東北数学教育学会 年報第43号 2012年3月31日

気仙沼市の観音寺算額について（II）

ー算額から得られる中学校・高等学校数学の問題ー

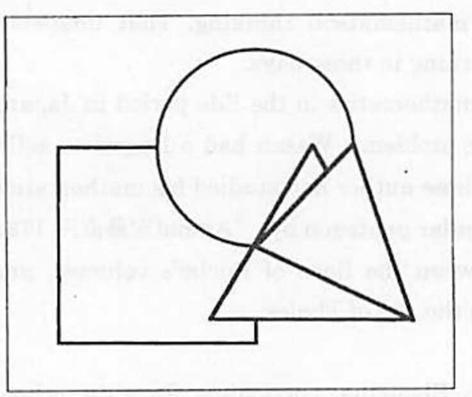
宮城教育大学　数学教育講座　　萬　伸介

1．はじめに

宮城県気仙沼市の観音寺が所蔵している算額は宮城県内で現存する算額で二番目に古いものである（[4]）。この算額の内容は、和算の問題を示してその解答を記すという算額本来のものではなく、「規矩術」に関するものである（[4]，[5]，[6]）。しかしながら、そこに描かれている色彩図を基に中学校・高等学校数学の問題を作成することができたので報告する。この一部の問題はすでに公表している（[5]）が、ここでは他の問題と併せて示しそれらの解答例をも示す。

2．色彩図

観音寺算額の一部分にある色彩図（下の（図1）は写真をトレースしたものであり、色彩は省略してある）は、正方形の上に円、それらの上に正三角形、そして正三角形の上に二等辺三角形が描かれている。



（図1）

正方形の他の図形と重なっていない部分が青色に彩色され、円の二つの三角形と重なっていない部分が金色に彩色され、正三角形の二等辺三角形と重なっていない部分が朱色に彩色)され、二等辺三角形が緑色に彩色されている。この図が何を表しているのか、この図がどのような問題に関わるのか、算額にはそれらを表す記述が明示されていない（[5]）。

私はこの（図1）から中学校・高等学校の数学科としてどのような問題を考えることができるかを試みることにした。現在の数学の立場として思いついたことは次の二つのことがらである。すなわち

・正方形から二等辺三角形に至る図版の作図手順を確定する。

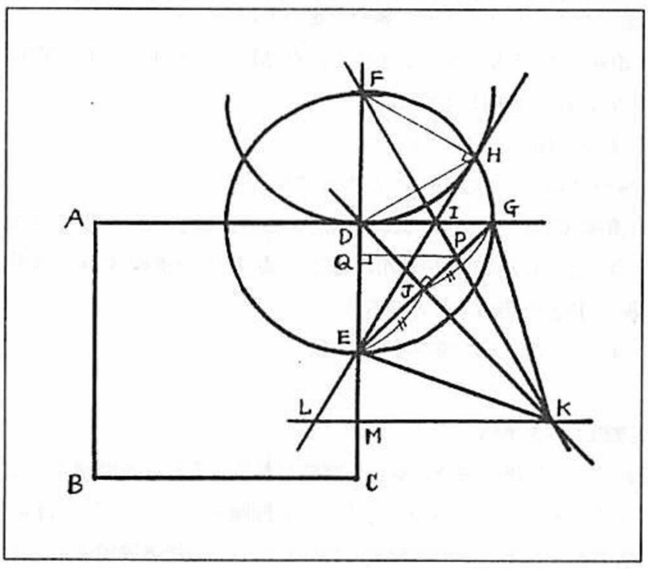
・図版およびその作図の過程から数学の問題を考える。

である。これら二つの事柄を中学校までの学習内容の範囲内でとらえようと思う。それは、中学校または高等学校の教材とすることができないかを探るためでもある。

3．作図の手順

正方形から始めて順に円、正三角形、二等辺三角形をどのように作図すると（図1）のような図形が得られるのか、特に、三番目の正三角形をどのようにして確定させるかが問題である。説明を明確にするために、注目する点にはA、B、C等と英字の大文字を添付することにする。下の（図2）を参照しながら説明する。

注意：以下1）～17）の記述は［5］と同様であることを断っておく。



（図2）

1）一辺の長さが 2a の正方形 ABCD を描く。
2）辺 CD の中点を E とする。
3）点 D を中心とし、半径 DE の円（円 D という）を描く。このとき、円 D の半径の長さは a である。
4）直線 CD と円 D との交点で点 E と異なる交点を F とする。
5）直線 AD と円 D との交点で直線 CD に関して点 A と反対側にある交点を G とする。
6）点 F を中心とし、半径 FD の円（円 F という）を描く。このとき、円 F の半径の長さは a である。
7）円 D と円 F との交点で直線 CD に関して点 A と反対側にある交点を H とする。
8）二点 E と H を結ぶ直線を描き、この直線と直線 AD との交点を I とする。点 I は二点 D と G の間にある(＊1)。
9）二点 F と I を結ぶ直線を描く。
10）線分 EG の中点 J を通り線分 EG に垂直な直線（線分 EG の垂直二等分線）と直線 FI との交点を K とする。線分 EG の垂直二等分線は点 D を通る。
11）点 K を通り直線 AD に平行な直線を描く。この直線と直線 EH との交点を L とする。三つの線分 IL、LK、KI により正三角形 ILK が得られる。
12）二点 E と K を結び、二点 G と K を結び、三つの線分 EK、KG、GE を得る。これにより二等辺三角形 EKG が得られる。
以上により、正方形 ABCD、円 D、正三角形 ILK、二等辺三角形 EKG が得られた。
以下において必要となる次のような点、線分を定めておく
13）直線 KL と直線 CD の交点を M とする。点 M は二点 C と E の間にある(＊2)。
14）二点 F、H を結ぶ線分 FH を描く。
15）二点 D、H を結ぶ線分 DH を描く。
16）直線 FI と線分 EG との交点を P とする(＊3)。
17）点 P を通り直線 CD と直交する直線を描き、この直線と直線 CD との交点を Q とする。線分 PQ を考える。（以前の表現を用いると、「点 P から直線 CD に垂線を下し、その足を Q とし、線分 PQ を得る。」、となる。）
注意：（＊1）～（＊3）は次の4で取り扱われる。

4．作図の過程で確認すべき事柄

前述の作図のそれぞれの段階で確認を要する事柄がある。それらを問題として提示し、それらの解答例を添えることにした。もちろん、すべてを問題として示しているわけでもなく、細かな確認事項は省略している。実際の授業においては、その指導過程の中での工夫において、追加・省略が成されることになるであろう。以下においては、慣例に従って、線分 AB の長さ（の値）を AB と表し、角 ABC を ∠ABC と記してその大きさ（の値）を ∠ABC と

表すことにする。さらに、分数表示を u/v と表すことにする（ u は分子、v は分母である）。和算では「勾股弦（鉤股弦、三平方の定理、ピタゴラスの定理）」が強力な手段として使用され、角の大きさの具体的な数表示は採用されないことを注意しておく。

（＊1）点 I は二点 D と G の間にある。

（証明）弧 FG は∠FEG の内部にあり、点 H は弧 FG 上にあるから、点 H は∠FEG の内部にある。すなわち、点 H は∠DEG の内部にある。よって、半直線 EH は線分 DG と D と G の間の点で交わる。したがって、点 I は二点 D と G の間にある。■

（注1）「間にある」などの初等幾何学の基礎的概念は小平（[1]）を参照。

［問題1］三つの三角形 FDI 、FHI 、EDI は互いに合同である。

（証明）三角形 FDI と三角形 FHI において、∠FDI と∠FHI は共に直角であるから、三平方の定理によって

$$FI^2 = FD^2 + DI^2 \ ,\ FI^2 = FH^2 + HI^2 \ ,$$

そして、FD と FH は円 F の半径であるから FD ＝ FH が成り立っている。これらの式から $DI^2 = HI^2$ 、すなわち DI ＝ HI が成り立つことがわかる。したがって

直角三角形 FDI と直角三角形 FHI は合同である

ことがわかる。

次に、三角形 FDI と三角形 EDI において、∠FDI と∠EDI は共に直角であるから、三平方の定理によって

$$FI^2 = FD^2 + DI^2 \ ,\ EI^2 = ED^2 + DI^2 \ ,$$

そして、FD と ED は円 D の半径であるから FD ＝ ED が成り立っている。これらの式から $FI^2 = EI^2$ 、すなわち FI ＝ EI が成り立つことがわかる。したがって

直角三角形 FDI と直角三角形 EDI は合同である

ことがわかる。

よって、三つの直角三角形 FDI 、FHI 、EDI は互いに合同である。■

［問題2］三角形 EDI において EI : DI ＝ 2 : 1 が成り立つことを示せ。

二つの証明を紹介する。

（証明1）最初に、三角形 EHF において ∠EHF が直角であることを指摘しておく。さて、問題1より、直角三角形 EHF は互いに合同な三つの直角三角形 FDI、FHI、EDI に

分割されるから

(直角三角形 EHF の面積) = 3 × (直角三角形 EDI の面積)

すなわち

$$FH \times EH \div 2 = 3 \times (DI \times ED \div 2)$$

が成り立つ。ところで、FH = FD = ED であるから、上式は

$$EH = 3 \times DI$$

となる。さらに、EH = EI + IH = EI + HI = EI + DI であるから EI + DI = 3×DI が成り立つ。すなわち、EI = 2×DI が成り立つことがわかる。よって、EI : DI = 2 : 1 が示された。■

(証明2) 三角形 EHF において、線分 EF は円 D の直径であるから、(円周角と中心角の関係式より) ∠EHF は直角である。また、線分 HF は円 F の半径と等しい長さをもつから、HF = FD = a であり、線分 EF は円 D の直径であるから、EF = 2a である。したがって、EF : HF = 2 : 1 が成り立つ。次に、三角形 EHF と三角形 EDI に対して

$$\angle EHF = \angle EDI = \angle R$$ (∠R は角の大きさが直角であることを表す)

$$\angle FEH = \angle IED$$ (共通)

が成り立つから、三角形 EHF と三角形 EDI は相似である。よって、

$$EI : DI = EF : HF = 2 : 1$$

が成り立つ。したがって、EI : DI = 2 : 1 が示された。■

(注2) 角 D (∠EDI) が直角である直角三角形 EDI において、次の連比

$$EI : DI : ED = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

(すなわち、EI : DI = 2 : 1 かつ DI : ED = 1 : $\sqrt{3}$)

が成り立つことは問題2の結果とピタゴラスの定理によって示すことができる。

【問題3】三角形 FDI と三角形 FMK は相似である。

(証明) 一点 F で交わる二つの直線 FC と直線 FK が、直線 AD と異なる二点 D と I で交わり、直線 KL と異なる二点 K と M で交わる。さらに、二つの直線 AD と KL は平行であるから、(平行線と線分の比の性質より) 三角形 FDI と三角形 FMK は相似である。よって、三角形 FDI と三角形 FMK は相似であることがわかる。■

(＊2) 点 M は二点 C と E の間にある。

（証明）四点 F、D、E、C がこの順序に一直線上にある。そして、円 D の半径の長さは a であるから、FD ＝ a 、FE ＝ 2a 、FC ＝ 3a （すなわち、FD ＝ a 、DE ＝ a 、EC ＝ a ）がなりたっているさらに、点 M は直線 CD において点 D に関して点 F の反対側にあることを注意しておく。問題３より、三角形 FDI と三角形 FMK は相似であるから FD：DI ＝ FM：MK が成り立つ。すなわち、

$$FD \times MK = DI \times FM \qquad (\#)$$

が成り立つ。

ところで、点 K は直角である ∠EDG の二等分線上にあり、∠KMD は直線 KM の定め方より直角であるから、三角形DMK は DM＝MK となる直角二等辺三角形であることがわかる。よって、

$$MK = DM \qquad (\#\#)$$

が成り立つ。さらに、直角三角形 EDI において、定理２より、EI：DI ＝ 2：1 、すなわち、 EI ＝ 2×DI が成り立っている。そして、この式と DE＝a と三平方の定理より得られる式 $EI^2 = DE^2 + DI^2$ より、

$$3 \times DI^2 = a^2 \qquad (\#\#\#)$$

が成り立つことがわかる。

式（#）と（##）より FD×DM＝ DI×FM が得られ、FD＝ a 、FM＝ FD＋DM を代入すると a×DM ＝ DI×(a＋DM) が得られる。この両辺を２乗し、さらにその両辺を３倍し、式（###）を代入すると

$3 \times a^2 \times DM^2 = a^2 \times (a + DM)^2$ 、すなわち

$$2 \times DM^2 - 2a \times DM - a^2 = 0 \qquad (\#\#\#\#)$$

が成り立つことがわかる。

ここで $f(x) = 2 \times x^2 - 2a \times x - a^2$ とおくと、$f(a) = -a^2 < 0$ 、$f(2a) = 3 \times a^2 > 0$ であるから、$2 \times DM^2 - 2a \times DM - a^2 = 0$ を成り立たせる DM は a ＜ DM ＜ 2a を満たすことがわかる。すなわち、点 M は二点 E と C の間にあることが示された。■

（注３）上の証明の最後の部分で高等学校「数学 III 」で学習する連続関数に関する中間値の定理（[３]、p.40 参照）を用いた。しかしながら、二次方程式の解の公式を用いて線分 DM の長さを求め、その値が a と 2a の間にあることを「差をとる」ことによって確かめるならば、それは中学校第３学年「A 数と式、二次方程式」の学習内容となる（[２]）。

（＊３）直線 FI と線分 EG は交わる。

（証明）四点 E、D、F、G の定め方より、点 D は線分 EF の中点であり、∠EDG と

$\angle FDG$ は共に直角である。そして、点 I は、線分 DG 上にあるから $\angle EFG$ の内部にある。よって、半直線 FI は線分 EG と交わる。■

[問題4] 三角形 ILK が正三角形であることを示せ。

(証明1) 三角形 EDI と三角形 FDI は合同であるから、$\angle EID = \angle FID$ が成り立つ。また、二つの直線 ID と IH は円 F の接線であるから、三角形 FID と三角形 FIH は合同である。よって、$\angle FID = \angle FIH$ が成り立つ。したがって、

$$\angle EID = \angle FID = \angle FIH$$

が成り立つことがわかる。上の式より

$$\angle EID = \angle KIL = \angle KIG$$

が成り立つことがわかる。平行な二直線 AD と KL に直線 IK と直線 IL が交わっているから、

$$\angle KLI = \angle EID,\ \angle LIK = \angle FIH,\ \angle IKL = \angle KIG$$

が成り立っている。よって、

$$\angle KLI = \angle LIK = \angle IKL$$

が成り立つ。したがって、三角形 ILK は正三角形である。■

(証明2) 先ず、EM $=$ b とおくことにする。三角形 FDI において FD $=$ a であるから(注2)より

$$FI = (2/\sqrt{3})a \ 、\ DI = (1/\sqrt{3})a$$

が成り立っている。よって、三角形 FDI と三角形 EDI は合同であるから

$$ED = a\ 、EI = (2/\sqrt{3})a\ 、\ DI = (1/\sqrt{3})a$$

が成り立つ。また、三角形 EDI と三角形 EML は相似であるから

$$ED:DI = EM:ML\ 、\quad ED:EI = EM:EL$$

が成り立ち、これらより

$$ML = (1/\sqrt{3})b\ 、EL = (2/\sqrt{3})b$$

が成り立つことがわかる。また、三角形 FDI と三角形 FMK は相似であるから

$$FD:DI = FM:MK\ 、\quad FD:FI = FM:FK$$

が成り立ち、FM $=$ FE $+$ EM $=$ 2a$+$b に注意すると、これらより

$$MK = (2/\sqrt{3})a + (1/\sqrt{3})b、$$

$$FK = (4/\sqrt{3})a+(2/\sqrt{3})b$$

が成り立つことがわかる。

以上より、

$$IL = IE+EL = EI+EL = (2/\sqrt{3})a+(2/\sqrt{3})b = (2/\sqrt{3})(a+b)$$

$$LK = LM+MK = ML+MK = (1/\sqrt{3})b+\{(2/\sqrt{3})a+(1/\sqrt{3})b\}$$

$$= (2/\sqrt{3})a+(2/\sqrt{3})b = (2/\sqrt{3})(a+b)$$

$$KI = KF-FI = FK-FI = \{(4/\sqrt{3})a+(2/\sqrt{3})b\}-(2/\sqrt{3})a$$

$$= (2/\sqrt{3})a+(2/\sqrt{3})b = (2/\sqrt{3})(a+b)$$

が得られる。よって、KI ＝ IL ＝ LK が成り立つ。したがって、三角形 ILK は正三角形である。■

（注4）証明1は等角三角形であることを示す証明で、証明2は等辺三角形であることを示す証明である。

【 問題5 】三角形 EKG が二等辺三角形であることを示せ。

点 K は、直線 EG 外の点であり、線分 EG の垂直二等分線上の点であるから、三角形 EKG は KE ＝ KG である二等辺三角形であることは容易に示される。

5．図1から想起される問題

図1の作図の手順を完成させたところで、和算では図形の面積を求める場合が多いことを考慮し、この図から想起された二つの問題を紹介する。それは

【 問題A 】正三角形のうち緑色の二等辺三角形で隠されていない部分（図1で朱色になっている部分）の面積を求めよ。すなわち、三角形 IEP の面積と三角形 ELK の面積の和を a を用いて表せ。

【 問題B 】緑色の二等辺三角形の面積を求めよ。すなわち、二等辺三角形 EKG の面積を a を用いて表せ。

である。以下の段階を踏みながら問題 A と問題 B の解法を示す。

［問題6］線分 QP の長さを a を用いて表せ。

(解) 点 Q は二点 E、D の間にあるから、線分 DQ の長さを x とおくと、FQ = FD + DQ = a + x である。式 (＊＊＊) より DI = $(1/\sqrt{3})a$ である。直角三角形 FQP は直角三角形 FDI と相似であるから、FD : DI = FQ : QP が成り立つ。よって、

$$QP = (a+x)/\sqrt{3}$$

が得られる。三角形 PQE は、直角二等辺三角形 GDE と相似であるから、∠PQE が直角で QP = QE となっている直角二等辺三角形である。よって、QE = DE − DQ = a − x であるから QP = a − x が成り立つ。以上より $(a+x)/\sqrt{3} = a-x$ が得られるから

$$x = \{(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)\}a$$

となる。よって

$$QP = \{2/(\sqrt{3}+1)\}a$$

である。■

［問題7］線分 EM の長さを a を用いて表せ。

(解) 前出の式 (＃＃＃＃) より DM = $\{(\sqrt{3}+1)/2\}a$ が得られるから、

$$EM = DM - DE = \{(\sqrt{3}+1)/2\}a - a = \{(\sqrt{3}-1)/2\}a$$

が得られる。■

［問題8］三角形 EPI の面積を a を用いて表せ。

(解) 三角形 EPI の面積は四辺形 DEPI の面積から直角三角形 DEI の面積を減じることによって得られる。四辺形 DEPI の面積は台形 DQPI の面積と直角二等辺三角形 QEP の面積の和に等しい。台形 DQPI の面積は（台形の面積公式より）

$(DI+QP)\times DQ\div 2$

$=[(1/\sqrt{3})a+\{2/(\sqrt{3}+1)\}a]\times\{(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)\}a\div 2$

$=\{(3\sqrt{3}+1)/(\sqrt{3}+3)\}a\times\{(\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)\}a\div 2$

$=\{(-2\sqrt{3}+8)/(4\sqrt{3}+6)\}a^2\div 2$

$=\{(-\sqrt{3}+4)/(4\sqrt{3}+6)\}a^2$

である。すなわち、台形 DQPI の面積は $\{(-\sqrt{3}+4)/(4\sqrt{3}+6)\}a^2$ である。次に直角二等辺三角形 QEP の面積は

$QP^2\div 2=[\{2/(\sqrt{3}+1)\}a]^2\div 2=\{1/(\sqrt{3}+2)\}a^2$

である。よって、四辺形 DEPI の面積は

$\{(-\sqrt{3}+4)/(4\sqrt{3}+6)\}a^2+\{1/(\sqrt{3}+2)\}a^2$

$=\{(6\sqrt{3}+11)/(14\sqrt{3}+24)\}a^2$

である。また、直角三角形 DEI の面積は $\{1/(2\sqrt{3})\}a^2$ である。したがって、三角形 EPI の面積は

$\{(6\sqrt{3}+11)/(14\sqrt{3}+24)\}a^2-\{1/(2\sqrt{3})\}a^2$

$=\{(2\sqrt{3}+3)/(12\sqrt{3}+21)\}a^2$

$=[\{(3+2\sqrt{3})(21-12\sqrt{3})\}/\{(21+12\sqrt{3})(21-12\sqrt{3})\}]a^2$

$=\{(2\sqrt{3}-3)/3\}a^2$

である。■

[問題９] 三角形 LKE の面積を a を用いて表せ。

(解) 三角形 LKE の面積は、問題８の証明を参考にして、

$$LK \times EM \div 2$$

$$= \{(1/\sqrt{3}) \times DM\} \times EM \div 2$$

$$= [(1/\sqrt{3}) \times \{1/(\sqrt{3}-1)\}a] \times \{(\sqrt{3}-1)/2\}a \div 2$$

$$= (1/4\sqrt{3})a^2$$

$$= (\sqrt{3}/12)a^2$$

である。■

［問題１０］三角形 EPI 面積と三角形 LKE の面積の和を a を用いて表せ。

三角形 EPI 面積と三角形 LKE の面積の和は

$$\{(2\sqrt{3}-3)/3\}a^2 + (\sqrt{3}/12)a^2 = \{(3\sqrt{3}-4)/4\}a^2$$

であることは容易にわかる。

［問題１１］二等辺三角形 EKG の面積を a を用いて表せ。

(解) 辺 EG を底辺としたときの二等辺三角形 EKG の高さは線分 KJ の長さである。よって、KJ＝KD－JD であるから、直角二等辺三角形 DMK と直角二等辺三角形 EJD の辺の長さの関係に注目して、

$$KJ = \{\sqrt{2}/(\sqrt{3}-1)\}a - (\sqrt{2}/2)a$$

$$= (\sqrt{2}\sqrt{3}/2)a$$

である。よって、底辺 EG の長さは $\sqrt{2}a$ であるから、二等辺三角形 EKG の面積は

$$\sqrt{2}a \times (\sqrt{2}\sqrt{3}/2)a \div 2 = (\sqrt{3}/2)a^2$$

である。■

6．おわりに

紹介した問題およびその証明・解の一部は中学校第３学年の授業で取り上げることができ、高等学校第１学年の教材として十分に利用できるものと考えている。特に、基本的な図形の面積の計算、文字式の計算、ピタゴラスの定理（三平方の定理）、平方根を含む式の計算、そして方程式の解の見つけ方、などに関わる内容の教材である（[２]、[３]）。中学校・高等学校の教員の方々が、和算の紹介・説明と共に上記の問題を授業のなかで取り上げ、指導案の作成を試みることを願っている。

参考文献・引用文献

[1]小平邦彦：「幾何のおもしろさ」、岩波書店、1985.

[2] 文部科学省：「中学校学習指導要領解説数学編　平成 20 年 9 月」、教育出版、2008.

[3] 文部科学省：「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編　平成 21 年 12 月」、実教出版株式会社、2009.

[4] 八巻寿亮：「宮城の和算」、けやきの街、1985.

[5] 萬伸介、島森哲男、安孫子啓、青野哲大：気仙沼市の観音寺算額について (I)　－その概要とそこから作られる数学の問題－、東北数学教育学会　年報　42 (2011), 63-73.

[6] 萬伸介、島森哲男、安孫子啓、青野哲大：気仙沼市の観音寺算額について (III)　－規矩術に関わって－、(準備中)

The Sangaku owned by Kan-non-ji in Kesennuma (II)

–Mathematicl problems produced from its figure–

YOROZU Shinsuke

(Miyagi University of Education)

Abstract: We show some problems produced from a figure in the Sangaku that owned by Kan-non-ji in Kesennuma city. These problems are fundamental ones in high school mathematics. Some problems are proved by the Pythagorean theorem.

Keywords: Sangaku, High school mathematics, Pythagorean Theorem