でいえば数論である。第Ⅹ巻は無理数論であり、命題が１１５あって一番長い。題名の英語訳はElementsであって、日本語訳は原論とするのがいい。そう考えて中村幸四郎がこの語を使った書を世に出してから半世紀以上が経つ。中村幸四郎他によってギリシア語から翻訳された「原論」が出版されたのは１９７１年である。全訳の出版は「原論」が全て日本語で表現できることを証明したことになる、そういう話を中村から直接に聞く機会もありながら、「原論」の文化遺産としての大きさを筆者が感知するようになったのは、中村（１９０１〜１９８６）の没後、何年か経ってからだった。そのときからもまた歳を重ねて、この度「原論」を開いたら、かつてと違った読みをしていることに気付かされる。

たとえば、第Ⅶ巻の「２つの整数が互いに素であるか判定する法」を述べた命題１は、２つの整数を２つの線分に描いて互除法の手続きを述べている。そのことに今は違和感を覚えない。今日便利に使っている１０進記数も代数記号もないから、数をわざわざ線分の長さに描いたりしているとは思わない。むしろ、任意２整数についての割り算の商と余りを記号にして、結果を文字の等式に書いて互除法を説明されるより、この、「原論」式の方が初学者にはずっと分りいいのではないか、と感じている。

命題２「互いに素でない２数が与えられたとき、それらの最大公約数を見いだすこと」の説明も、素朴に分りやすいものに思われてくる。計算を文字式に書いたのと違い、線分図についての説明では、計算過程が線分の上に印され、計算操作が残像になって念頭に浮かぶ。講義で、計算手続きを代数等式に板書して話し、「以下、この計算を繰返し・・・」と言って、点々、点々「・・・」と黒板に記して、「最大の」公約数が算出されていることを「証明」したことが何度かあるが、手短で、手際よくのつもりが、教える準備に労力が

かからず楽なだけで、「原論」の丁寧なのに比べると、軽くて重みに欠けていたような思いがしてくる。「原論」は、点々「・・・」と記すようなことはしない。

単純素朴で、２つの線分を比べる手続きに代数式や括弧の式を使ったりしないから、小学生にも話すことができる。とはいっても、証明すべきことをそれと認知し、証明されるべきことと認識するのは中学生にも難しいであろう。そしてそれは、代数式を勉強して式に書いたら分るというものでもなさそうである。

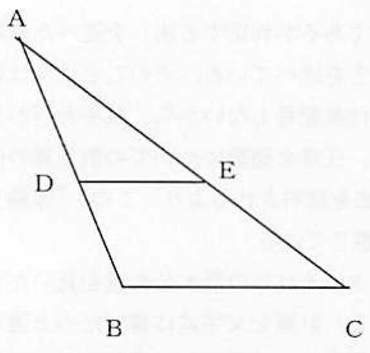
ひるがえって、今日では小学校算数から数直線なる抽象物を使う。あれは、座標の軸に親しむ準備に、直線を書き、目盛りの数字を記しているのか、それとも、数を学ぶ手段に直線図を直感の具に使おうとしているのか。

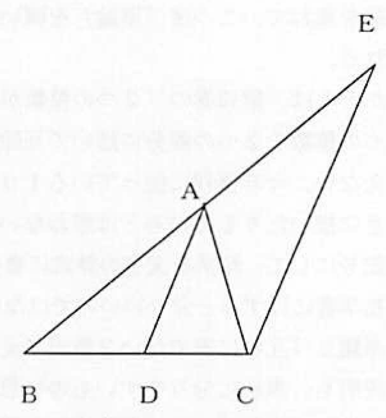
数直線は、問題とも命題とも結びつかずに使われていて、その生い立ちはあいまいで、そのありように直線や個数には伴う原始の素朴は感じられない。

ともあれ、「原論」で比例論、比例論の幾何学への応用を展開している第Ｖ巻と第Ⅵ巻にも今日の教材論との係わりで触れておくのがよいであろう。ろくに読んでいないので心苦しいが、縷々述べてきたことの延長上に、比の定義のことと、比例関係による証明のことなどを長くならない程度に記しておく。

材料にするのは第Ⅵ巻の命題２である。命題２は、池田美恵・中村幸四郎の『原論』内容集約から引用すると「三角形の１辺に平行な直線は他の２辺を比例的に分ける。およびその逆」である。・

「三角形ＡＢＣの底辺ＢＣに平行にＤＥがひかれたとき、ＢＤのＤＡに対するはＣＥのＥＡに対すると同じ比にある。」比の等しいことの定義は第Ｖ巻の最初にあり、複雑で教育向きではないとされてきた。そうだと思う。





しかし、比が等しいかどうかは、４つの線分量について整数倍の大きさを比較することによって判定するのであり、そこは互除法の説明と類似で、単純、素朴な思考操作によっていると考えることができる。

第Ⅵ巻の命題２に続く、命題３は「三角形の１角の２等分線は底辺を残りの２辺の比に

分ける。およびその逆」で、その後に、三角形の相似条件に相当する定理が続く。命題は３３までである。Ｉ巻のテーマを思い出させるような編成で、それをⅠ～Ⅳ巻の続きの内容として、厳密に記述している。

第Ｖ巻は、Ⅵ巻に先立ち比例の諸性質を書いているということになり、池田・中村の『原論』内容集約は、$a:b=c:d$ のように代数の比例式に書いて命題を要約しているが、もちろん、元の言明に式はない。上に記した「三角形ＡＢＣの底辺ＢＣ・・」のように言明の内容を特定し図解しているが、証明の文章中にアルファベット（ギリシャ文字）が記号に使われるのみで、それ以外に記号はない。数学記号のようなのは全くないのである。

命題３の証明は、「Ｃを通り（角の２等分線）ＤＡに平行にＣＥがひかれ、ＢＡが延長されてそれとＥにおいて交わるとせよ」として始められる。

この証明も、今日教えられているのとそっくりである。なお、この命題３は命題２を、命題２は命題１（本稿では命題１の説明はしないが）を証明で利用している。これら３つの命題はいずれも、Ｖ巻の事項を基礎にしていて、当然、Ｉ巻の内容と係わり深い。

命題３は現在の普通教育でも「原論」そっくりに証明しているにせよ、基礎になることを第Ｖ巻のように教えようとするのは時代錯誤もはなはだしく、また、どこの国の学校でも実行不可能であると考えるが、命題相互の論理のつながりについて教えられること多く、「原論」は現在でもカリキュラム論の第一級の資料であると思う。それを、比例式の教え方ということで考えてみよう。「原論」に比例式はないが、命題２のなかの「ＢＤのＤＡに対するはＣＥのＥＡに対すると同じ比にある」というのは、今なら比例式に書いて、「ＢＤ：ＤＡ＝ＣＥ：ＣＡ」となる。

比例式$a:b=c:d$は、こんな文字式にはしないが、算数から教えている。比の値が等しいという言い方もする。分数を使い慣れれば、分数の等式$a/b=c/d$に書き替えて済ませられる。整数でない数についても比例式の成立は、両辺の商を表す分数が等しいことと定義することができる。よって、「aのbに対する比がcのdに対する比に等しい」ことは、比例式で内項の積は外項の積に等しいこと、$b\times c=a\times d$と同値である。

このことは、Ⅵ巻に命題１６としてある。「４線分が比例するとき、外項にかこまれた矩形は内項にかこまれた矩形に等しい。及びその逆」。

これは第Ⅵ巻にある命題である。Ｖ巻にあるのは、いわば比例式の処理法に当たる諸命題であるが、「内項の積は外項の積に等しい」は、Ｖ巻にはない。よって、それは、「原論」の文脈では、算数計算の手法のような働きもしないことは容易に推測できる。

そのようなことから思い出すのは、図形の計量的な処理に、比例式を立てたり処理したりは今の学生は身につけていないことである。処方を教えられていないからである。

三角形の相似条件は習い、それに付随する程度で比例式は立てる。しかし、長さや面積の関係として、数のことに帰着して考えてしまい、図形に密着して比例式の処理を見習い練習することはない。そういう処理を自然に行い解くような問題は中学数学の範囲にされ

ていないということがあるかもしれない。処方の原理に付けられた「加比の理」のような名も廃れてしまった。その名で覚えるような処方をして解かせる問題が指導要領の文脈から消えたということになる。「加比の理」は、「原論」では、Ｖ巻の命題１８として記述されている。比例式に書けば「$a:b=c:d$ ならば、$(a+b):b=(c+d):d$」、である。

比例式が要領の文脈で主役の座から降りたということでは、算数・算術問題についても同じであった。指導要領が指示したわけではないが、小・中の教科書から、比例式を立てて解くという方略が消えた。

「一様な金属棒が、２センチで切断したら６グラムであった。５センチでは何グラムでしょうか。」

それを、２：５＝６：ｘと立式することは教えなくなった。１センチ当たり３グラムであるから、５センチなら、３×５で、１５グラムであると考えるように教える。

「一様な金属棒が、a センチで切断すれば c グラム、b センチで d グラムならば、$a:b=c:d$ である。」

算数では、未知量を計算する式を書くようにと指導される。それに比べれば、未知量を x として比例式を立てるのは、問題関係そのままであり直接的で、１当たりでいちいち考え、計算式を書くよりはやさしい。

なお、この部類の問題を図にすれば、数直線ならぬ、計算尺になる。長さと重さを上下両側に目盛る、はば（巾）のある物差しであり、一種類の金属棒に随伴する計算尺である。

算術計算の比例式と、平面幾何の論証における比例式とでは使われようが異なる。比例式の処理法を、数の関係に帰着して考えるのは、使い方の異なる場の原理に依存させているようなものである。

線分量についての比に負の数は無用である。また、比の対象とする２量の図に、分子・分母ともに無理数の分数式をイメージすることはない。

幾何の場では、図形について「加比の理」が理解され、証明でこの種の「理」が使われる。場が異なれば使われようは違う。使うことを通して意味が徐々に確定し、新たな場ごとに使うことで、正しく使えるようになって行くことを思えば、「原論」Ｖ巻にあるような比例式の諸関係は図形の場で丁寧に教えられてこそ分る知識になるのだと思う。

§６．長さの式：証明と発見と：正五角形の作図

「証明」はこれからもぜひ教えたい。それを提供する形は、明治の時代からそうであったように、「原論」Ⅰ～Ⅳ巻を見本とするのが現実的であり、それ以外には考えられない。（ただし、作図手続きで「証明」している第Ⅱ巻の内容を、そのように教えたことは我が国の普通教育ではないであろう）。命題の配列まで見本にしてその通り教えることは不可能であるが、どうあがいても「原論」を原典としたものになる。従って、平行線の公理を公理として教えないでは、現行の中学の内容がそうなっているように、形がくずれてしまう。

古代の専門書の文脈まで尊重して教えることはできないし、高等教育でも現代では「原論」を真似て丁寧に、また繰り返しを厭わず語ることは基礎的な命題ほどできないが、近代の総合幾何の復興が発見した、たとえば、シムソン線や九点円を教材にすることにして、その準備に、円周角の定理とその逆を、まずはターレスの定理について、使い分けて証明するところを演ずることはできる。「証明」の作法は使う場が提供されてこそ徐々に型が身に付き、定理の連鎖を通して論理体系が浮かび上り、公理概念も知識になる。中学でちょっと教えるだけの今はそういう場になっていない。

以上のような主張を導くには、前節までの論説ではまだ不十分であろう。この節では、生徒を「証明」に集中させるためには、比や相似のことを入れない場で設定するのがよい、たとえば、シムソン線と同じ共線定理だからといってメネラウスの定理を教材に並べたりしないこと、という観点について前節とは別の側面から補足しておく。

相似の考えを使えば、容易に証明できる命題がある。方べきの定理がそうである。「原論」ではⅢ巻の命題３５（２つの弦が交わるとき）、命題３６（円外の点から円にひいた接線と、円に交わる直線）としてあり、ピタゴラスの定理を使って証明されている。その次の命題３７がⅢ巻最後の命題である。

第Ⅱ巻の作図命題１４も、ピタゴラス定理とⅡ巻の面積等式（命題5）で示されているが、相似の考えを使えば、直角三角形の直角の頂点から斜辺にひいた垂線で、相似な２つの直角三角形に分割されることから証明できる。

２つの直角三角形は、ともに、分割される前の三角形と相似であるから、この分割で、ピタゴラスの定理自体（Ⅰ巻４７）が証明できる。その証明は、「原論」のなかで、実際に（第Ⅵ巻命題３１、ピタゴラス定理の拡張）述べられている。

このようなことから、ユークリッドは、定理の発見法となる相似関係を隠してⅠ～Ⅳ巻を書いているという説を読んだ覚えがある。命題・証明という記述は定理の発見法を語っていないというのである。

いま改めて、教え伝える教育の内容ということで考えてみると、相似関係を発見法として記述するのは想像するほど易しくはない。古代でなく、現代の教室で教えることとして考えてもそうである。比例式が、はたして発見法となるかという疑問も湧く。

前にも（§３）記したが、問題を比例式や方程式に書くと元の問題の意味は見えなくなることがある。たとえば、Ⅱ巻の命題１４は、与えられた矩形の縦・横の長さが a, b のとき $x^2=ab$ を満たす線分 x を作図し、与えられた矩形と等積の正方形にするという作図問題であった。それが、このように式に書いても作図法は見えない。というより、式に書いては、問題の意味が変質する。

命題・証明という記述は定理の発見法を語る形式でないことは確かである。だが、その形式が、比や相似のことも論理的体系のなかに上手に組み込んで提示してみせることになっている。

比や相似を排してⅠ～Ⅳ巻は編んである。Ⅰ巻では、距離、長さ、長さの比の考えを表

に出さないで、ピタゴラスの定理を証明してみせる。シムソン線や、九点円はその延長上に発見された。

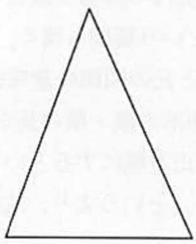
長く読み継がれ、西洋の数学発展の歴史を紡ぐ原典になったのは、その書が、このような構成のデザインも含め、素朴なもの言いで、大きな建築物にしてあったが故のことである。単に歴史の結果としてではなく、そう考えられる。

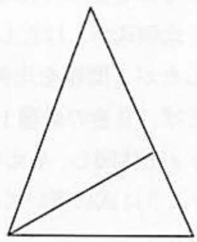
「原論」が編む物語で正五角形の作図法に関連する内容があちこちに現れる。方程式を手中にし、比や相似の関係でそれらを読むと、現在の高校の数学をもってすれば、ものの数時間で一気に概観できることのように思われるかもしれない。そうするのには、中学の「証明」の知識も要らない。

これまでの所論を補足するように、「原論」案内の一話として、正五角形の作図に関わりある命題があちこちに現れるという様子を書いておきたいと思う。いささか論旨から逸れる印象はあるだろうが、カリキュラム論を刺激し、議論に寄与する面もあり、長くならないように大まかに話すので、少々曖昧なところが残るところは我慢していただきたい。

正五角形の作図は、第Ⅳ巻命題１０「底角が頂角の２倍である二等辺三角形をつくること」(Ⅳ－１０）が基礎になる。この作図法（の証明）には、方べきの定理（Ⅲ－３６）の逆（Ⅲ－３７）が使われている。それと、$x^2=a(a-x)$を満たす線分 x の作図法（Ⅱ－１１）が使われていて、こちらは外中比の作図として比例論の巻でも語られる（Ⅵ－３０)。

正五角形の一つの辺を底辺とし、２つの対角線を等辺とする三角形が、「底角が頂角の２倍である二等辺三角形」になっている。その三角形の底角の２等分線は、三角形を２つの二等辺三角形に分け、したがって、前節に記しておいた「三角形の１角の２等分線は底辺を残りの２辺の比に分ける」(Ⅵ－３）ことからすれば、作図の三角形の等辺の長さを a、底辺を x として、比例式 $a:x=x:(a-x)$、が成り立つ。この比例式の立つことは、相似関係（もとの三角形と角の２等分線で２つになる一方の三角形とが相似であること）からも分る。





「原論」の命題一覧を参照すればわかることであるが、正五角形の作図については、Ⅳ巻で、上記の命題１０に続く１１，１２，１３，１４として記述している。

なお、Ⅳ巻最後の命題１６は正十五角形の作図法について述べている。それは、正五角

形の作図を基にしている。

さらに関連話をもう一件、XⅢ巻になるが、正十二面体の「作図」やその基礎になる事項として正五角形関連の命題が、正五角形の語が言明に入っているのだけでも４つある。そのなかに、命題１０として、「円に内接する正五角形について、その辺の上の正方形は同じ円に内接する正六角形の辺と正十角形の辺の上の二つの正方形の和に等しい」というのがある。比と相似により証明されている。この命題発見の歴史は、まだ解明されていないのではないかと思う。

半角の公式などで、三角比の関係式にすることも可能であるが、計算した三角比を代入して式の成立が「証明」できたとしても、事実発見の形は見えてこない。

歴史事実として、このような「原論」の命題から、トレミー（プトレマイオス）は円に内接する正五角形の簡明な作図法に気付き（トレミーの作図法）、彼の天文の書「アルマゲスト」の「弦の表（三角比の表）」を作るのに利用していることを思い出しておきたい。「アルマゲスト」には、XⅢ－１０を引用した、作図法の証明が書かれている。

「原論」で正五角形の作図に係わりある命題があちこちに現れるのも、「原論」が作図法を語るように記述していることから来るのであると思う。その語り口が２３００年過ぎても「証明」教育の原典となっている大きな要因である。

「原論」が生んだ後世の数学研究の課題は、作図法を骨格にして「原論」ががっちりと構成されていたことを明らかにしている。

作図問題そのことに限っても、数学史をにぎわしたことで、角の３等分線～正９角形の作図、正７角形の作図、正１７角形の作図法（ガウス）、立方体の倍の体積の立方体の作図、矩形の方形化（命題Ⅱ－１４）に対する円の方形化、とある。

「原論」の数学は、定規とコンパスによる作図という狭い領域に限定されているという数学研究の発展史上での批判の言辞を、そのまま教育内容のことに持ち込み、「原論」に倣っては偏ってしまうと、早とちりしないように気を付けたいものである。批判は、「原論」を深く読んだ人が、「原論」を勉強した人に向って語っている言辞である。

§７．作図の手順で：帰謬法：「原論」の記述

４年ぶりの講義に背中を押されて平成２１年の全国学力テストの問題を読んだら、何かが気掛かりで、平成２０年度調査の「集計結果（国立教育政策研究所）」を手にすることができたのが幸い、調査問題が資料編にあり、図形領域の問題を解いてみた。中学校第３学年数学Ａ（主として「知識」に関する問題）の、問４～８である。答えようとして気持に引っかかったのは、答はひとつ書くだけでいいのか、全てを書くのかというところであった。それに、論証でない問題の答がさっと出ない。垂線の作図を述べて、「この作図の方法は、どのような性質を用いているといえますか」という問４（２）では、選択肢のア～オのうち、ア～エは説明の絵に合わないからとオを答に選ぶことになるが、この軸対称を原理と

するというのに頭を傾げてしまった。垂線の作図はできるが、原理は次のどれかと訊かれると迷ってしまう。

中学１年の指導要目にある「線対称、点対称の意味を理解すること」、「対称性に着目して平面図形について直感的な見方や考え方を深めること」についての問題である。そういう見方、考え方が、「基本的な作図の方法を理解し、それを利用することができること」に益するのか疑問の気持が芽生えた。

機械処理向けに作られた問題を種に、それも自分のたまたまの印象を根拠にして軽々に物申していけないのは重々承知の上であるが、縷々述べてきた論証幾何の、「証明」する行為をよりよく学ばせる平面幾何の形は、どうもがいても、取り繕っても、「原論」の精神を尊重するものになってしまうのであって、その平面幾何の学びに入るのに、直観幾何のようなものの学習が準備になるわけではない。平面幾何で証明を積み重ねるのが初心者には難しいとしても、それは直観幾何を準備すれば分りやすくなるわけではない。江戸期の和算家が、「原論」の命題に学ぶものなしと感じたように、言明には彼等の知っていることが連なり、彼等から見れば子供だましのような作図問題が並んでいた。第Ｉ巻最後のピタゴラスの定理にしても、面積計量のこととして中国伝来で知られている。その定理の逆などは無用、くどい説明も要らない。

中学の教材のこと故、直観幾何と記したが、中１の「対称性に着目して」というのは、平面の合同変換なる近代の数学概念を思わせる。

「原論」の古代にはない見方である。「原論」には図形の移動についての公理が欠けているという、数学の批判の上に整備され生まれた幾何学理論の見方である。この見方からは、初めに平面ありき、平面があっての平面図形で、図形は、図形を動かし比べる移動の法則にしばられる。合同なのは法則に従い動いたからだと、平面上の図形を、平面の外の高みから見ている。

それに対し、「原論」の題材と記述には、古代の素朴さがある。単色、単調の素朴、地上で幼い日からたわむれてきた形そのものが図形であり、その分りやすさは、子供の学びから教えられる。そこは、教室での学生の反応にも仄見えることがあるように思う。学業で課せられた机上の作業を離れた、鳥瞰の高みから語られても、子供は急には傍観者の立場に自分を置けない。

「原論」は作図法を記述することで構築されている。全巻が、といっても言い過ぎではないと思う。記述展開が、というだけでなく、言明、証明ともに、作図手順を述べるように語る。それも飛躍なく、省略なく丁寧に、理由となることは、何度でも繰返す。「既に言ったように」とか、「すぐ分るように」と言うことはない。後で思い出して「なんとなれば」と言って付け足すこともない。素朴であるが、練られた論理の筋は緊密である。

「平行ならば錯角が等しい」とつづめて言うことはないし、それを平行線の性質と呼んで引用したりすることもない。

手順通りに作図の仕方を述べるのなど、今日、したことを、した順に書き連ねる小学生

の日記を思わせる。

作図法それ自体を述べた命題がたくさんあって、第I巻でみると、４８の命題のうち、作図命題は１３ある。その一番最後は命題４６で「与えられて線分上に正方形を描くこと」、これは、ピタゴラスの定理の命題４６の直前に記述されている。

この作図はわれわれの感覚ではやさしく、命題1「与えられた有限な直線（線分）上に等辺三角形をつくること」も同類に感じるが、命題２，３はわれわれには見慣れない内容である。

このような解り難さも含め、帰謬法（背理法）という論法を早くから使い、決して初等的ではないが、作図手順の語り口は全巻を貫いていると思う。

そういう文脈の上で考えれば、いやに回りくどいものに見た、二等辺三角形の定理（I巻－命題５）の「原論」の証明が、簡明なものに思われてくる。平行線の公準の述べ方も素朴で、作業可能な作図にして自然な語り口で述べていると読める。

「平行な線は一つあって、一つに限る」というのは、平行線をひく作業者の言ではなく、傍観者の目からの言である。

「原論」に、「２点間の最短距離は直線」というのがないのは当然としても、「２点を通る直線はただ一つ」と言わないのも肯ける。

長さを測る万能の物差はなくても、２つの線分は並べれば大小が判る。コンパスの脚の開きで大きさを計るのは作図にならない。作図で並べ比べる手順まで、「原論」は命題１，２，３として記述していたのである。

「２点間の最短距離は直線」というのはないが、「三角形の２辺の和は第３辺より大きい」という命題は証明される（I－２０)。

三角形の合同に係わることを再度話題にしよう。二等辺三角形の定理について、「底辺をＢＣとする二等辺三角形ＡＢＣは三角形ＡＣＢと（２辺挟角）合同であるから、∠Ｂ＝∠Ｃである」とする証明も正しい。が、「原論」の単調、単線で素朴な語りからしたら、採用される証明法ではないと思う。

I巻のこの命題の先も読んだ真面目な読者には、「原論」の証明が一番わかりよいと思う。もしかしたら、現在でも「証明」を学ばせる課程では最適かもしれない、という気さえしてくる。その仮想の課程では、ピタゴラスの定理は、長さの式を使わない「原論」の証明で教えるのがいいであろう。

「原論」が、△ＡＢＣを裏返し（回転して）△ＡＣＢにする、としないのは、２つの三角形の一方を平行移動や回転移動で平面上を滑らして他方に重ねるのはいいが、裏返しは重ねる移動に入れていないのだろうと考えてはいけない。そう早とちりして、裏返しも行って他と重なる合同が「原論」のどこで出てくるだろうと探したことがあった。おそまつな次第である。

灯台下暗し、二等辺三角形の定理（I巻－命題５）それ自身の証明のなかでそれを行っている。もちろん、言うまでもないことだが、三角形を裏返したのが重なるから合同だと

しているのではない。

「二等辺三角形ＡＢＣは三角形ＡＣＢと（２辺挟角）合同である」という証明だと、「原論」の文脈では、二等辺三角形ＡＢＣに対し、三角形ＡＣＢを作図しなければならない。ＡＢＣと別に作図されるのであるから、それはＡＢＣとは別のところに、記号も変えて描かれるであろう。それではまぎらわしく、記述も煩雑になる。

「原論」の記述を読むのに、合同変換のような数学の高みから評釈しては間違えるのである。だから、「原論」にそっくりの証明に新しい数学観念をまぶして教えたのでは、生徒には整理不能な部分が生まれ、迷うと思う。

「原論」には、合同に当たる語がない。合同の定義は書いていないし、合同「概念」を語ることはない。合同概念は「原論」が語る物語の筋には無縁の、不純物である。

第Ⅱ巻の命題を読み、講義で「原論」の証明をたどっているうちに、今まで気にも止めなかったことが気になって、新たな興味が内から湧いてきた、と**はじめに**で述べた。

合同の語のないことも、気になる一連のなかに入る。「原論」の記述する数学に身を置いて眺めると、合同を習い理解し、合同の語を使い、使い慣れるという過程は要らない。「原論」では表現することの意味が使い方で確定して行く。比べて、学校の数学では、わざわざの説明の要らない事柄が定義事項のように語られ、数学用語にされて、早くから教導されている。

「合同」について見れば、ここが同じ、そこも同じで、三角形が同じであると括られ、合同な三角形から、三角形の合同条件という括り方も作られる。２つの図形をぴったり重ねることができるとき、２つは合同である。そう言って、「合同」がキーワードとして指導されると、こんどは、２つの図形を重ねるための「移動」が意識される。わたしは図形を滑らすだけでなく裏返すのも、算数の教育で実物の「移動」に入れてもいいかと迷う。

「移動」や「合同」の語は授業で使わなくても、それらの語で指導書が教育内容を解説すれば、教科書はその括りで記述する。そのうち、その括り自体を教えるようになる。

全国学力テストの問題にも「右の三角形と合同な三角形を、下の（図の）アからエの中から１つ選びなさい」という問題の答は、裏返した三角形である。

「原論」を読んでいるときは、意識することなく通り過ぎるところが、中学校の数学ではテストで試される知識になっている。

はじめにでは、「原論」には代数式だけでなく、中学校の図形領域で教えているような幾多の記号がないことが強く意識されようになったと書いた。講義で、「原論」の素朴、簡明に見習い、省略したりつづめたりすることなく、繰返すことを厭わずに話し、板書することを心掛けようとして意識されたことである。わかる「証明」の見本を演技するには、気力、体力が要る。

三角形ＡＢＣと書き、角ＡＣＢと書くよりは、△ＡＢＣ，∠Ｃと書く方が楽である。ＡＢ＝ＡＣ、∠Ｂ＝∠Ｃと書き、ＡＢ＋ＢＣ＝ＡＣのような書き方もする。

角の大きさを計量化した、α 度、$\beta°$ のような書き方もするから、教科書では、a度、$b°$

のように記し、あるときは、$\angle a, \angle b$とも書く。使い慣れれば記号は便利だとなると、書かれる文脈を離れて使われ、勉強目的の「証明」本体である文脈の影はますます薄くなる。

平行や垂直の記号を作り、教室でも使うから、全国学力テストには、使い方の問題が出題される。

ついでに言えば、仮定をA，結論をBと書いて、AならばBと言い、それをA→Bと書く。高校の数学ではこの記号論理の記号で背理法を教える。

「原論」にある命題について講義をするうちに、数学教科が固有に教えている用語、記号の多いこと、雑多なことが気になりだした。そしたら、教科書の単元ごとに、章・節ごとに話題は変わり、脈略についての断りはなく、テーマの動くのも気に掛かり、教科書のページが不協和音を奏でているように感じられてきた。

数学の学びに入れない生徒には、耳障りな音が聴こえているのかもしれない。もちろん、知識の連関など気にせず、使用ルールをゲーム感覚で覚えて、記号を上手に操る数学の優等生には背景音など耳に入らない。たとえ耳に聴こえていても、無視して集中する能力を身に付けている。

「証明」の指導のことに話を戻せば、「証明」についてのことも平面幾何の「証明」とは別立ての知識にして、要目にして授けている。A→Bの図式で背理法を教えても、戦前の旧制中学生が帰謬法の洗礼を受けた定理「錯角が等しければ平行」（Ｉ－２７）の証明は理解できない。「逆、必ずしも真ならず」などと唱えてみても、「証明」の実行には機能しないし、役に立たない。と、これは、昔のわたしの授業・講義を思い出しての反省の言である。

平面幾何が中学に押し込められたことによって、証明は、平行線の性質や、三角形の合同条件や、内角の和定理や、を使ってするものであると、「証明」イメージまで数学教科に閉じ込められた平面図形に固有のものになった。そんな思いに囚われる。

そして考える。数学カリキュラム改革の基本には、他教科の学びとの心理的垣根を低くする知恵が根底に据えられなければならないのであろうと。

むすびに

ラテン語の教科書として１９世紀を過ぎても使われていたというから、「原論」は、古代ギリシアでは“国語”で書かれて国語の副読本のように使われたとイメージしてみる。そこには、「定理」の語も「証明」の語もない。合同条件とか、必要条件という語もない。「正多角形」概念のようなのも、等辺等角の五角形のように言えばすむので、語としてはない。等辺三角形といわれて、正三角形の語も無用である。正方形（square）は多分日常語にあり、第Ｉ巻でその語を用いて「等辺でかつ角が直角の四辺形」と定義される。もちろん「等辺三角形は二等辺三角形である」など、子供を惑わすような言辞は出てこない。「原論」では、大人の常識通りに、「二等辺三角形は二つだけ等しい辺をもつもの」を呼ぶ言葉である。

「原論」が数学の知を盛った書であることに違いはないが、現代の専門分科した「数学」の用語で特徴付けようとしては的を射ることはないであろう。だから、「教育」の知を盛った書と言えばよいのであろうが、教育学が分科の学になっている今日の先進国にあっては「数学」の知というのと同じジレンマに陥る。ここでは、むしろ、人間知の書と考えるしかないであろう。歴史からすれば、人類知を担い、厳密科学の源流をなした書である。ところが、そこが見えにくく、見ようとするゆとりが人々になく、見えない世になった。

だが、日本の教科書が「原論」にある定理を記し、定理によっては後生大事に「原論」にあるのと同じ図を載せて、「原論」とそっくりの証明を保存している。思えば、世はずいぶんと変化したのに、学校制度が変えられ、進化し、要領の大改訂もあったのに、不思議の感に打たれるが、残っていることをありがたく、貴重なことに思い、後世に人間知として上手に残す策として夢見たのは、平面幾何を高等学校の数学に復興することであった。復興にはテキストが伴う。平面幾何の教導での主教材は、本稿で模索したように、論証の一本の鎖が物語を紡ぐ、平成の「幾何原本」なる読本である。

そんな夢の具体化の方策に分け入ることは避け、学校カリキュラムのための、平成の「幾何原本」から、比と比例に進む部分についての案を二三、最後に述べてから、夢の中身を語る。比例といっても、関数概念の比例ではなく、比例式の立つ比例関係であり、三角法（trigonometry）と呼ばれていた科目の内容である。「三角法」には、図形についての比や相似のことも所属させる。つまり、「幾何原本」は、「代数」とともに「三角法」の前に学ばれる科目と想定している。余弦定理は三角法の言葉である。証明は「幾何原本」で行われる。三角形の３辺の上に立つ正方形の面積の間の関係であり、ピタゴラスの定理の拡張として、鈍角と鋭角の場合について別々に証明される。

拡張について、あるいは拡張の考え方を教えるのではなく、拡張して見せるのであり、「拡張」の語は口にしなくていい。

式にした「余弦」定理の見方として面積関係がある、などという目配りはつまらない。

カリキュラムの道程は、その面積関係から逆に、「余弦」を学ぶように作られる。コサイン記号はそのとき三角比の記号として導入される。

三角形の辺と角に、オイラーの記号を付けて式に書けば次の３通りになるが、

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

「定理」として言明するときは、この区別はなく、一つである。

余弦に対するは正弦、正弦定理といえば、定理の式には外接円の直径 $2R$ があり、証明には円周角の定理が要るとわたしは思い込んでいた。だが、$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$ の部分の理解に、外接円は要らない。そう気付いたら、この関係を導くところで、逆に、三角比としてのサインの意味を再認識できると思った。定義だけに頼る、論理の糸をたぐる天下る授業になっては、生徒は飽きる。

円周角の定理ですぱっと導く道程では、$2R\sin A = a$ という三角形の角と対辺の関係だけで、上の比例関係を付け足しのように、ついでに出している。余弦定理を座標平面上の式

の計算でスマートに出してみせるのも、教育課程という道路網のこのような高速化の一環に入る。かくて、三角比の表は相手にされなくなって、名称も三角関数表になった。その数表は使われることもなく、高速道の標識で目にするだけである。

当然、入学試験の、サイン・コサインの問題にも、鉛筆持つ手に汗して計算し答をしぼり出すような、泥臭いものはなくなる。

こういうことが、数学教科を人間知の教科から遠ざけたのではないだろうか。地面を歩き遊ぶ子供の姿を忘れ、数学論理の筋で整頓を繰返すうちに、新しい要目や新規の記号が増え、子供の歩みに合わせて教導する道程としてのカリキュラムに、日常との接点が見えなくなった。カリキュラムの筋は、子供の目には無機質なものに変化して行ったのである。中学の教室で子供の目から輝きが失せ、虚ろに手をこまねくことからそれが感知された。そこで、数学教育法を説く論説は、教材には現実との接点を求めよと繰返す。どうにかしようとする努力の思惑とは裏腹に、指導事例には、肉体的に身近で質朴な語りは希薄なままである。

ここに「幾何原本」と「代数」の後に学ばせるものとして夢みている科目「三角法」は地上での測量や目測や、庭や部屋、家具の測定や、絵画に描かれた事物の計測、机上の三角形の辺、角を測ることなどの身体の記憶に、幾層にもつながる。子供たちの記憶に直につながるところは、中学の数学で、また小学校の算数で教材にされることなはずである。

算数では、円の周を測り、円の面積を量る。そのとき、円の面積を、オイラーの数学記号式に合わせて、半径の２乗と比べ計らせようとするのは不自然である。

素朴で単純な、算数の測定の記憶の上に、円周率と円積率の理論は中学で教えたらいい。

江戸期の塵劫記がそうしていたように、円の面積は、その円の半径を辺とする正方形と比べるのでなく、円を内包する正方形、すなわち、外接の正方形と比べるのが自然である。

我が国では、円周率の 3.14 を小学校で教える。だから、3.14 を知らない人は殆んどいない、と自慢げにいう人は、パイ記号も知っているだろうが、「パイが、3.13 や 3.15 でなく、3.14 であるとどうして分るのか」という問に、多分、答えられないと思う。もしかしたら、「3.14159・・・を四捨五入すれば、3.14 だから、」という答が返ってくるかもしれないが。

「算数で 3.14 も教えなくていいのか」という大人のことはさておき、円周率の理論計算に関心を向けるのは、高校の「三角法」の内容になる。

「円に内接する正８角形、正１２角形の辺の周の長さを計算せよ。」

三角形の相似で解けるこの問題は、サインの半角の公式に誘導する教材になる。

円周率をめぐる物語は算数の測定作業に始まり、中学、高校まで続く。円の測定はそういう題材なはずなのに、我が国では、パイの基本関係は小学校で、小学校だけで習うことにされている。中学の数学で、また高校の数学では、算数で習ったことが文字式にされ、それが公式に使われるだけである。

と、書いてきて見た白昼夢の指導課程：

算数では円の面積 S を量り、円積率は 0.79（円法７９）と知り、中学で円周 l を測り、

和算の円周率3.16(円廻法３１６)を知る。高校の極限概念の導入話のとき3.14と「計算」させられ、一方、区分求積法で、半径 r の円について $2S = l \times r$ を知る。よって、3.14を用いて円積率を計算すれば3.14÷４＝0.785 となる。

ともあれ、「証明」を習うのは「幾何原本」からである。高校で初めて習い、証明の型を学び、論理の面から言語力に資する科目とする。科目としての「幾何原本」には読本がある。副読本でなく主読本として編まれ、そこでは、一つの定理には一つの証明が選ばれて記述されている。

「三角法」は「幾何原本」の後に教える科目としたが、円運動やラジアンを含み、関連の題材は中学から、さかのぼっては小学校から教えるということに上では話が及んだ。

本論で触れた正五角形の作図法が教科の読本「幾何原本」の本題に入るかは定かでないが、他方、「三角法」では、「与えられた円に内接する正５角形の辺の長さは」という課題として、正五角形は話題にされるであろう。

ハイキングや登山では、バイパスや高速道で先を急いでは見えない光景が見え、路傍で休憩しているときにも、子供にとっての発見がいろいろある。

道路が遊び場でなくなった時期に重なるように、内容にあそびの少ない道程になった指導過程では、数学的に広がるはずの、子供にとっての小さい発見はなかなか探せない。

ともあれ、この節で書いている数学のことどもは、わたしが生徒の頃の教科書にはまだあった。それを証拠付けるように、その頃に書かれた大学の微積分のテキストには、数表の見方、比例分配、円周率の計算、三角比の計算のことを想起しての例題を見付けることができる。

人工衛星が飛ぶようになって、数学教科の現代化が叫ばれ、たちまちのうちに、そういう例題は過半の大学テキストから消えた。微積分の記述スタイルもモダンに整備されて行き、間もなく、そのスタイルは、高校の微分積分に真似られるようになる。

経済の高度成長のときの心情に重なって、教科が、教科の垣根を高くして行ったのである。垣根でなく、外が見えないカーテンのようになった。囲いに仕切られた内はにぎにぎしく、外のざわめきを聞こうとしなければ、仕切りは鉄のカーテンになる。

かくて、大学生への解析が教え難くなった、と思う。高校で微積分を習った者にも、習わなかった者にも、教え難くなった。物言いが短絡に過ぎるが、以上のような因果関係は、数学カリキュラムの変遷に係わる仮説として成り立つと信じている。

「証明」のことは、高校で教えるのがいい。そう考えて、「証明」に集中する科目を、上では「幾何原本」と呼んだ。「三角法」はその後に学ぶものとしてみた。中学で指導する図形領域の題材や図形の扱いようは、「幾何原本」より、むしろ「三角法」に連結するものや、ことが多くなるようにも書いた。

「三角法」に連なることは徳川時代に学ばれていたことが、塵劫記から覗える。それに対し、「幾何原本」に盛られる「ターレスの遺産」は、明治・大正が建設した学校で、文明開化の号令の下に、知を愛する探究心を育む道と説かれて新たに学ばれた。西洋音楽、然

り、西洋美術、然り。強い近代文明の国家を築くためという、目前の目的にも結びついていた。それらを外に求め続けて日本の今日がある。

外来のものには、古来の魂が反発する。抵抗し、反抗するのは健全な心から発していると捉えてみる。その心は、外来の神の光に照らされて自己を同定し、いっそうたくましく成長してくれるであろう。

外来の精神は本来の姿のままで示された方が、長い目でみればより良く受け入れられると考えたい。

高校卒業後の進路についての区別は、精神や心の違いから出るものではない。高校の早い段階からの文系・理系の仕切りをなくすることにも、新しい皮袋に入れられた「幾何原本」は機能するのであろう。農業・工業・商業の専門学校があった旧い時代に、「幾何」、「解析幾何」、「三角法」が文系・理系の差なく、高等教育進学者に共通の教養科目となっていたように、と夢想する。

最後に、この場を借りて一言。数学を教えることから引退して、数学の活動に無縁の身になったのに、臨時の講師をしたことが、このような論説をむすびに書かせてくれたこと、そういう機会が生まれたことに感謝の意を表したい。

この論説を書き綴ったことで、かつて他所で指導案などと題して発表した論稿の動機が、カリキュラム論の文脈の基に、すっきり述べられたようで、今はたいへん有難く思う。

図書・文献

[1] 中村幸四郎，他訳：ユークリッド原論，共立出版，１９７１.

[2] Heath, Thomas L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements, Translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary, (Second edition, revised with additions) Dover Publications, Inc. 1956. （初版は１９０８、改版は１９２５）

[3] 斎藤 憲：ユークリッド『原論』とは何か，岩波科学ライブラリー，２００８.

[4] W.S.アングラン,J.ランベク著，三宅克哉訳：タレスの遺産、数学史と数学の基礎から，シュプランガー・フェアラーク東京，１９９７.

[5] プトレマイオス著，薮内 清訳：アルマゲスト，恒星社厚生閣，１９８２.

[6] 和算研究所塵劫記委員会：現代語『塵劫記』，２０００.

[7] 板垣芳雄：古代中国の算術と 古代ギリシアの数学「原論」と：日本人にとっての数学 そのわかり難い属性のところを考える，鳴門教育大学「学校数学研究」，Vol.17,No.1,5~19，２００９.

By reading Euclid's Elements consider the frame of geometry to be reconstructed newly in high-school mathematics

ITAGAKI Yoshio
(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

In lower secondary school mathematics we prove the theorem (of sum of triangular angles) "the three interior angles of the triangle are equal to two right angles" by drawing the line through a vertex of the triangle parallel to the opposite side. This proof originated in Euclid's Elements volume I. Though the school curriculum contains some theorems and proofs in the Elements, they are not taught under the Elements' synthesis context, because it is beyond the scope of pupils' understanding.

Deductive plane geometry following the Elements which teaches its postulate 5 as an "axiom" had been introduced before the World War II in Japan Education. Nowadays, the deductive geometry is not taught in upper school, and trigonometry of which basis should be taken on actual measurement is introduced insufficiently. In this paper we discuss those subjects through reading the Elements volumes I ~IV, where the differences between geometry and algebra are also described especially through observing propositions of volume II. We take the standpoint of observations on pedagogy, searching the method how to make the study contents more closely connected in six-year secondary education curriculum. We could obtain many hints on teaching method from the simple description itself of the Elements, in which algebraic symbols or abstract notations are not used.

Keywords: Euclid's Elements, school geometry, national curriculum, three angles of triangle, isosceles triangle, cosine low, algebra, trigonometry