東北数学教育学会 年報第42号 2011年3月31日

関数教育・1920年代のアメリカと1930年代の日本

福島大学人間発達文化学類
森川幾太郎

概要 1950 年代末から中学生を対象に対応図や区間変化率を軸にした関数指導を行うよう提案していた横地清と菊池乙夫は 1962 年に『関数教育の現代化』を発刊した。彼らは、同書の中で、従来からの関数教育は「解析幾何による関数のすりかえ」(同書 p.63)と述べた。本稿では「解析幾何による関数のすりかえ」の検証を行うことを直接の目的に、1920 年代のアメリカ、そして 1930 年代の日本において関数教育を巡って行われた議論や実践を整理する。

検索語；グラフ、変化の様子、区間変化率、解析幾何

第一節 アメリカと日本における関数教育の歩み

東京高等師範学校附属中学校数学科編集の「数学教育」[1]第5編(1932 年7月)に岩本俊千代が「代数ニ於ケル函数思考発達ノ測定」を寄稿している。これは全米数学教師協議会(National Council of Teachers of Mathematics - NCTM)第7年報(1932)所収の Bleslich 論文の翻訳であるが、この論攷の中でアメリカにおける関数教育の歩みの一端が次のように紹介されていた；

1893 年シカゴで開かれた国際数学者会議で、Frelix Klein が「中等学校数学課程ニ於ケル函数的思考啓発ノ可能性及ビ必要ヲ説(キ)」、1906 年 E.H.Moore によって「函数観念ハ初等数学ノ改造ニ於イテーツノ根本的ナ役割ヲ演ズベキモノ」とする旨の提案が、さらに、1912 年 E.R.Hedrick がアメリカ数学会で関数的思考に関わる講演を行った。また、1928 年発刊の NCTM 第3年報に関数的思考に関する論文が載せられ、そこでは「其ノ当時ノ教科書ガ、代数ニ於イテハ関数的思考陶冶ノ幾多ノ機会ヲ未ダ充分ニ利用シテヰナイ」と指摘していた。

ところで、本稿でその掲載内容の一部を後に紹介するが、NCTM 9年報(1934)は関数特集号であった。また、J.M.Kinney によれば[2]、Moore 提案を契機に大学1年生向けの関数の原理を体系化した著作が発刊されるようになり、やがて中等学校で関数教授が始まった、という。さらには、アメリカ数学会と全米数学教師協議会とによって 1916 年に設立された数学諸規定全米委員会(National Committee on Mathematics Requirements -NCMR)から 1923 年に最終報告書が出された。この最終報告で中心的に扱われたのが、論証幾何教育と関数教育に関わる事柄であった。この報告書をもとに、中等学校における数学教育のあり方を巡っての議論が 1930 年代中期まで続いた。

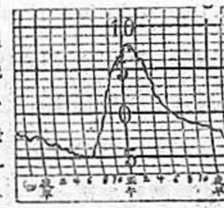
一方、日本では次のように関数教育の議論が進んだ。1915-16 年に森外三郎訳のベレーデセン・ゲッチング『新主義数学 上・下』(原著 1909 年刊)が文部省より、また、黒田稔『数学教育の新思潮[3]』(培風館,1926)も発刊され、また、1918 年、全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会が東京で開催された。この競技会では幾何教育改革と並んで関数教育を巡って様

々に議論が交わされた。この協議会に提出された関数教育カリキュラム案は、上記『関数教育の現代化』をはじめ日本に於ける関数教育の歩みに触れた多くの論攷でも紹介されてきたが、本稿でも資料1として末尾で紹介する。こうした動きに加えて、1920 年代の中期には小倉金之助『数学教育の根本問題』(イデア書院,1924)、佐藤良一郎『初等数学教育の根本的考察』(目黒書店,1924) などを通して関数指導の理念が示され、さらには、クラーク・ラッグ (新宮恒次郎訳)『初等数学の基礎』(山海堂,1927 - 原著 1918 年刊) などによって中学校低学年における関数教育の実際が日本に紹介された。なお、この書については第三節で触れるほか、関数に関わる章の概略を資料3として紹介する。

ところで、上巻で入学志願者の推移や気温変化などのグラフを扱い、下巻で函数そのものを扱った園正造編『中等教育・新代数』(1921) もすでに発刊されていた。

ただ、残念ではあるが、今回この教科書のもとで行われたグラフの扱いを含め教育関数教育の様子について論評した文献は目にできなかった。

42. 時々刻々ノ温度並ニ其變動ヲ圖ニテ表ハスニハ,自記寒暖計ト稱スル裝置ヲ用フ. 此裝置ヲ用フレバ時々刻々ノ温度ガ自動的ニ記サル. 下ノ圖ハ東京氣象臺ニ於ケル大正八年一月七日ノ記錄ナリ.



此圖ニヨレバ東京氣象臺ニ於ケル其日ノ任意ノ時刻ノ氣温ヲ知ルコトヲ得. 例ヘバ午

注；小学校では第三期算術国定教科書(1918 年から学年進行で改定が行われた)でグラフを6学年で扱ったことを契機に、拙稿「藤原安治郎が行った算術教育―小一における数とグラフを中心に―」[4]で報告したように、大正末期から山本孫一『小学校算術に導入すべきグラフと其取扱の実際』(目黒書店,1923)や藤原安治郎『小学校に於ける代数的取扱とグラフ教授』(石塚松運堂,1926) など小学1年からのグラフ指導事例を報告する図書や、下で扱っていた3つの例題を示すが、この種の文章題をグラフで解くことを求めた、森田・宮地『小学校に応用されるグラフ教授の系統的新研究』(教文書院,1925) も発刊されていた。

「子ども一人は6歳でもう一人は4歳。母親は 32 歳。何年後に二人の子どもの年齢和と母親の年齢が同じになるか」

「柿若干個を児童若干人に分配するに4個宛て与ふれば3個余り、7個宛て与ふれば6個不足するといふ。何個宛て与ふれば過不足なきか」

「甲が4日にて成す仕事を乙は 12 日にて成す。今甲乙共同して2日働けば幾分の仕事をするか。又、二人共同して仕上げる日数は何程なるか。」

上で述べた小学校に於けるグラフ指導の状況について、今回、新宮恒次郎が次のように述べていることを知った。[5]

第三期改訂で不十分ながらもグラフ教材が導入され、合わせて実験実測が低学年から扱われるようになった。また、高等科二年の三学期の大半を費やしてグラフを扱うことが期待されていた。こうした動きもあって、大正 10(1921) 年頃から第三期改定に至る間は、グラフや実験実測の扱いが研究の中心になり、「其の背後に流れる新主義数学の思潮の研究が今更の如く盛であった。」

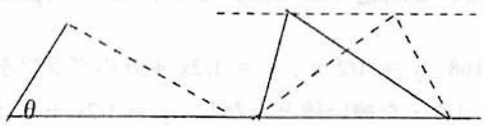
第二節　解析幾何を取り込んだ提案はあったが、それにはとどまってはいなかった

さて、「数学教育」誌をにぎわしたのは中学校に於ける論証幾何教育で、これについては実践報告に止まらず、アメリカを中心に欧米各国における幾何教育改革の動向が報告されていた。もちろん関数教育に関する論文も同誌には掲載されていたが、その掲載数は幾何関連論文の1/4程度であった。NCTM の Mathematics　Teacher 誌でも、この比率は少し高いものの、同じ傾向にあった。さて、「数学教育」誌に掲載された関数分野に関わる論文は、前節で紹介した岩本俊千代の論文が示すように、その大半が、

「次ノ一文ハ、九年報中ノ一章 The Psychology of the Function Concept ヲ訳シタモノデアル。」
(松尾正夫「関数概念の心理」、同誌 11 編 -1934- 所載)

「次ノ一文ハ、The National Council of Teachers of Mathematics 九年報中ノ第五章 The Functions and the Secondary school ノ大葉ヲ訳シタモノデアル。」(上林弥四郎「中等学校教科書ニ表ハレタル函数概念」、同誌 12 編 -1935- 所載)

に見るように、NCTM の第９年報 "Relational and Functional Thinking in Mathematics"(1934)の半数近い章の翻訳をはじめ、アメリカを中心に西欧各国における関数教育の動向を紹介するもので、同校の生徒に実際に指導した結果に触れたものは本当に僅かであった。そうした数少ない報告の一つに岩本俊千代「函数観念ノ教授雑感」がある[6]。この中で、岩本は「数学上、函数観念ガ特ニ強調サレテ来タノハ、解析幾何及ビ微積分ノ進歩ニ依ルモノデアル」との認識を表明してはいるが、関数教育に関わる基本認識は NCMR 報告書や欧米各国において数学教育改良運動の中で論議されてきた事柄であった。以下では、東京高師附属中学校数学科で発刊した数学教科書「初等数学算術・代数」での章「函数ノ変化」を扱ったときに岩本が得た「雑感」を二点に絞って紹介しよう。



「函数」指導開始時における改良点として彼が指摘したのは、関数を中三の最終段階で扱うこともあって、生徒がそれ以前の数学の学習でなじんだ課題から始めるのがよい、である。この観点から、物理例からではなく、上に示した、三角形の決定に関わることや三角形の面積に関わる事柄、即ち、左図では角 θ を変えることによって変わる三角形の要素の指摘、右図では三角形の頂点を底辺に平行に移動させることによって観察できる事柄の指摘から始めるのがよい、とした。さらに、関数グラフでは、その読みの能力を高めるために、与えられたグラフで $y=$ b に対する x の値を読ませることや $0<y$ である x の領域を指摘させる、といった方程式や不等式に関する事柄を含めて変化の緩急、増減の状態に注目させる、とした。

上で見た、岩本の関数に関する授業改善にあたっての視点は彼の研究同人ともいうべき、佐藤良一郎の関数指導観と重なるものであった。佐藤の見解をやや長くなるが、箇条書きにして紹介しよう[7]。彼は関数教授のための３つの視点を指摘した。

①例えば、預金の元利合計を求めるときに用いる公式は、元利合計を求めるための手順を示す式ととらえたり、元金、利率といった項はその名で表示された定数ととらえている段階では関数式にはなっていない。つまり、公式の指導が即関数指導ではない。公式や数量関係の式を動的

観点から扱うことでこれらの式は関数式になる。そこで、実験を行ったり、量の関係が分かっている式をもとに得た値をグラフ化させ、このグラフを通して関数関係を観察させたり、その特色をとらえさせる。

②そのこともあって、事象の表現法としての数表の作成と図表の作成、公式の作成に習熟させたい。また、得た実験値から実験式を作らせる。

③独立変数の増減に伴う関数値の変動の様子の考察を行う。そこでは、増加、減少、一定という観察に止まらず、限界を伴う変化であるかそれとも限界がなくどこまでも変化を継続するか、あるいは、増加の仕方が増大するか減少するか、どの区間で急でどの区間で緩やかであるか、という区間を区切った観察も行いたい。

なお、②に関わって例示されたのは、拡大・縮小を背景にした比例関係や反比例関係といった量の間の関係がすでに分かっているものについてであって、生徒には量の間の関係が未知である事象を実験で得たデータからその量の間の関係を実験式で示す、というものではなかった。ところで、現代化直前期における実践ではあるが、梅木鈥一はバネの伸びと重さの関係が比例関係にあることを実験式の作成活動も交えて扱った旨報告していた。こうした、実験で得たデータから実験式の製作を織り込んだ授業はいつから始まったのか興味のあるところである[8]。

先に NCTM 9年報の半数近い章が「数学教育」誌に紹介されていたことを述べた。ところで、この9年報の131～193頁に著者 H.R.Hamley が"Typical Problem Material"とした200題が掲載されている。その問168～179は、下に見るように、直線の平行の関係やグラフの平行移動に関わる問題であった。なお、この"Typical Problem Material"の概要は資料2で紹介する。

問168　$y = 1/2\ x$、$y = 1/2x + 5$ のグラフを描き、それらが平行であることを示せ。また、$y = 1/2\ x$ を細い棒とみなし、$y = 1/2x + 5$ はそれをどのように移動したのか説明せよ。

問179　$y = 3(x - 2)^2 - 5$ のグラフを $y = x^2$ のグラフをもとにして描け。

また、$y = -x^2$、$y = -x^2 + 5$、$y = -(x - 3)^2 - 5$ のグラフも描け。

また、位置に関わる問には

問71　船が東北32度方向に50マイル移動した。その出発点から北方向、東方向への移動距離を求めよ。

問72　船が、第一日には北東32度に向けて80マイル進み、2日目には北東35度方向に90マイル進んだ。このときの船の位置は出発点からみてどの方角にあるか。

もあった。これらの位置の確定に関わる問は、この問以前に三角比を扱わないこともあって、与えられた向きをもつ直線を方程式表現し、それを利用して、あるいは、正弦定理や余弦定理を利用して位置を求めるのではなく、純粋な幾何の作図問題としての扱いであった。

さて、一次関数式のグラフ表現は、上に示した問168に見るように、一次の項の係数が同じ関数グラフの平行移動によって行われた。ところで、この平行移動によるグラフ表示は、先に紹介した、岩本の「雑感」の中にもあった。下に紹介する3点は、この「雑感」に示された一次関数の学習で課題にしたい事柄としてあげてあった20点の中から選んだものである。

⑬ 増減、緩急ハ何ニ原因スルカ

⑯ 二ツノ一次函数ノぐらふガ平行ナル為ノ条件、又垂直ナル為ノ条件。

⑱ $y = ax + b$ ト $y = ax - b$ トデハぐらふニドンナ相違ガ現ハレレルカ

これらの課題は、その文脈から生徒に手によるものと思われる。このように、平行や垂直といった直線の位置関係の考察がグラフの読みに関わる課題として生徒にも認識されていた。

上で紹介したように、Hamley も岩本も一次関数のグラフとして得られる直線に関わる問を用意していた。これは、前期中等学校での関数は変化する量の間の関係の考察だけではなく、次節の冒頭部で触れるように、関数導入の視点に「代数と幾何との統一」というカリキュラム構成上の理念もあり、さらに、式表示された関数をグラフ表示すると、そこに「形」ができ、その形の分析を学習課題に設定するのは自然の流れであろう。

ここで強調したいのは、図形の決定条件をもとにその方程式表現を行うことを課題に関数教育が行われたのではなく、与えられた関数式を図表現した結果、直線や放物緯線が得られたことである。即ち、解析幾何 - これは当時のアメリカでは高等学校で取り扱っていた - では図形の決定条件をもとにその方程式表現を求めることがその学習主題であり、それは実験値などを通して量の関係を式で表し、その視覚化を図る、とする関数学習とは異なった目標である。ところで、日本で前期中学校における関数教育のあり方を模索していた時期は、次節で紹介するように、アメリカにおける関数教育研究の中心がグラフ表現に軸足を移行していた時代に重なることに注目したい。このアメリカにおける動向や、また、先に紹介したように、小学校でグラフの導入が進んでいたことを考え合わせると、私は日本の前期中等教育における関数教育の弱点は「解析幾何によるすりかえ」ではなく、関数式のグラフ表現を大事にしたものの、先に紹介した佐藤提案にあった、描いたグラフをもとにある条件下での関数値の予測を行うことや関数値の変化の様子の解析を行うことをその基本的な学習課題にしなかったこと、さらには実験式の作成を行わなかったことにあり、これらこそ批判の対象である、と考える。

このことに関わって一言述べたい。中学生は直線が2点で決定する図形であることは理解していても傾きや基準とする線とのなす角によって直線が決定する、などの向きに関わる直線の決定条件の理解は高くはない。そのこともあって、一次関数のグラフ表示で一次の項の係数 a がその傾きに関係していることや定数項 b が y 切片に関わることはいくつもの例題から理解できても、「それらが直線の決定に関わる事柄である」の理解は高くはない。そして、単位当たりの変化量に関わる知識が十分でないことが、横軸方向の変化の大きさで縦軸方向の変化の大きさを除する意味をつかめないことの大きな原因になっている。こうした、除法に関する知識や直線の決定条件に関する理解の状況が、横地・菊池が『関数教育の現代化』の中で繰り返し指摘していた、直線の傾きの理解の低さにつながると私はとらえている。従って、傾きの理解度を高める一つの要件は、直線の向きが直線の決定に関わることを教育をすることであり、また、その教育に、除法の量的意味を加えて、「区間変化率一定」に視点を転換し、傾きに止まらない、量変化に視点を広げた一次関数の教育を行うことである。

第三節　1920年代のアメリカにおいて議論された事柄

この節ではNCTMの機関誌"Mathematics　Teacher"掲載の論文を中心に1920年代におけるアメリカでの関数教授の様子を整理する。そのこともあって、特に断りがない限り取り上げた論文の掲載誌についてはその誌名を省略し、巻数と掲載頁についてのみ記載する。

第一節でも紹介したように、1918年にクラーク・ラッグ『初等数学の基礎』がアメリカで発刊された。これは二次方程式や分数方程式の解法を最終章に置き、中間部で論証なしで三角形の性質の整理をするなど中学生向けの総合数学型教科書であった。このラッグ本のように代数と幾何の統一化の試みはすでに行われて行われていたが、1920年代にMathematic Teacher誌で代数と幾何との統一的扱いを論じたのはE.R.Breslish <"The Unitary Organization of the Mathematics of the Seventh, Eighth, Ninth Graders"(vol.23 -1923-, pp. 228-224)>など中学校における数学カリキュラムを論じた論文やBlank <"Variability and Functionarity in High School Mathematics"(vol. 22 -1929-, pp. 405 - 412)>のようにグラフの扱いを論じた論文においてであった。しかし、後に報告する視点１と２に関わる論文では、例え、面積をはじめとする図形量の式表示を扱っていても関数を軸に「代数と幾何の統一」に触れた論文には出会わなかった。ただ、この時代に高等学校入学者が急増し、従来のカリキュラムが扱えなくなったことと併せて、後に違った視点から触れるが、「よき市民を育成する」の観点から、教科「一般数学」の設定が模索されていたとG.M.A.Stanicが報告している[9]。

さて、1920年代のアメリカで関数やグラフに関わる提案は大きくは次の２つの視点に集約される。そして、それぞれに関わる論文の掲載年が示すように、視点１から２へと議論が進んだことがわかる。即ち、関数式で使われる文字は未知数を出自とする変数から直接動的変量を表現する変数への転換を要求し、また、式化の対象も面積や利率といった図形量や商業算術を背景にしたものから時刻と位置の関係の表現などの物理量を主体にしたものへの転換である。また、量関係の式表示からグラフ表示へと関数教育の視点が移ることにより、学習の中心が「量関係の一般表現をめざす」から「量変化の様子の考察」へと移行した。この量の変化に関心が移行することと合わせるように、高等学校で微分法や積分法の導入が試みられた。その一つにM. Nordgasrd "An Earlier Place for the Calculus in the Curriculum"(vol. 20 -1927-, pp. 321-327)がある。

以下では、そのそれぞれの視点に該当する論文を二つずつ取り上げ、それらの内容を極々簡単に紹介し、上で述べたことを検証してみよう。

○視点１（算術問題の代数表現化と文字の未知数から変数へと観点替えを行う）

<例１>J.M.Kinney " The Formula in Ninth Grade Algebra", vol.14 -1921-, pp.367-380

２年間、年 6%の単利で 500 ＄の預金額に対する利息を求める場面を手始めに、預金額、金利、預け入れ期間を変えることでそのそれぞれに対応した利息額を求める式ができるが、各要素を変数化することで単利についてはどの場面でも利息額を求める等式が得られる、と整理する。そして、「正方形の周の長さ」、「日々牛に与える穀物の量」など図形量や各種の等速運動の代数式表現とその逆の代数表現された等式の量的読みへ、と学習を進める。さらに、与えられた等式をその等式で用いられたある変数に関する陽関数表示への式の変換を行い、その陽関数式で変数にいくつもの数

値を代入し、それぞれに対応する関数値を求める問題を扱う。

<例２>E.E.Booher "The Use of the Function Concept in First Year Algebra", vol.19 -1926-. pp. 86-99

文章題指導のあり方を検討する。その際、「第一学年の代数で関数概念の活用として実際問題を扱うときには量の間にある関係を理解する力を発達させなければならない。」として、以下の事柄に触れる。

第一；取り上げる文章題に関数式による表現が可能な法則があることを教えなければならない。

第二；共に変化する数の間の関係の表現としてのグラフと表を初期段階に扱う。そして、その学習と関連させて連立一次方程式を導入する。その後、一次方程式の代数解法を扱う。

第三；代数における最も大事な教育目標は理由を付けて意見を述べることができる能力の育成にある。また、量の間の関係の考察や変数の理解は全ての理性ある人に求められ、この学習訓練は実際生活に転移する、とする。

○視点２；グラフを描くことの教育的意義やその活用について述べるもの

<例１>J.S.Georges "The Supplementary Project in Functional Graphs", vol. 19-1926-, pp. 174-178

指導学年は不明であるが、方程式学習の補充教材として、一次関数～三次関数のグラフについてその描き方とそれぞれのグラフと x 軸との交点の x 座標を求めることと方程式の解との関わりを中心にした展開を提案した。ただ、彼はグラフと不等式の解との関わりについては何も述べていない。この不等式とグラフとの関わりは、先に紹介したように、園の『新代数』では扱っていたが、ラッグの『初等数学の基礎』でも、また、ベレーデセン他『新主義数学』でも扱わなかった。

<例２>Christofferson "The Graph as a Means of Picturing Relationship, vol. 19 -1927-, pp. 227-238

グラフは、データが持つ関係式の予測や最大・最小の有無とそれらが存在するときのおおよその値の推定を行う場面で使いたい、とする。なお、「100$を年５％で 2.5 年運用したときの元利合計をグラフから求めよ」いった類の問題を目にすることがあるが、投資家がグラフから元利合計を求めることは断じてない。グラフはその機能を生かす場面で使いたい、などグラフの活用場面についても言及する。

ただ、視点２では観測値のグラフ化に関わる学習は用意されていても観測値を整理して量の間の関係を見出すという学習を目にはしなかった。このため、次のようなグラフを本格的に迫る問は用意されていなかった。

問　次の７つの数値の組がある。これをある視点から２つの仲間に分類せよ。

(100, 134)、(121,162)、(152, 237)、(245,382)、(341,457)、(384,599)、(403,540)

この節を閉じるにあたって、関数を教授する視点について E.R.Hedrick が行った講演の後半部から一部を紹介しよう[10]。かって、拙稿「1920-30 年代のアメリカにおける幾何教育（その3）」[11]で 1930 年代のアメリカでは「よき市民の育成」が論証学習の教授目的になったことを報告した。この視点から関数教育に関わる提起を Booher が行っていたことを先に紹介したが、Hedrick が行った講演もこの視点を含んでいた。なお、E.R.Hedrick については第一節でも紹介した。

「今日、我々の前にある数多くの問は量の間の関係も含めてであるが量に関わるものである。これらの問に賢く対応するために次のような場面ではある水準の関数概念を必要とする。その場面とは、投資、生命保険、所得税、公的事業体の管理などであるが、これらに関わる問題について歴史はほとんど語らない。それはこれらの問題が新たに生じ、以前の体験からは何らの解決策が見い出せないからである。これらの問題は数学的－関数的な特性をもつので、その解決には歴史や社会学を超えて数学が鍵を握っている。

量的関係についての認識が欠落している品性のない指導者には悲惨な決定を行う危険性がつきまとっている。市民の中に、例え僅かであっても、量を考えることができる人を必要とする。この種の問題に賢明に考えることができ、世論を正しい方に導くで政治家や政策立案に携わる人が必要である。そのような指導者を養成するために大学が機能しなければならない。…(中略)…

H.G.Wells はいう；「新しい数学は一種の言語であり、量と形式について思考の方法を日常言語より正確に、手短に、手早く与える。物理学、財政学、終わりのない社会的政治的問題といったものは数学的分析に関わる健全な教育を積んだ人々によって理解され、考察される。いま発展している新しく複雑な全世界的な状態について有能な市民として生きるために読み、書くことができるために必要とされる事柄に最大、最小、平均を求め、計算できる、がある。」

第四節　関数で何を教えるか

冒頭部の「概要」で、区間変化率などを中心にした関数教育への転換が横地・菊池らによって主張されたことを紹介した。ところで、横地・菊池『関数教育の現代化』には区間変化率を指導した後に行った各種試験でこれに関わる生徒の通過率は 40 ～ 60%に止まっていたことが報告されている。この結果にも見るように、区間変化率に関する生徒の理解度は、彼らがその重要性を強調したにも関わらず、芳しいものではなかった。

さて、区間変化率の考えは1969年版中学校学習指導要領に取り入れられた。この 1969 年版の中学校数学を学んできた生徒が高等学校に入学してきた1973 と 74 年に「中学校で学んだ数学についての理解度調査」を当時勤務していた都立深沢高校で行った。彼らの中学時代の数学に関わる成績評定は概ね４であり、中学校では中の上に属する生徒達であった。彼らの大半は中２や中３で学んだ幾何の証明や一次方程式の解法はもちろんのこと二次方程式の解法も中学校で苦労しなかった、と回答した。また、三次関数も含めて関数のグラフ表示は易しい学習ととらえていた。その彼らが、高校生になった時点でも理解しているかどうか自信がないとするものは、逆対応の考えや２次関数や３次関数で扱われた区間変化率であり、そして確率の考えであった。

もちろん、彼らは与えられた関数について与えられた区間で区間変化率を求めることはできた。しかし、その値が意味する事柄はつかめていない、とした。これは、彼らの大半が中学校で扱われた対応中心の関数について、関数では何を目的に学習が進んだのか具体的なイメージを持てていなかったことにも重なる認識であった。これは、「現代化」以前の学習指導要領のもとで中学校数学を学んできた生徒が、よくも悪くも「関数＝グラフを描く」と関数やその学習に対してイメージをもっていたのとは対照的である。こうした生徒に対し、実験から得たデータ群の解析から変化しない量の存在を知らせ、そして、「個々の対応のきまり」の様子を区

間変化率も交えて解析する授業を行った[12]。

さて、区間変化率は現在も中学校で指導されている。しかし、依然として、二次関数での区間変化率に関する理解の度合いが芳しくないことを耳にする。この主たる原因として、私は、２量の関係が一次関数で表示される事象をはじめ各関数で表示される具体例を生徒が知らないことにあり、そのことが、「区間変化率＝直線の傾き」を超えて区間変化率が表す量的な意味をイメージできないことにつながる、と考えている。また、これに関連して一言付け加えておこう。中学校や高等学校で関数を扱うとき等速運動や等加速運動に触れることが多い。確かに、生徒は時間と移動距離に関わる等速運動は小学校以来の学習を通して知ってはいる。ではあるが、このことが運動を時間、あるいは、時刻と位置の関係としてとらえることにはつながらない。このため、区間変化率を一単位時間における位置変化の大きさ、あるいは移動量の大きさとしてとらえることができない。そして、このことが速さの理解を困難にしている、と考えている。

これらのことを考えると、中学校や高等学校での関数指導では物理例を中心にするのではなく、経済事象や社会事象などを数多く取り上げ、それらの事象で区間変化率を考察させたい。また、集めたデータが一次関数に従うかどうかの判断を、データのグラフ表示からだけでなく、データ群から選び出したいくつかの資料について区間変化率を求め、その値からも判断できるようにさせたい。即ち、関数では「式ありき」を前提に展開するのではなく、得られたデータ群が多項式表示される関係をもつかどうか判定をまず行い、その判定に沿って量の関係の式表示の発見に取りかかる、という「判断力」を関数教育の中で育てたい、と願っている。

資料１；1918（大７）年開催の「全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会」に当初提案された函数教育の教育課程案とそれを巡っての討議

〈関数分野の教育課程案〉

(一)函数概念はなるべくグラフに関連して導入することを原則とす。

(二)グラフ教授の目的　グラフは函数其の他数量的事項の図解の為に授くものとす。

(三)函数及グラフ教授の程度（師範学校及中学校用。高等女学校用はこれとは異なっていた）

○座標

○実験によりて得たる二量の関係及表によりて与えられる二量の関係をグラフにて表すこと

○一次函数の変化及其のグラフ　○一元一次方程式の根をグラフにて表すこと

○一元一次方程式のグラフによる解　○二元一次連立方程式の根をグラフにて表すこと

○二元一次連立方程式のグラフによる解　○二次函数の変化及其のグラフ

○一元二次方程式の根をグラフにて表すこと（場合によりては一元二次方程式のグラフによるも可）

○ $y = k/x$ のグラフ　○ $x^2 + y^2 = r^2$ のグラフ、$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ のグラフ

○一方は一次にして他は次の何れかにあたる二元連立方程式の根をグラフにて表すこと

＊ $y = ax^2 + bx + c$、$y^2 = k/x$, $x^2 + y^2 = r^2$、$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ²

○次の函数グラフ kx^2、k/x^2、a^x、$\log_a x$、三角函数

(四)時期

第一案　グラフに関する事項は代数教授の初めより適宜教授すること。但方程式の根の図解も一次方

程式を授くる頃より始むること

第二案　グラフに関することは一切一次方程式を終るまで教授せざること

この当初案はこの協議会内に設置された検討委員会によっていくつかの項目が一つにまとめられたがその本旨は変わらなかった。協議会で議論を呼んだのは両案並記された実施時期についてであった。ある意見は第二案、即ち、函数概念を方程式指導終了後に扱いたいとし、また、方程式を解く意味を伝えるため方程式とグラフとを同時進行させたいので第一案を支持するという意見も賛成を集めた。この両案並記に関しては提案者から授業研究を積み重ねることの必要性が訴えられ、協議会としては提案者の見解を賛成多数で了とした。なお、グラフ学習に先立って直線そのものを知っておくことが必要なので幾何学習の後でグラフ学習を行いたい、とする意見が出され、これは参加者の賛成を集めたらしいことが協議会記録から読みとることができる。

一人だけ(森田新三)であるが、物理との関係に触れた発言が報告されていたので紹介しておこう。

「私は算術と連関して、それを本にして所謂代数式の変化を教へ、さうして物理的智識を開発のためにグラフを採用しなければならぬ、グラフに関することは代数教授から漸次始めるのが良かろうと思ひます。またグラフ教授が断片的になっては困りますから、最後に纏めて教へることが必要であると思ひます。」(以上、「中等教育」第36号,p. 48, 1919(大8)による)

なお、「中学校数学科教員協議会」が開催される過程や関数教授の開始時期に2案が並記された経緯については、「語り継ぐ日本の数学教育史－佐藤良一郎先生を囲んで」(「さんすう・すうがく授業の創造 no.18」,教育研究社, pp. 182-206, 1987) で知ることができる。

資料2；NCTM・9年報所載 "Typical Problem Material"の概要

問 11 ～ 21 は正負の数を含んでのベクトル量に触れた問題で、問 113 ～ 129 では三角比の導入に関わってではあるが合同な三角形の作図も含めて三角形の合同や相似を扱う。ここでは証明を求めてはいない。こうした、三角形の決定条件を中心にした三角形の合同をはじめとする幾何に関連した問題を扱ったのは、幾何・代数の分科型学習ではなく、「統合数学」の確立を目指していたためであろう。この他、著者が関心を寄せていたのは量変化の式化であり、また与えられた関数式の量的意味合いの探求や量変化のグラフ表示である。この種の問題は前者では、数列の一般項を式表示する問題も含めて 15 題、後者では 17 題ある。これらの問題例を示しておこう。

問 36　a　長さ、幅、高さが与えられた部屋の 4 面の面積を示す式

b　初任給 x で毎年の上昇額が y の n 年後の給与を示す式

問 77　毎分 5 の速さで容量 50 のタンクに水を入れている。

a　時間とタンク内に入った水量を表に示せ　　b　その関係をグラフに表せ

c　61/2 分後のタンク内の水量をグラフから求めよ。　d　速さ $\Delta V / \Delta t$ を求めよ

問 161　次の事柄を二つの表記、$P \alpha Q$、$P = kQ$ で表せ

a.　円周と半径の関係　　b.　利息と利率と期間の関係

c.　三角形の面積　　d.　立体の重量と体積と密度の関係

e.　落下する物体の速さと落下時間の関係　f.　バネののびの長さと重さの関係など

問 164　自動車のタイヤ圧と体積に関わる測定値が与えられ、その関係をグラフで示せ。

問 77 に見るように、変化率もいくつもの問題で取り上げられたが、そこでは速さを求める課題になっていた。さらに、連立方程式に関わる問題には、

問 181　グラフを使って解け。$x^2 - 3x + 2 = 0$、$x^2 - 3x - 4 = 0$

など3題ある。

資料3；クラーク・ラッグ（新宮恒次郎訳）『初等数学の基礎』（山海堂,1927）の構成

代数による方程式の解法を扱った後、その解を関数グラフの視点から再度考察する、を原則にして代数教材を扱った。同書での関数分野の扱いは次のようになっていた。

第７章「統計図表及ビ『グラフ』ニ依ル量ノ表ハシ方並ニ其ノ比較法」では、統計量の棒グラフによる表現から始まり、時間を独立変数とする連続事象の折れ線グラフによる表現、そして、グラフの変位を読みとり、表に表現させた。その題材には、ニューヨーク市とその郊外地区における死亡率を折れ線グラフで表現し、この二地区における死亡率の推移の考察などがある。第八章「共ニ変化スル量ノ間ノ関係ノ表シ方並ニ其ノ関係ノ決定法」では追いつき算のグラフ解も含め、時間と移動距離に関わる正比例関係のグラフ表示を扱う。さらに、第十一章「二ツノ未知法ヲ含ム方程式ノ『グラフ』的解法」では、一次関数式が２つの未知数をもつ一次方程式として扱われ、その解集合としての直線グラフと連立一次方程式の解としてのグラフの交点が扱われる。なお、一次式の係数 a については直線グラフでの傾きとして役割にもまた関数式としての変化量の大きさとしての役割には触れていない。また、定数項 b のグラフでの役割にも触れていない。続いて、第 16 章「一ツノ量ガ他ノ量ノ変化ニ伴ッテ変化スル仕方ノ示シ方」へと進む。ここでは、家賃の支払額を例に共に変化する量の存在に触れ、その共に変化する量はグラフや表や公式でその関係が示されことを説明する。そして、時間と移動距離を例に式、表を説明する。さらに、正比例、二乗や三乗の比例、反比例を式と表で表し、最後に反比例のグラフを扱う。ここでは、表で倍々関係を調べるのではなく、表に示された値について、$d_2/d_1 = t_2/t_1$、$d_2^2/d_1^2 = t_2/t_1$ と比例式での確認を全面に出した扱いになっている。その後、最終章・第十八章「二次方程式ノ解法」へと進む。ここでは、二次関数を扱わないこともあって代数変形で学習が構成される。

以上見たように、この本ではグラフの平行移動や垂直関係、２点間の距離といった解析幾何的内容は含んではいなかった。

引用・参考文献

1) 「数学教育」は 1930 年４月～1940 年 11 月（最終号 28 編）の間、年３回発行のペースで東京高等師範学校附属中学校数学科編集で発刊された。同時期に広島高師附属中からは「学校数学」が年４回発刊されていた。本稿では「学校数学」に掲載された論文には触れなかった。

2) J.M.Kinney"The Function Concept in High School Mathematics",Mathematics Teacher, vol.15 -1922, pp.484-95

3) この本で取り上げた事柄は、1915-16 年発刊の「東京物理学校雑誌」の各号に７回に分けて掲載されていたことを、松宮哲夫が「小倉金之助と中等学校におけるグラフ教授の普及」（「小倉金之助と現代・第三集」,教育研究社、1987）の中で報告している。

4) 拙稿「藤原安治郎が行った算術教育－小一における数とグラフを中心に－」,数学教育実践研究会「実

践研究 no. 21」, pp. 13-22, 2008

5) 新宮恒次郎『数学教育汎論』,雄山閣刊「算術新教育」特別号,1934) p.51

6) 岩本俊千代「函数観念ノ教授雑感」,「数学教育　13 編」, pp. 27-48,1935

7) 佐藤良一郎「数学教育概論」、阿部八代太郎編『師範大学講座・数学教育編』第4巻,建文館,1935

この書で、佐藤は、現在、小学校高学年の文章題解法のための標準的手法として用いられる算術問題の等差数列化にも触れていたことを紹介しておこう。 彼が取り上げた問題場面は次のものである。

「父が35歳で子が12歳のとき、何年後に父の年齢は子の年齢の2倍になるか」

この解を次のように数表を用いて求めるよう彼は提案した。こうした追いつき算タイプの問題を表を用いて解く。この手法を彼以前に提案した人がいたかどうかは知らない。

年数	0	1	2
子の年齢	12	13	14
子の年齢の2倍	24	26	28
父の年齢	35	36	37
上記2項の年齢差	11	10	9

ただ、第一節でみたように、追いつき算をグラフで解く、という方法が既に紹介されていたので表を用いて解く、という考えに思いいたるために長い時間は必要としなかったであろう。

なお、佐藤は1929年に『数学教育各論』(東洋図書)を発刊していた。この図書では、単元名が「公式及ビぐらふノ教授」ということもあってか、公式 z = f(x,y,…)を y = F(x,z,…)と別の函数式に変える、といった活動を行うことで函数式としての見方を強めた扱いになっている。グラフでは、円グラフなど統計グラフにも触れ、関数グラフに限定した解説にはなっていない。ところで、変化の解析については微分法にも触れての解説を行っていた。

8) 梅木欽一「実験式にまとめることについての指導」(戸田・和田監修『関数関係の指導』(中学校数学指導実例講座第4巻,金子書房,1960 に所収)。なお、実験式の作成を「図による方法と簡単な階差法とがあれば足りる」と小倉金助はその著『数学教育の根本問題』(『小倉金之助著作集第4巻』,勁草書房,p.127,1973)の中で記している。

9) G.M.A.Stanic "The Growing Crisis in Mathematics Education in the Early Twentieth Century ", JRME, pp. 190 -205, 1986

10) E.R.Hedrick "Functionality in Mathematical Instruction in School and Colleges", Mathematics Teacher", vol. 15 , pp. 191-211, 1922

11) 拙稿「1920-30 年代のアメリカにおける幾何教育(その3)」(東北数学教育学会「年報 No, 33」, 2002, pp. 11-22)

12) 拙稿「関数と無限数列ー解析Ⅰの分野から」(銀林・横地監修『算数・数学の授業』,pp. 319-338, 1975)

The Origin to Teach Functional Ideas in JAPAN

MORIKAWA Ikutaro (Fukushima University)

In Japan, fundamental movements to teach functional ideas to middle school students were occurred in 1910's. But, concrete contents to teach the subject did not developed by own selves. So, even 1930's, more than 90% articles related to teach the subjects which were carried on the Magazine "Sugaku Kyouiku" were translated from many articles written by many American researchers. As a consequence of it, drawing many functional graphs were main subjects to teach the unit "function"; i.e. last ages in 1920's main stream to teach functional concepts proposed by American researches related mathematics education was the things related to graphs. I reported in this paper, such strengthen to the graph were naturally leaded by the ideas "to fuse or to marriage the geometry and algebra" as a slogan to reform mathematics education in those days.