東北数学教育学会 年報第42号 2011年3月31日

# 和算家の正五角形の作図法をユークリッド「原論」の数学で読む；教科カリキュラム論の延長上に、そして、「原論」の特徴を析出させる試みの一つとして

板垣芳雄
（宮城教育大学名誉教授）

## はじめに

江戸時代の日本人が記録している正五角形の作図法を、伊藤幸男が紹介している[1,2]。それら作図法の発見に至る道筋を探り、我流に推し測った結果を報告することがこの論稿の第一の目的である。

紹介の作図法４種のうちの一つ「大西洋の術」は、プトレマイオスの「アルマゲスト」にある作図法で、今日、われわれがトレミーの方法と呼んで学んでいるものである。名前からして、それが鎖国の日本にも伝わり、和算家の広く知るところとなったことがわかる。和算史に無知な者にも、どのように我が国に伝わり、和算の世界で知られるようになったかを想像することになり、興味が持たれる。

トレミーの作図法の原理はトレミー自身が「アルマゲスト」でユークリッド「原論」の命題を引用して説明している。「アルマゲスト」の第一巻を読んだとき、トレミーをさかのぼること数百年も前の古典古代のこの著書を根拠にして叙述しているのを面前にして新鮮な驚きに襲われたのを思い出す。

トレミーが引用している一つは「原論」第XⅢ巻の命題１０である。驚きは心の底に仕舞ったまま、そこを紹介する文を綴ったことがあるが[3]、正多面体のことを１８の命題によって叙述している「原論」最終巻の命題の一つが根拠にされていることが、わたしにはどこか腑に落ちないまま、その違和感には触れなかった。

「原論」全巻について、正五角形の作図との関わりを軸足にして、関連する諸命題の関わり様を見ると、この著書の文脈が見えてくる[4]（§７）。構造とか、論理体系という語には置き換えられない、そこで物語られている数学の筋である。先に発表したカリキュラム論では、現行指導要領の教科書では、中学の図形領域に、身体的で素朴な物語の筋や、物語られる文脈がないと論じた。この講でそれを補足することができたと思う。

この論稿では、コンパスで手際よく、あるいは、上手に正五角形を作図するという問題に取り組んだ和算家がどのように考えて彼らの方法を発見したかを、我流に推し測ったと

述べたが、我流とは、詳しくいえば、「原論」の内容を土俵にして考えたということである。その我流推測の成功体験から、この古代の書「原論」の叙述の素朴なこと、語りの簡明なこと、構成がしっかりしていることを改めて教えられたように思う。

もちろん、探求結果の適不適は、個人的な成功感とは別に判定されることである。

ところで、「原論」を土俵にして和算家の正五角形の作図法を読み解くことは、作図法を創案するという江戸期の数学の問題解決という鏡を手にして、そこに、厳密科学の源流たる「原論」の姿を写すことになる。したがってこの論稿では、和算家の作図問題の解を読むことを目的とし、その作図法を評定することによって逆に、「原論」の内容を語っていることにもなる。古典研究者ではない素人が「原論」の像を撫でるように描く文ではあるが、教科教育に携わった者の視点で考えさせられ気付いたことには、わが国の一般向け解説では紹介されていないこと、さらには、従来のものにはない分析が加えられていると思う。

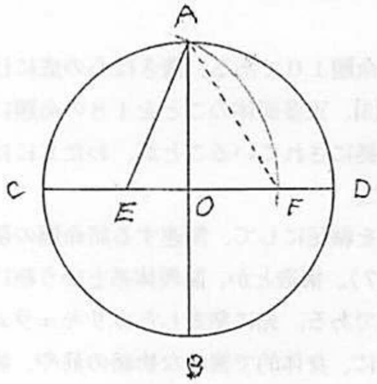
旧きを温ねることの意義を和算に仮託して述べた気持もある。

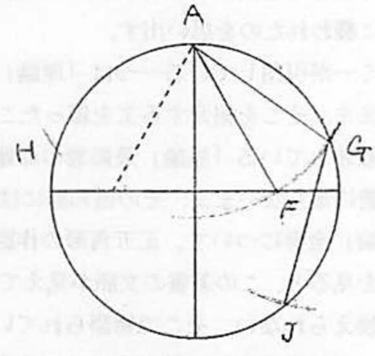
それもこれも、伊藤幸男（山形県和算研究会会長）の解説があってこそ出来たことであった。

謝辞：伊藤幸男先生は、ずいぶん前から和算研究の報告を送ってくださり、なかには「山形の和算（平成８年）」、「安嶋直円二百年祭記念出版・新庄の和算（平成１０年）」がある。本年、平成２２年９月２０日に、お元気で米寿の日を迎えられたとお聞きし、感謝の意を込めて、これからもお変わりなく研究に勤しまれますようにと祈念しながらこの小編を綴った。

## §１．大西洋の術

最初にトレミーの作図法を記す。



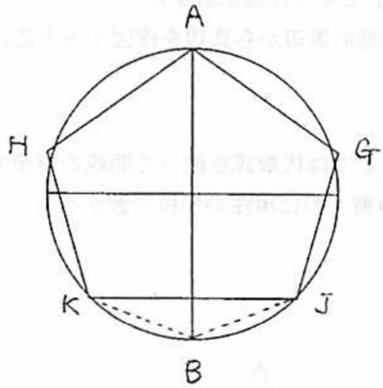

「図のAB,CDは中心がOの円の直径で、互いに直交している。半径COの中心をEとし、Eを中心、EAを半径とする円がODと交わる点をFとする。すると、AFはこの円に

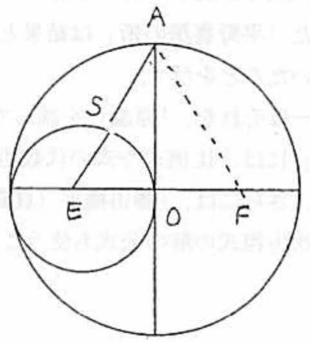
内接する正五角形の辺の長さになる。中心 A、半径 AF の円がもとの円 O と交わる点を G,H、とし、次に、中心 G、半径 GA の円がもとの円 O と新たに J で交わり、中心 H、半径 HA の円がもとの円 O と K で交われば、A,G,J,K,H を結んで正五角形が得られる。」

和算家が「大西洋の術」としているのに、ほぼ同じに述べたが、実質的にトレミーの作図法である。AF が正五角形の辺の長さになることについてのトレミーの説明は後回しにする。和算家がこの術を知って、試して、確かに正五角形が書けることを納得したであろう。

その正確な正五角形の図にコンパスをあてがい、補助の線を引いて、あれこれ比較しながら、別種の作図手順を見つけたということも考えられると思う。

「平野喜房の術」は、「大西洋の術」で書いた図にコンパスを当てているうちに気付きそうにも思われる。




すなわち、BJ あるいは BK は OF に等しいと。

そうであれば、OF は、EA に等しくとった EF から円 O の半径の半分の OE を除いた残りであるから、その長さは、中心 E 半径 EO の円 E を書けば、EA から円 E の部分を除いた残り AS として実現される。

ゆえに、中心 A 半径 AS の円と、もとの円 O との 2 つの交点を結ぶことによって、JK に等しい、内接五角形の辺が得られる。

「平野喜房の術」は、まさしく、そういう作図法である。

ここで、BJ と BK とは、円に内接する正十角形の辺であることに注目する。それが、トレミーの方法では OF として作図されてある。

正十角形が作図されれば、その頂点を一つ置きに結んで正五角形が得られる。もちろん、逆に、正五角形が描かれれば、辺の二等分線が外接円と交わる点として、同じ円に内接する正十角形の頂点が得られる。

以上のようなことは、トレミーが十分に承知していたことである。

トレミーの書「アルマゲスト」は天文・天体観測の古典で、付録の三角比の表は近世まで使用された[5]。第一巻第九節には三角比の表の計算の仕方が述べられている。計算には

正五角形の作図法が巧妙に使われている。ここでは、トレミーの大きな目的を記すだけで計算には触れずに、作図法そのことに戻る。AF が円 O に内接する正五角形の辺を与え、OF は内接正十角形の辺を与えることのうち、「平野喜房の術」は後者のみを原理としていた。まずは、その後者が、ユークリッドの「原論」でどのように“解説”記述されているかを見ることにする[6]。前者の方は後回しにする。

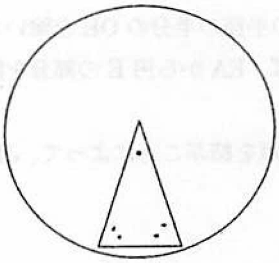
## §２．外中比に分ける

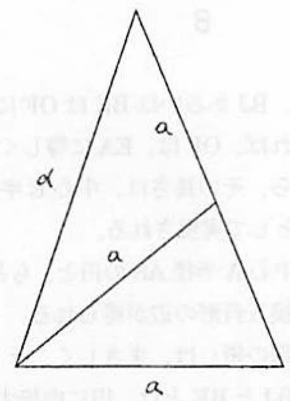
円に内接する正十角形の一つの辺を底辺、円の中心を頂点とする二等辺三角形は、頂角が３６度、両底角は７２度である。もっとも、３６０度と角を測るのを普及させたのはトレミーの「アルマゲスト」のようで、ユークリッド「原論」では、この三角形を「底辺における角の双方が残りの角の２倍である二等辺三角形」として作図法を記述している。

上に見た「平野喜房の術」は結果として、この三角形の等辺から底辺を作図する方法に気付いていたことを示す。

トレミーはそれを、「原論」を読んで知っていた。

「原論」には、比例式や式の代数処理はないが、ここでは代数式を使って問題の解法を鳥瞰する。さらには、「藤田権平（貞資）の術」を読み解くのに現在の学校で教えるルート記号や二次方程式の解の公式も使うことにする。





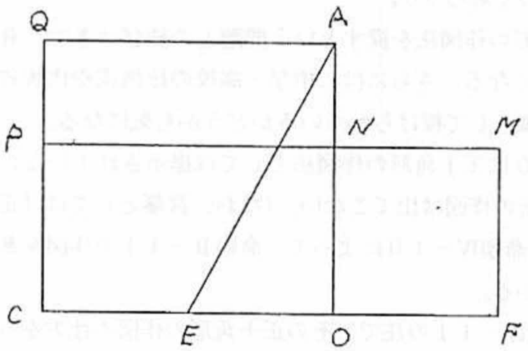

作図題の三角形の底角の２等分線を引くと、もとの三角形と同じ形の（相似な）三角形が下方にできる。上方の三角形も二等辺である。

ゆえに、もとの三角形の等辺を $d$、底辺を $a$ とすれば、その比について、比例式 $d:a=a:(d-a)$ が成り立つ。外項の積は内項の積に等しく、$d(d-a)=a^2$ である。

線分 $d$ から、この式を満たすように線分 $a$ を切り取る作図の仕方は、「原論」第Ⅱ巻の命題１１（以後Ⅱ－１１のように略記することがある）として記述されている。

すなわち「与えられた線分 $d$ を２分し、全体 $d$ と一つの部分 $d-a$ とにかこまれた矩形(長方形) を残りの部分 $a$ の上の正方形 $a^2$ に等しくすること。」

記述されている作図法は、前節で半径 AO=CO から OF を作図したのと実質同じである。前の記号はそのままに、さらに記号を付け足して「原論」の命題の証明図を書いておけば、




となり、作図題は「線分 AO が与えられたとき、それを N で２分し、全体 AO と一つの部分 AN とに囲まれた矩形を残りの部分 NO の上の正方形に等しくすること」となる。

解は、前節に記したと同じで、AO 上の正方形の辺 CO の中点を E とし、EA に等しく EF を引き、OF 上の正方形を OFMN とすれば、N が求める分点となる。すなわち、MN を P まで延長すれば、AO（=AQ）と AN にかこまれた矩形 ANPQ の面積は NO 上の正方形に等しい。

証明にはピタゴラスの定理を用いる。

ところで、等辺を AO : $d$ に、NO=OF : $a$ を底辺にとれば、頂角が３６度の二等辺三角形になることの証明がまだ残っている。面積関係 $d(d-a)=a^2$ を満たす２つの線分で描かれた二等辺三角形は「底辺における角の双方が残りの角の２倍である」ことの証明である。

面積関係 $d(d-a)=a^2$ が成り立てば、比例関係 $d:a=a:(d-a)$ が成り立ち、この関係が成り立つように、等辺と底辺を描いたのであるから、頂角が３６度でないはずがないということの説明である。

「原論」では、比と比例関係のことは第Ⅴ巻から書かれていて、その前にはない。線分をここで述べている比に分割するのを「外中比に分ける」（黄金分割）と定義するのは第Ⅵ巻に入ってからである。

「原論」は、線分 $d$ を面積関係 $d(d-a)=a^2$ を満たすように分割し、$(d,a)$を（等辺、底辺）とする二等辺三角形を描けば、それは「底辺における角の双方が残りの角の２倍である」ことを第Ⅳ巻の作図命題１０で証明している。その証明は「円の章」のⅢ巻の、命題３２（接弦定理）と命題３７（方冪の定理の逆）を根拠にして行われる。

現在は比例式も文字式も中学で勉強する。数式を道具として、あらかじめ図にした正十角形について高校生に語れば、命題Ⅱ－１１を基にする作図を正しいと納得するであろう。比例式、代数式の勉強は、命題Ⅳ－１０のような吟味（の証明）を無用にしてくれるようである。

そのとき、吟味の証明に代わる数理の思考はどうなっているのであろうか。あるいは、それに当る内容はどこへ姿を隠したのであろうか。

比例式や代数式の教導が、正五角形の作図法を探すという問題との結びつきで、有効に行われているかということも考えたくなる。さらには、中学・高校の比例式や代数式の学習が、数学を越えて、生きて働く知識として授けられているかどうかも気になる。

話を「原論」に戻す。命題Ⅳ－１０は正十角形の作図法としては提示されていない。実は「正多角形の章」のⅣ巻に正十角形の作図は出てこない。（なお、言葉としては「正多角形」も出てこない。）だが、読者には命題Ⅳ－１０によって、命題Ⅱ－１１の作図を基にして正十角形の作図ができることはわかる。

「原論」の英訳書 Heath[7]は命題Ⅳ－１１の注で、その正十角形の作図の仕方をうまく利用した形の、与えられた円に内接する正五角形を作図する H.M.Taylor の方法を紹介している。それは、「平野喜房の術」と同じである。

「藤田権平の術」については、節を改めて考えることにする。いま触れたばかりのⅣ－１１の命題文を読むことから話を続ける。

### §３．正五角形の辺と対角線

「原論」のⅣ－１１は「与えられた円に正五角形を内接させること」という作図命題である。一つ前の命題１０が、「底辺における角の双方が残りの角の２倍である二等辺三角形をつくること」である。前節ではこの命題を「円に正十角形を内接させる」作図と結び付けて取り上げたが、命題１０は、実は、正五角形の作図命題の準備にしてあったのである。

正五角形の対角線と辺の作る三角形は、頂角が３６度の二等辺三角形になるから、その二等辺三角形を作図して、それと相似な三角形を与えられた円に内接するように作図すれば、それを基に正五角形を内接させることができる。命題Ⅳ－１１はそういう内容であり、作図としては、一度は命題１０の作図を行うようになっている。

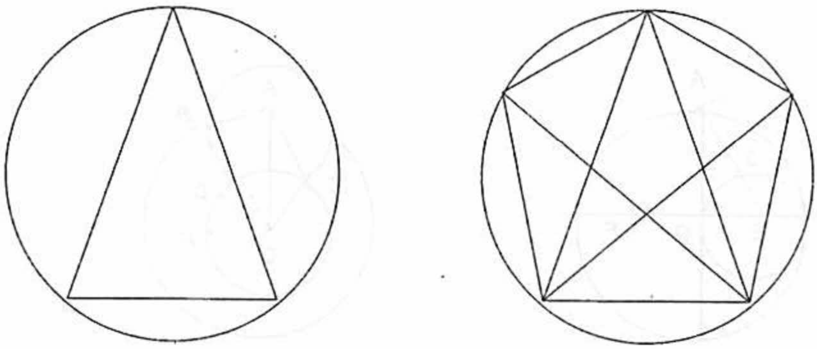
つまり「円が与えられたとき、その円に内接する正五角形を作図せよ」という問題に答えるような作図法を命題一つにして記しているわけではない。この場合、基にする三角形の作図を一つ前の命題に記述しており、それと相似な三角形を円に内接させる作図法は、命題Ⅳ－２として記述している。

一度示された作図は、その後には省略されるというよりは、図形存在の原理とされる。

そういう例を他に一つ話せば、平行な線の引き方が一度は作図法として説明され、それが後の命題で証明の補助線に用いられるときは、作図法のことには触れずにそこにあるものとして、単に「平行な線を引く」と言うのみである。

作図され複製されて在る図形について観察される、辺や角についての関係から、この平面図形は次の性質を持つと推論するような記述は「原論」にはないと思う。

前節に記したように、代数式や代数処理はそういう推論の道具となる。



上の図には円が入っているが、正五角形は、辺と対角線で"決まる"ことが解る。だから、その作図は辺と対角線があれば、円がなくてもできるはずである。

正五角形の辺 $a$ と対角線 $d$ の間には、$d(d-a)=a^2$ という式が成り立つ。これを $d$ についての二次方程式として解けば、$d=\frac{\sqrt{5}}{2}a+\frac{1}{2}a$ である。

与えられた辺 $a$ に対し、2等分の線分 $c=\frac{1}{2}a$ の $\sqrt{5}$ 倍の線分 $\sqrt{5}c=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ を作図すれば、対角線 $\sqrt{5}c+c$ の長さを得て、正五角形の作図ができる。

$\sqrt{5}$ 倍は、$(2c,c)$ を2辺とする直角三角形の斜辺として作図できる。

それを、$(2c,c)$ の直角三角形の図から始めて、コンパスを手際よく使い、正五角形の作図に至るのが、「藤田権平の術」になっている。この作図に外接円は要らない。

「藤田権平の術」は辺が与えられて、対角線を作図する方法である。

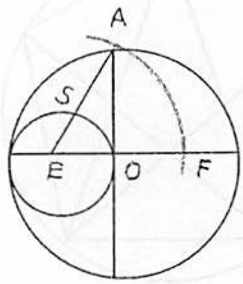
逆に、対角線が与えられて、辺を作図する方法も、同じ様に考えられるはずである。

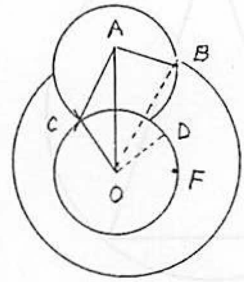
対角線 $d$ による辺 $a$ の式は、$a=\frac{\sqrt{5}}{2}d-\frac{1}{2}d$ である。この作図は前の節までに取り上げたもので、この式は書かなかったが、与えられた円の半径に対し、その円に内接する正十角形の辺を得ることに等しいことを思い出す。

そう考えると、「藤田権平の術」に類似の作図法が作れる。和算にそれを術とする記録がないか気になりながら、ないとしたら、術の創出で和算での思考では気付き難いところがあるのか、などと想像したりするが、筆者には思い及ばぬところである。

参考のために、その作図案を次に記しておく。

最初の図と同じように円Ｏと、互いに直交する直径を描く。ただし、ここで使用する記号だけ前のものを残し、Ｅは半径の中点、ＦはEFがEAに等しいような、EOの延長上の点である。Ｅ中心で円Ｏの半径を直径とする円を描き、その円が直線AEと交わる点をＳとする。




中心がＡで半径ASの円を描き、円Ｏと交わるＦの側の点をＢとする。（三角形OABは頂角が３６度の二等辺三角形になる。）

また、中心がＯで半径OFの円を描き、円Ｅとの交点（でＳに近い方）をＣとする。次に、中心Ｂ、半径BA(=AS=OF)の円を描き、中心Ｏ半径OFの円との交点（の一方）をＤとする。

ABDOCとして、正五角形を得る。

以上。

正五角形の対角線 $d$: OAが与えられたとして、それを外中比に分けることで、辺長 $a$: OFが得られるから、例えば上のように作図できる。この作図では、外接・内接円の中心は作図されていない。

二つの量（$d,a$）で正五角形が“決まる”ことは原理的に分る。それの実現としての作図法も正五角形の“決まり方”をたぐって、作れる。作られる作図の手順は一様ではない。上の作図の場合でいうと、Ｏからの対角線が２本引かれるようにしたが（実際には線を引かなくていいが)、Ａから２本引くように形成してもいい。

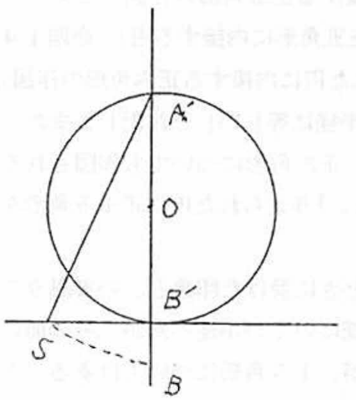
同じ計算をするプログラムでも、手順は様々で、長いのもあれば短いのもあるのを連想する。原理をたぐって作図の方法を作る作業に対し、作られた方法を読み解くのは、証明文を読むように一直線には行かない。

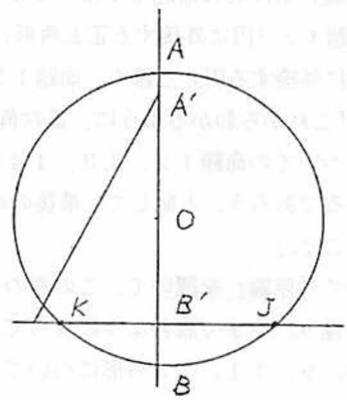
## §４．安島直円の術

正五角形の作図を、「外接円（の半径）が与えられたとき・・・」、あるいは、「辺が与えられたとき・・・」と、「原論」の命題文が述べているように分析して読むと、「安島直円の術」は、「内接円が与えられたとき、外接円を求めて正五角形を作図すること」に分類される解法になる。

内接円に対する外接円が作図されれば、内接円の接線が（同心の）外接円によって切り取られる線分が求める正五角形の辺になる。よって、その辺の長さで外接円を５等分し、分点を順に結んで正五角形を得る。

作図は、内接円（中心と半径）、接線、および、接点でその接線に直交する直線とから始められ、式にすると、内接円の半径 $r$ と外接円の半径 $R$ との間に $r+R=\sqrt{5}r$ という関係があり、$\sqrt{5}r$ は２辺を $(2r,r)$ ととった直角三角形 A'B'S の斜辺として得られるので、外接円周上の点 B を、A'B が A'S : $r+R$ に等しいように刻み、OB を半径として外接円を描くことができる。




安島がこの作図法をどのようにして見付けたかを推測するのに、「大西洋の術」として安島も知っていたと思われるトレミーの作図法で円（直径 AB）に内接する正五角形を書き、そこへ五角形の内接円（直径 A'B'）を書き足してみる。

その図に、コンパスをいろいろにあてがううちに、A'S が A'B に等しいように、辺の延長上に点 S をとると、直角三角形 A'SB' が $(2r,r)$ 型であることが測定される。であれば、逆に、その $(2r,r)$ 三角形の斜辺 A'S として、A'B : $r+R$ が得られることになる。

それが正しい作図法になることを“計算”するのは、安島には容易かったであろう。

わたしは、「安島の術」をそのように読んだ。しかし、平山 諦「和算史上の人々」[8]を開いて、「安島直円の幾何学」の節の部分をひろい読んで、自分の推測が、和算について全く無知な、我流のものであると思った。安島は、正五角形を作図するという課題に接触したとき、「美しい幾何図形を求めて」自前のものとしていた“計算”を駆使して難なく、「安島の術」を原理的に創出することができたのではなかろうか。

平山 諦は「関孝和の証明」の節で、関孝和は、正多角形の一辺を与えて、内接円の半径と外接円の半径を求める方程式を作った。それを関孝和は、正三角形から正２０角形まで行ったと記して、どのように解いたかを、正５角形と正７角形について紹介している。

正５角形の辺 $a$ と外接円の半径 $R$ との間について成り立つ結果の式は次のようになる。

$$-a^4+5a^2R^2-5R^4=0$$

正７角形については $-a^6+7a^4R^2-14a^2R^4+7R^6=0$ となる。

同じ様な関係式は、正１１角形、１３角形、１７角形についても成り立ち、関孝和はそれらを計算して得ているという。

ちなみに、上の４次方程式について、$a=\dfrac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{2}R$ が正の解である。この２つのうちの小さい方は $a=2\sin36^0R$ に等しい。

## §５．作図不可能な正多角形、正多面体の"作図"、比例式の処理

「原論」第Ⅳ巻の命題１１は「与えられた円に内接する正五角形の作図」であった。以下、命題１２「円に外接する正五角形」、命題１３「正五角形に内接する円」、命題１４「正五角形に外接する円」と続く。命題１５は「与えられた円に内接する正六角形の作図」。ここで、「これからわかるように、正六角形の辺は円の半径に等しい」と注記し、また、正五角形についての命題１２，１３，１４に当ることが、正六角形についても作図されることがわかるであろう、と記して、最後の命題１６となる。「与えられた円に正十五角形を内接させること。」

初めて「原論」を開いて、この巻の命題を読んだときに受けた印象と、いま思うことは相当に違う。中まで読むようになって知ったことは既にいくつか述べたが、その他に、正７角形、９，１１，１３角形についての命題はないが、１５角形についてはある、ということに今は目が行く。ルネサンス後の近代数学の成果から、われわれは、１７角形の作図は可能でも難しく、１９角形の作図はコンパスと定規だけでは不可能なことを知っている。角の３等分が作図できないことも知っている。

正 $n$ 角形が作図できれば、角の２等分線を引いて、正 $2n$ 角形、$4n$、$8n$、・・・角形は作図できる。９は３×３であり、正９角形は作図できない。

しかし、５×３の、正１５角形は作図できる[補注1)]。それを第Ⅳ巻で、最後の命題にしていることになる。

素朴、簡潔な語りのなかに、第Ⅳ巻なりの文脈を感じるとともに、近代に及ぶ数学史を紡ぐ物語をそこに見ることができる。

繰り返し述べることになるが、「原論」は正多角形の作図法について、第Ⅳ巻で叙述している。そこには、正五角形の作図命題もある。だが、第１節で記したトレミーの方法とは全く違う。「与えられた円に正五角形を内接させること」が問題とされ、命題１１はその作図法を述べているが、あくまでもそれは「原論」の文脈のなかでのそれである。命題１１だけ読んで正五角形を作図できるようには書かれていない。その前の作図命題、さらにはそれより前の命題の作図法も基にしているからであり、論拠をたどれば、Ⅲ巻、Ⅱ巻とさかのぼる。

トレミーの方法について、説明を残して後回しにした部分のことに移る。

最初の図で、「AF が円 O に内接する正五角形の辺を与え、OF は内接正十角形の辺を与える」のうち、OF は円に内接する正十角形の辺を与えることは、線分を外中比に分けることに深く関わっていた。残る部分の、内接正五角形の辺が図の AF として得られることは、トレミーが記しているように、「原論」第XⅢ巻の命題からわかる。５種の正多面体の“作図法”を記述している最終巻の命題１０である。

「もし等辺三角形が円に内接するならば、五角形の辺の上の正方形は同じ円に内接する六角形の辺と十角形の辺の上の二つの正方形の和に等しい。」

このことから、ピタゴラス定理の逆（Ⅰ－４８）によって、内接正６角形の辺と正１０角形の辺と正５角形の辺が作る三角形は直角三角形になる。円の半径は内接正六角形の辺に等しい。よって、六角形の辺 OA と十角形の辺 OF を、直角を挟む二辺とする三角形 AOF の斜辺 AF は正五角形の辺に等しい。

この命題を現在の記号と知識で検証することは容易い。$2R\sin 36^0$ と $R$ の平方和が $2R\sin 18^0$ の平方に等しいことを示せばよいから、次の等式の計算になる。

$$\left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2=1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

この計算はわれわれにとって容易い。だが、それが命題の証明になることを理解するのは決して初等的ではない。だから、と言ってもいいと思うが、この事実の発見に至る道を照らしてはくれない。

「原論」は三角形の相似関係を用いて命題１０を証明している。証明は発見の道を示していないが、この命題によって、トレミーは内接正五角形の直接的な作図法を導き、三角比の表を作るという目的の計算に利用した[補注1)]。著述から４５０年余りを隔てていることを思い出しながら、ユークリッドの時代の書に戻ることにする。

中村幸四郎の記す「原論」内容集約は、XⅠ、XⅡ、XⅢ巻に次のように題を付けている。内容をおおまかに知るためにそれを利用することにする。

第XⅠ巻　線と面、面と面、立体角、平行六面体、立方体、角柱

第XⅡ巻　円の面積、角錐、角柱、円錐、円柱、球の体積

第XⅢ巻　線分の分割、正多面体の辺、五つの正多面体

これら立体図形のことを取り上げているところに、なぜ、正五角形の辺のことが記載されているのか。XⅢ巻で、なぜ、「正五角形の隣り合う対角線が相互に外中比に分ける」（命題8）のようなことを証明しているのか。比例論の応用のⅥ巻で一緒に証明しておけばいいのに。そう思って、奇妙に感じたことを、はじめにで言及した。

今は、奇妙に感じたり思ったりするとしたら、それは、「原論」の時代に戻って読んでいないか、読みが足りないからだと思う。ひとは、自分の知識でものごとを測り、先入観に囚われて考える。

上の疑問の場合は、第XⅢ巻の命題8や10を論拠とする命題は、「原論」では第XⅢ巻にあるのみで、第I巻～XⅡ巻にはないことをまず思い起こすべきであった。正20面体や正12面体の「作図法」を叙述する最終巻に正五角形に関わる命題があるのは、「原論」全体に通じる、このような記述態度の、ひとつの現れに過ぎなかったのである。

そう考えると、初対面のとき、「辺が与えられて正方形を描くこと」がI巻のおしまい近くで出るのを、こんな容易い作図命題を、こんなところで、と思ったのは読みが浅かった。ピタゴラスの定理で正方形を描くから、その直前にI－46として述べているのであった。「後で使うから用意しておく、」という態度はこの古典古代の書にはなくて、「これは、なんとかの基礎だから、」という言い訳めいた命題もないのではないかと考えてしまう。

前の節で、「藤田権平の術」を読み解くところから、代数式を立て、二次方程式の解の公式を使った。「比例式$d:a=a:(d-a)$が成り立つから、外項の積は内項の積に等しく、$d(d-a)=a^2$である」というような処方もおこなった。そこに当るものを「原論」で探してみると、比例論のV巻には、“比例式”の性質について命題はあるが、項の積（面積）は出てこない。それに類したのが、XⅢ巻の前の部分に出る。ただし、全て外中比についての命題である。よって、上の記号と式はそのまま使うことにすれば、$d:a=a:(d-a)$ならば、$d+a:d=d:a$となることはV巻の命題を2つ、3つ根拠にして導かれるが、たとえば「$d+a:d=d:a$ならば、$\left(a+\dfrac{d}{2}\right)^2=5\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$となる」は、命題3として、このXⅢ巻にある。

本稿の先の節の説明で、「外項の積は内項の積に等しい」ので、として等式に“変形”し、二次方程式の解の公式から出した$a=\dfrac{\sqrt{5}}{2}d-\dfrac{1}{2}d$は、こういう形で証明されていることになる。

補注1) トレミーは、中心角72度の弦と60度の弦から、中心角12度の弦（$2R\sin 6^0$）を、“トレミーの定理”で計算した。ここで、中心角72度の弦は正五角形の辺であり、トレミーの作図法で数値計算される。同一円に内接する正5，6，30角形の辺の関係が、中心角の角度では72－60＝12となる。

このアイデアは、「原論」の正15角形の作図法から得たのではないかと推測する。

正15角形の中心角は、360度の$\frac{1}{15}$であり、$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$の関係があるから、正15角形の弦は、5角形の2弦と3角形の1弦の差として作図できる。その作図法を記述するのが命題Ⅳ－16である。

## §6．平面幾何カリキュラム論へ

正五角形の作図の仕方を探すことを課題に授業することを考えてみる。いきなりではなく、正方形や正六角形の作図法から考えさせるのがいいかもしれない。外接円に考え及び、そのうち内接円を話題にできるであろう。見つけた方法について比較吟味するうちに「辺が与えられて・・」と「外接円が与えられて・・」と区別して考えるようになる。正六角形についてだけでも勉強することは生徒に応じていろいろにある。

正方形、正六角形に比べて、正五角形の作図法はかなり難しい課題になるが、正確に描かれた正五角形と外接円の図のコピーを下敷きにして、コンパスで測ったりの手探りで、どんなことに気付くであろうか。

ともあれ、作図法は二次方程式の応用問題ではない。代数式や方程式は作図法の発見の道具とはならない。作図法を探る作業には学びの種がいろいろに含まれている。そういう学びの内容には、「原論」第Ⅰ巻の命題になっている作図題が、基礎的なものとして含まれるであろう。第Ⅰ巻の４８命題のうち、作図命題は１４ある。

もっとも、そのうちの命題２，３の二つは、全巻の基礎の命題で、初等的ではない。平行線の公準が公理として教えられていたころも、テキストに取り上げることはなかったと推測する。

さて、初等幾何は現在、わずかに中学で教えられ、作業としての作図は、演習なしの付け足しのようにではあるが、中学で教えられている。中学の数学教師は、黒板に円を描くコンパス、線を引く定規を持参することはあるが、高校の教師は使うことはないと思う。

中学で教えるのは「原論」Ⅰ巻、Ⅲ巻にある定理である。「二等辺三角形の両底角は等しい」の証明を教え、その逆とは区別されると教える。古代ギリシャの数学の傘の下に、その材料をもって、論証を教えているのである。

「二等辺三角形の頂角の２等分線を引けば、それは底辺の２等分線になり、その逆も成り立つ」といった細かいことを議論しているのである。

ただし、「原論」には、こういう内容の命題はなくて、もっと単純に、角の二等分線の引き方、線分の２等分の仕方、直線上の点でその線に垂直な線の引き方など、別々の命題としてある。(命題Ⅰ－９，１０，１１)

中学では「原論」伝来の命題を教えているようながら、「原論」のように単純な筋にしては語られず、「平行四辺形になるための条件」といくつかの条件を並べて覚えるようにしたり、「三角形が合同なるための条件」は証明なしで使うことにしたりで、「原論」に慣れた老いた目で教科書を読むと内容は肥大していて、述べ方は猥雑である。教えられれば若い頭脳は抵抗なく覚え、練習問題を解いて学力テストに備えるであろうが、さて、コンパスや定規は、手が作業を覚えるように、授業で使わせられているだろうか。

大学生になっても「円を描きなさい。その円に内接するように正三角形を描きなさい」という問に応えられるか。「正六角形を描きなさい」という問に対してはどうであろうか。

「原論」Ⅰ巻にあるような作図はくり返し実行させること、そして作図の手順を生徒に話させることが、基礎の勉強になる。定理の言明、証明の記述は作業に基づいており、そ

の記憶は老いても心の底面に残っていると思いたい。

正五角形の作図を課題と認識させるのも、作業の記憶である。

課題としての重みの把握があれば、比例式を立て、二次方程式を解いて、作図法として正しいことを確認できるところで、代数解の威力を感知することにもなる。

本論考の内容の上に、最後に、我が国のカリキュラムについて短く発言をしておく。

論証幾何は中学で教えている。「二等辺三角形の両底角は等しい」ことは証明されるべきこととし、「三角形の内角の和は２直角である」ことは、平行線を引いて証明している。

それは、原本の「原論」では、「底辺における角の双方が残りの角の２倍である二等辺三角形をつくること」を比例式に寄らずに証明することに続いて行く内容である。

「原論」の内容で見ると、続いて行く先は教えないで、Ⅰ，Ⅲ巻やⅣ巻の断片を膨らまし、「定義」「定理」「証明」は講釈して教えている。「二等辺三角形の両底角は等しい」を使うのは、その中学の図形領域という非常に限られた範囲を出ることはない。

授業は外の学習とつながらない閉塞空間を作っているようなもので、図形論証は中学段階で教えている、などと考えること自体、止めた方がいい。「原論」もどきを、中学だけで中途半端に教えることは止めた方がいい。わたしは強くそう思う。

高校の科目として設定し、むかしのように、三角法、座標幾何に、ゆっくりとつながるようにするのがよいと夢見る。高校数学の幾何では、「三角形の２辺の和は、残りの１辺より大きい」も（二等辺三角形の定理を用いて）証明されるべき定理にしたい。論証で「２点を結ぶ最短線は直線である」ことを前提にしないことをはっきりさせるためであるが、「数学ではそんな定理を勉強させられる、無用の学だ」という学校の外からの批判が生まれやすいことに意義を感じる。

なお、中学では図形のことを教えなくていいと主張しているわけではなく、中学生向けには、「原論」の傘から出た、いわば、和算の心に親近の幾何を編成できるのではないかと考えている。

むすびに

中学校の数学教科書に「正方形は長方形である」と堂々と載せた時期があった。数学のなかでしか使うことのない、ひとを惑わす言動である。そのころ、算数では「正三角形は二等辺三角形である」ことを教えようと、まずは“二等辺三角形の作図法”を授け、続けて、その特別な場合として、正三角形の作図を教えるという教案が大手を振ってまかり通っていた。

「原論」の定義は、小学生向きで、ことば使用の自然に則っており、「等辺三角形とは三つの等しい辺をもつもの、二等辺三角形とは二つだけ等しい辺をもつもの、」とあり、「四辺形のうち、正方形とは等辺でかつ角が直角のもの、矩形とは角が直角で、等辺でないもの、菱形とは・・・」となっている。これを読んでわたしは「原論」をひいきするようになった。著述の素朴、簡明こそまねるべきところである。

ことばの「四角」を、幼児は、正方形のかたちとして耳にし、口で真似て覚えるのであって、そのうち、真四角でない四角がかたちの対象にされてくるようになる、というのが学びの進む順序であろう。学校の授業では、その自然な学びとは逆の思考を強いていたことになる。

算数から二等辺三角形を教え、平行四辺形を教えるのは、算数の内容がユークリッド「原論」の傘の下で編まれていることの現われである。中学数学は高校数学に向けて、小学校の算数は中学数学の準備になるようにという作用が内外から強く働くことも分る。

「原論」は公理主義の著述をもって、「平行線の公準」を公理にするという著者ユークリッドの発見を世に知らしめたものである。その公準を「公理」として学ぶにはそれなりの分量を要し中学では教えていない。「二等辺三角形」の定理は、その逆と区別して「原論」が使っている。そのような命題文には、限られた領域のことゆえ、中学では殆んど出会わない。公理も定理も、その意味をよく知るのは、使用場面を通してであるのに。

それに、要領でいう図形領域の外の、数学の問題解決に立ち向かうのに、どちらも使わなくてすむ。和算の問題に「平行線の公準」も「二等辺三角形の定理」も要らないことがそれを裏付けていると言ってもよいであろう。

そこで、スローガン風に一言。算数で「二等辺三角形」のかたち、「平行」の概念、「平行四辺形」のかたちを教えようとするのは、即、止めた方がいい。

ついでに言えば、円周率と「円積率」の“理論”を算数で教えるのも止めた方がよいと考える[補注2)]。日本の算数は、指導内容を脳内の数学で計り、先を急ぎ過ぎていると思う。

円周率の数値を3桁も教えながら、正三角形の高さを数値にして測ることをしない、中学でもしないと気付いたのは、塵劫記を読んでいるときであった[9]。

教材開発に、すぐにも和算研究から学べることがあることを最後に書かせてもらうことにする。

和算が算額に掲げた図形の問題の中に、二次方程式の解を算出しているのがあるようである。それは、2次の項の係数が任意の実数である方程式についての解の表示、われわれの言う、解の一般公式を適用して出しているのではない。個々の問題に応じて手際よく処理しているのであろうと想像する。処理法は記録に残していなくとも、それが推測されるものもあろうし、記録部分の方程式の書き方、よって来る問題から、分類思考が推察され得るということもあろう。

もし当っていれば、そういう中の図形問題と解き方が、現在の教室で、いわば二次方程式導入の、有効な授業案の種になると考える。特別な方程式になる問題を、問題場面に密接して解くことを大切にする教導の道を教えてくれる。

西洋古代の面積問題を解かせることから始める授業例を、西洋のレポートで見ることがあった。

現在の二次方程式の教え方は、負の数を教え、代数式について教え、平方根を“定義”し、と解の公式に一直線に向っている。考えてみると、図形の問題を解こうとしていると

き、負の数は要らない。量には負の平方根というのはない。

整数解に作られた問題に取り組むのにルート記号は要らない。

このようなことを、工学部一年生に大学数学の基礎（高校の数学）を教えたときに思った。教導の題材を、数学教科の内だけの都合で計り、先を急いでは、消化不良児、アレルギー体質の生徒を増産する。大学で無用の教養の数学を教え難くしたのを軌道修正するのに、旧きを温ねる心がよく働くように思い、そうなることを願いたい。

補注2) オイラーに始まる、数学向きに合理化した公式に合わせて、円の面積、円周長を算数から教えている。話は円周から始めて、円周率を核にするように進む。塵劫記は、円の面積は円の外接正方形との比率（０．７９）を用いて計算し、円周は直径との比率（３．１６）で計算している。

古代エジプトで、円の面積を正方形９×９に対し、８×８と計算している問題例がある（リンド・パピルス）。丸い砂場では面積の広がりの方が思い易く、碁盤目の広場に円を描いて広がりを計測したかもしれない。わたしは、０．７９はその計測とつなげて考えたくなる。

$$\frac{8\times 8}{9\times 9}=0.7901234\cdots$$

算数では、円の面積を推し量り、その計測について工夫し、かつ実行することを第一にして（→　０．７９）、円周率のことは中学から教導することにしたらな～、とわたしは考える。

追記：第１９回東北地区和算研究者交流会（平成２２年１０月２４日、村山市）、および、東北数学教育学会第４２回年会（平成２２年１２月４日、福島市）に於いて、本稿を資料とする研究発表を行った。和算についての前者の会では、二次方程式が立つ問題、さらには、二次方程式を立てて解いている問題を含んでいる発表があった。どの発表にも筆者が初めて接する記述があり、（算額その他からの）問題があった。この論稿のむすびにで、和算のこと、和算における二次方程式のことに言い及んでいる。自分の言について、まずは発表の諸資料を読んで、再考したいと思う気持ちが芽生えながら、自分の力ではなかなかたいへんなことは明瞭で、今回は、資料の段階のままで投稿することにした。日本の子供たちに教導する数学のかたちを考え、教え方を工夫する上で、明治前の数学の発掘、研究に期待するわけ（訳）のところは、草稿の段階から変わっていない。

引用・参照文献
[1] 伊藤幸男：和算家の正五角形の作図法、山形県和算研究会会誌、第２２号、平成２１年。
[2] 伊藤幸男：和算雑記帳より（続）、山形県和算研究会会誌、第２３号、平成２２年。
[3] 板垣芳雄：教材論および雑談第３講・トレミーの弦の表、明治図書・数学教育、第３３巻５号、平成４年。
[4] 板垣芳雄：ユークリッド「原論」を読み返しながら書くカリキュラム論：高等学校の数学に平面幾何の復興する日を夢みて、東北数学教育学会年報、第４１号、３～３８、２０１０．
[5] プトレマイオス著，藪内 清訳：アルマゲスト，恒星社厚生閣，１９８２．初版（上巻）は１９４９年。
[6]中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵（共訳）；I.L.ハイベルグ（編）『ユークリッド原論』共立出版、（昭和 46 年）１９７１．
[7] Heath, Thomas L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements, Translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary, (Second edition, revised with additions) Dover Publications, Inc. 1956. （初版は１９０８、改版は１９２５）
[8] 平山 諦：和算史上の人々、ちくま学芸文庫、２００８．原著・初版は１９６５年。
[9] 現代語『塵劫記』、和算研究所、２０００．

How mathematicians in Edo era of Japan found out the construction methods of regular pentagon, we guess it on the context of Euclid's Elements; the examination make clear some differences or gaps between mathematics in Edo era and Mathematics of Elements, and will contribute ideas for mathematics curriculum in Japan.

ITAGAKI Yoshio
(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

Drawing method of a regular pentagon by using a ruler and a compass was introduced into Japan in Edo era, where Ptolemy's construction of a pentagon inscribed in a circle was called as the art of the Atlantic Ocean （大西洋の術）. The problem finding out other methods was researched in "Wasan（和算）", namely in mathematics before the Meiji Restoration. In this paper, among the solutions we consider the art of Ajima Naonobu, 安島直円(1732~1798), the art of Hujita Sadatugu,藤田貞資(1734~1807), and the art of Hirano Yoshihusa,平野善房. Here, Hirano's method is same as that of H.M.Taylor.

It is observed that Ptolemy's method is different from the methods in "Wasan", by considering their drawings on the context of Euclid's Elements.

Ptolemy did not find his method as a solution of "drawing problem". He used his "method" for calculating the chord of an arc of 72 degrees in process of constructing his trigonometric tables. His purpose was constructing tables.

Ptolemy justified his construction by using theorems from Elements, in which theorem 10 of Book XIII is especially significant.

Researchers in "Wasan" found out many theorems, for example Ptolemy's theorem on quadrilateral inscribed in a circle, and proved by their method. But they could not read Euclid's Books of solids, and it is supposed that they could not have any interest to primary parts of Elements.

Such words as definition, theorem, and proof began to be used newly in Japan after the Meiji era, when modern Western educational system was introduced in 1872. All Books of Elements were published in Japanese just at 1971.

Thinking how the construction arts of regular pentagon were discovered by the researchers in "Wasan" makes us show interesting aspects of Euclid's Elements. Its thinking also teaches us that both structure and description of Elements are simple, primitive, and careful. On the other hand, it leads to the understanding of uniqueness of Elements, therefore of Western Mathematics, whence helps to consider the curriculum of geometry for Japanese people.

Keywords: Wasan （和算）, construction of regular pentagon, Ptolemy's construction, Euclid's Elements, extreme and mean ratio, algebraic formulae, curriculum in junior high school