東北数学教育学会 年報第43号 2012年3月31日

和算家による正五角形の作図から学んだこと、ユークリッド「原論」に照らして考えたこと

板垣 芳雄
(宮城教育大学名誉教授)

はじめに

古代ギリシャの書、ユークリッドの「原論」に接したのは、大学院のゼミで使用したときに始まる。兵庫教育大学に赴任した昭和57年から一二年した頃、神戸大学に出講していた中村幸四郎先生に出会ったことがきっかけとなった。大学でのわたしの担当は数学の解析学であったが、修士課程の学生は、小・中・高の現職教員である。数回にわたる第1学年の前期での使用で、Heath の英語訳(初版1908)で第一巻(I)、その第一巻のお終いまで読んだ年があったかどうかは定かでない。

平成4年に宮城教育大学勤務に戻るまでの10年の在任中に、村田全先生の集中講義で、第十巻(X)の“研究”を聴くこともできた。先生の講義の初回には、第五巻(V)にある「比の相等」についての解説があった。

修士論文の課題には、19世紀末から20世紀にかけての解析学の研究から選んだものが数件、論文のテーマにはならなかったが、ニュートンの流率・求積法を知る機会となった。そんなときに「プリンキピア」(1687)の日本語訳を開いて、万有引力の発見がユークリッド「原論」のスタイルに記述されているのを知り、中学生のニュートンが「原論」を読み進むと、有無を言わせずピタゴラスの定理の論証、説得に至る、そこで第一巻が終了しているのに感嘆したと、かつて読んだ伝記にあったのが思い出された。

微分・積分法の創出は、ニュートンにとって、万有引力の発見とは別種の思考に伴う計算作業の結果であった。その時代考証は、ウォリスの計算に触発されて獲得した二項級数が、求積法に微分(流率)を結び付けたと説く物語から、自然に納得される。

万有引力の方程式から惑星運動の法則を演繹する、現代の微積分学を用いる計算からは、引力発見の道程は想像できない。微分・積分発見のかたちも分からない。

万有引力の発見を導いたのは、ケプラーの著書「新天文学」(1609)と、「世界の和声楽」(1619)が記している、惑星についての運動法則である。

が、ケプラーが終生、執着したのは、後世にケプラーの名を付して呼ばれる3法則では

なく、「宇宙の神秘」（１５９６）で問題とした、惑星の６個という数と、なぜ神が惑星それぞれにその軌道をとらせているかを明かすことであった。

７つめの惑星の、天王星が発見されるのは、１７８１年である。

ケプラーは、５種５個の正多面体の内接・外接球が、６個の惑星の軌道を定めていると考えた。彼は、正多面体のことは、ルネサンス後に西洋で読まれるようになった「原論」の第十三巻（XⅢ）で勉強したのであろう、と推測される。

宮城教育大学に戻った当初は、数学教育担当という新たな肩書きのもと、修士課程に進学した中学校教師にゼミで、中村幸四郎他訳の「原論」第十一巻（XⅠ．立体図形）をテキストにしたことはあったが、定年までの１０年間は、いろいろな、いわゆる雑務に精出さざるを得なった。組織の改変で新設の、情報数理課程の講義・ゼミも教室のメンバーが平等に担当し、わたしも、多変量解析や、線形計画法などまで講じた。一言付け足せば、これらの技法はコンピュータが推進した分野、米国が先進国で、わが国のソフト開発は、英語の出版物の翻訳、翻案から立ち上がったのだと思った。

定年後も数学教育の学会との縁は切らないまま研究発表を続けたのは、非常勤で工学部一年次の講義を週に1，２回行なっていて、講義、演習の日に、学生がそれまでに習ってきた数学、身につけている知識の中味のことを思い、それが、週末の遊びで気分が変わるまで頭から離れなかったからであろう。

中学校教科書編集に誘われたのは兵庫教育大学のときである。自分のときより内容がはるかに‘現代的’になっていて、新しい中学数学を勉強する気持が、いつの間にか、内容についての不満が、記述の仕方についての批判心が脹らんで行った。それに続く高校の数学も、大学の数学の色合いの濃い現代的のものになっている。入試勉強をして工業大学に進学した者も消化吸収していない。咀嚼しにくいのだと思う。多数の若者が小学校高学年から、情緒で楽しめず、徐々に離れて行きたくなるような、異国思惟の内容になっている。

数学科教育法の講義や研究授業では、指導要領批判めいたことを口にすることはなかったが、教育の現場とのつながりも消え肩書きのない身になったら、まずいと思うところはまずいと口に出して平気で言えるようになった。

だが、研究論文にして綴る気力はなくなっている。体力もないのに、和算家の正五角形の作図法についてレポートを書き、書き足りないからと“授業案”まで作った。かつて、中学校の教科書に比べ、「原論」の素朴、簡明な記述に感嘆したことがあったのを想い起す。“授業案”を作ったことで、「原論」について、前には見えなかったことが見え、思うことなかったことを思った。いずれも、和算の発掘、研究がもたらしてくれたことである。

歴史にも和算にも素人の者が、江戸時代の算術、幾何、測量、暦算、天文に思いを寄せて、“授業案”では語らなかったことを、肩書きだった数学科教育の外にわが身をおいて述べるのであるから論文の体はなしていない。しかし、それゆえに、日本人への数学教育を工夫する上で見過ごしてきたこと、今も看過したままのことに深く触れる論考になっていると考える。

§1．和算家の術を授業案にする

先に「正五角形の作図法を授業案にする」と題して書いたのは[2,3]、和算家の工夫した正五角形の作図の術を黒板上に演じ、それを受講生にも真似させ、他の方法も繰返し作図させる、仮想の“公開講座”である。講義、休憩、演習からなり、週に１回、１回の時間は３時間、それを５週続ける。休憩時間には受講生複数の質問にもしっかり答えているから、毎回一週間の準備期間があるとはいえ、７５歳を過ぎたら、手助けする付き人がいなくては、演習を円滑に実行することは不可能であろう。

和算家の術は、日本学士院所蔵の「松永直英解草」にある。それを報告されている伊藤幸男先生は、松永貞辰の長子、直英が、江戸勤務中（１８０２～１８０５）に交際した和算家から聞き知ったものであろうと推定しておられる。なお、直英が「解草」に記している作図法は、すでに三上義夫が紹介していることを土倉保先生から指摘された[6]。

和算研究の世界からすれば、作図法という一つの落穂を拾って、話を大きくしている気味はあるが、わたしからすれば、意図せずして大きくなったのである。

独特に「原論」を紹介するようにもなっている「正五角形の作図法を授業案にする」を書いて、「原論」について、新しい発見があった。それは、わたしにとってだけではない、新しい知見をもたらしていると思う。この講では、実際の「正五角形の作図法」の細部に入ることはしないで、そのことを述べている。それが正論となっていれば、それもこれも、和算研究の落穂から発している故に、和算の研究と調査と、記録への応援となるという思いが、これを書いた動機の一つとなっている。その思いは、山形県村山市で開催の東北地区和算研究者交流会（平成２２年１０月２４日）に出席したことから芽生えた。和算と名の付く会への出席はわたしには初めてのことであった[追記]。

“公開講座”の授業に戻る。

学校で教える、なにがしの定理のなにがしさんに、日本の文化史につながる人はいない。和算家の名を付して、江戸人の発見した術を講ずれば、日本人が取り組み、得た答であるというだけで、学校で習う数学にはなかった心情が生まれるかもしれない。

名を上げた、安島直円、藤田貞資についても調べて話すことになる。彼等の時代について、豊富な知識の持ち主が、受講生のなかにいるかもしれない。

もちろん、講座では、あくまでも、作図それ自体を各々が実行し、作図法そのことについて考えようとしている。

紙上の模擬講座ではあるが、そういう形式をとることで、あるところでは、自分が受講生になったつもりで、コンパスと定木を使うことになる。そしたら、書く前のシナリオでは予定していなかったことを発見することになった。４回目の“授業”に記録してある。この節では、その発見について述べる。

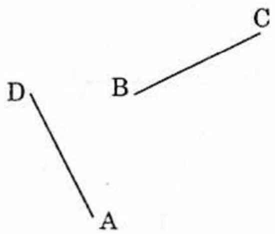
３種の作図を振り返ってみると、印象がそれぞれに異なる。見事だ、うつくしいというのに混じって、どこか滑らかでないという感じの残るのがある。手順を比べ、方法の違い

を考えるうちに、ここだと思ったのが、コンパスを空中移動しているところだった。

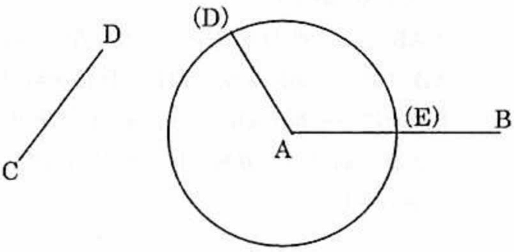
線分の巾に開いたコンパスの開きを変えないで空中を移動し、別の場所に同じ長さの線分を作る。作図の見本演技でそれをするときは、ちゃんと宣言して説明しなければ分からないし、記録する作図の図には、ここはこれと同じ「長さ」にとったと別に書いて、記入しておかねばならない。

そこで、はっと思ったことは、「原論」がコンパスの空中移動をちゃんと避けていることであった。

第Ⅰ巻に「線分 AB から、それより小さい線分 CD に等しい AE を切り取ること」というのが命題３としてあり、それは命題２の作図、コンパスの空中移動のない作図「点 A と線分 BC が与えられて、線分 BC に等しい、A を端点とする線分 AD を作図すること」を基にして行なわれる。



（命題２）



（命題３）

これらの命題は、「原論」の著者は、コンパスを限定的に使用しているという解説のもとに説明されている。命題２はなかなか難しい作図になり、よって、証明の図は不思議な模様を作っておもしろい。Heath の英語本の第２版（１９２５、初版１９０８）を３分冊にしている Dover の廉価版（１９５６）では、その図を、Volume.2 の表紙絵に用いている。

ここで、言いたいことは、ユークリッドは定木とコンパスによる作図に十分親しんでいたから、当然、美しい手順、上手な作図という感覚で、操作を考えていたであろうということである。そこはアカデミーや教室で語られることがあったとしても記録されることはない。「原論」にはない。記録はないが、ユークリッドや彼の学友がいろいろな作図を試み、いろいろに考えたであろうことが、和算家の作図法を５回に亘って“授業”して、わたしには想像されたのであった。

古代ギリシャについてのその想像が、第Ⅰ巻の命題２，３を、わたしに“わかる”ものにしてくれた。

これら命題の作図操作で、「(２辺挟角の等しい２つの三角形 ABC と DEF で、) 辺 AB,AC が、それぞれ DE,DF に等しい」ことは判定できるし（命題４）、２等辺三角形の定理（命題５）で、「大きい AE から、AF に等しい AG を切り取ること」もできることになる。そこでは、そう記すだけで、もう線分を切り取る作図法は記述されない。作図法が述べられて、存在すること、存在するものにされれば、その後は、作図操作を述べることなしに、

それを指し示す文言で記述される。次に、その様子をさらに説明して、新たな考察に進む。

追記）このエッセイは、第２０回東北地区和算研究者交流会（平成２３年１０月２３日、福島市）で研究資料として配布し、また、東北数学教育学会第４３回年会（１２月３日、弘前市・東北女子大学）の研究会で発表資料とした。

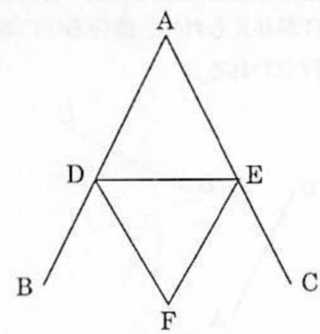
§２．角の二等分線、正方形の作図

「原論」は、「与えられた角を２等分すること」（命題９）を次のように記述している。

角 BAC が与えられたとせよ。

AB 上に、点 D を任意にとれ。AC から、AD に等しい AE を切り取れ。D,E を結び、DE 上に正三角形 DEF が作図されたとせよ。

A,F を結べば、直線 AF で角 BAC は２等分される。

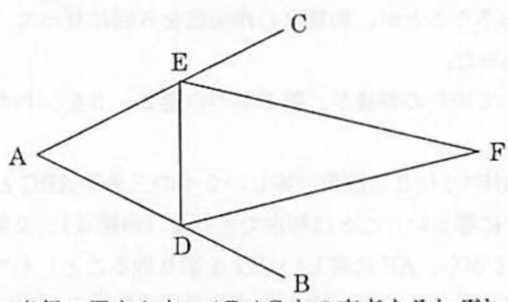


以下、三角形の３辺合同定理（命題８）による証明が書かれて、この作図命題の項は終わる。

さて、上の点 E は、A を中心とし、半径 AD の円を描き、それが直線 AC と交わる点として単純に得られる。ところが、そういう作図操作で書いていなくて、（命題２の作図に続く）命題３の文言で述べられている。

注目したいのはもう一つ、点 F を、DE 上に正三角形 DEF を作図（命題１）して得ていること。ここは、３等辺三角形でなくてもいい、２等辺三角形であればいいのに。

“公開講座”の授業では、「与えられた角を２等分する直線」の作図を練習問題としている。ただ、小テストとして出題しているだけであるが、実際に受講生に試したら、次のような解答が多いのではないだろうか。



A を中心に任意の半径の円をかき、AB,AC との交点をそれぞれ D,E とする。次に、D,E をそれぞれ中心として、同じ半径の円をかき、その交点を F とする。A,F を結べば、直線

AF は角 BAC の２等分線になる。作図終。

コンパスで円を描くこと３回で作図される。こう書いた方が操作がわかりいいと思うが、「原論」はそうしていない。「原論」は単に、作図の方法、術を記述しているのではなくて、原理が解ることに重点を置いて説明しているのだ、ということができよう。

説明は命題１から連なっている。

だから、「与えられた角を２等分すること」（命題９）は、他から独立した、一つの作図問題としてあるのではない。

それは、正五角形の作図についても同じで、命題Ⅳ－１１「与えられた円に正五角形を内接すること」には、和算家が取り組んだ作図問題の解が書いてあるわけではない。

「原論」は、そういう作りになっている。

ここで、上の図で、DE 上に正三角形 DEF を作図することに話を戻そう。この作図は、（命題１）の説明では「D を中心として半径 DE の円をかき、また、E を中心として半径 ED の円をかき、」となる。「コンパスの支点を D に当て DE に開いて円をかき、次に、コンパスの支点を E に当て ED に開いて円をかき」とすることになる。

前節の言葉を用いれば、コンパスの空中移動はしない作図になっている。

わたしは、ここに今回初めて気付いたと思った。それは、むかし、大学院のゼミで使用して命題９を読んだとき、「D,E を中心とする円の半径は任意でいい（短すぎて交わらなければ、長くするだけのこと）。なにも、DE に同じにする必要はない」と考えたのを覚えているからである。覚えているのは、実際に口に出してそう言ったからだと思う。

今は、「原論」の作図に素朴、簡明さを思う。わたしの感じ方には、数学の「一般化」や、記述事項の外の論理で考え、外の物差しで読もうとする傾向があった。たとえば、２つの円が交わる一方の点とか、交わり方などを気にする。気にした末に、図形の証明問題に図を入れ、「右の図のように・・・」とし、記号のふり方まで示して、落度なくしようとする。注目する先や、注意する点がいろいろに入り込み、落ち着かない。

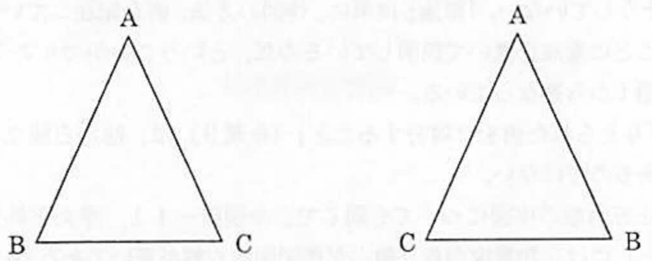
「原論」にそういうぶれはなく、説明の姿勢は一貫している。命題の並びにあそびはなく、緊密である。

なお、「線分を２等分すること」（命題１０）、「直線にその上の点から直角に直線をひくこと」（命題１１）でも、「角を２等分すること」（命題９）のように、正三角形を作図して行なっている。

中学で教えている２等辺三角形の定理について見てみよう。両底角が等しいことを、頂角の２等分線を引いて証明することがある。「原論」は２等辺三角形の定理（命題５）の後に、「与えられた角を２等分すること」（命題９）を述べているのであるから、そうしてはいない。頂点から底辺に垂線を下ろす作図は、（命題１２）としているから、そうしてもいない。補助の図を加えた証明をしている。その図には（その勉強に集中できない学生によるのか）名前まで付けられて、古来、初学者がつまずく箇所という伝説に色を添えている。

さて、三角形 ABC に、三角形 ACB は合同になるから、と気付けばよい、という注釈に

感心し、同意したこともあったが、今は、これでは「原論」の証明より難しくなると考える。



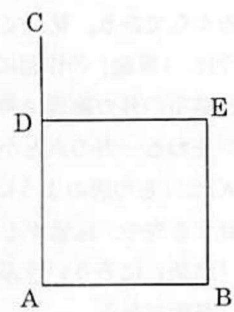
三角形 ABC を裏返したのを元の位置に重ねるのは、おもしろい証明ではあるが、学び始めて、先に進むことを頑張っている人を惑わせる証明だと思う。古代ギリシャ人にとっては確かにそうだったはずである。初学者には、「原論」の（命題５）の証明は、少々長いが、素直に、難しくなく読めるかもしれない。証明としては、それより前にあるのに、（命題２）の方が難しい。

「与えられた線分上に正方形を描くこと」（命題４６）は“授業案”には出てこないが、こういう作図題も「原論」にあるということを含め、後でも話題にするので、そこでの作図法を以下に見ておくことにする。

「AB を与えられた線分とする。その線分に点 A で直角をなす直線 AC をひき、AD を AB に等しくする。D を通り AB に平行な線 DE をひき、B を通り AD に平行な線 BE をひく。」

ここでは、直角をなす線の作図（命題１１）、平行な線の作図（命題３１）が行なわれている。

これに続き、作図された平行四辺形 ADEB が、等辺であり、また、４つの角が直角であることを証明している。



「平行な線」について。２直線が交わらないとき、２直線が平行であるというのに合わせて、中学の教科書には「以後、直線といえば無限に延びたものをいう」と書いてあった。そんなとき「原論」を開いたら、そこには「無限に延びたものとする」などとは書いていない。「平行線の公理」の発見を、公理の論理上の機能をもって提示してみせている「原論」は、無限直線を想像することを生徒に強制するようなことはしていないのであった。

後の数学者が「公理」概念一般から見る「平行線の公理」について、今のわたしは、作図操作に沈潜して原始の心情を推測し、「原論」の公準の裏を読み、背景を考える。

与えられた直線に平行な線は、錯角を等しくなるように作図して得られる（命題３１）。錯角が等しければ平行であることは証明されるからである（命題２７）。当然、ユークリッ

ドはその逆の証明を考える。逆の成立も理由として、三角形の内角和の定理を証明すること（命題３２）は既に第Ⅰ巻の命題構成のかなめにしている。逆の証明ができないなら、その成立は前提事項として、あらかじめ書いておくしかない。

結果論として、そうして誕生するはずの言明が公準５（平行線の公理）である。その命題文は、「無限に延びた直線」について平行ならば錯角がひとしい、ではなく、次のようになっている。

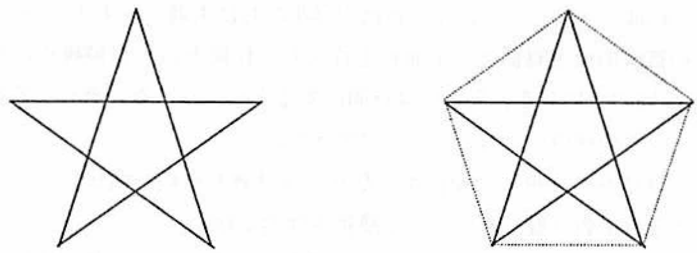
「１直線が２直線に交わり同じ側の内角の和を２直角より小さくするならば、この２直線は限りなく延長されると２直角より小さい角のある側において交わる。」

直線を延長するという作図を繰返し行なううちに、交わるというのである。

つい、口が滑ってしまうが、正方形の相対する辺は平行であり、線分である辺も「直線」である。線分の端点は辺に入るか、などと、たわけた議論に神経を使うことはない。

§３．作図問題、三角、四角と、作図命題

正五角形の５本の対角線で星型が作られる。“授業案”では、星型の形を一筆書きで描くことから、一回目の授業を始めている。



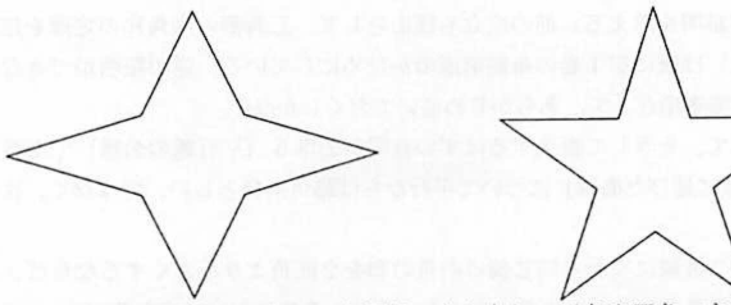
ちゃんとした星型の作図は、正五角形の作図に帰着される。そういう連絡路を頭に描いて、わたしは“授業案”を書き始めたのであった。

“授業案（前篇）”を書き終えた頃、ある日、テーブルでお絵かきをする女児を前にして、星型の一筆書きを試すことを思い立った。女児は小学校一年生である。

「わたしのかいたのと同じのをかきなさい。」

それが、描けなかったのである。予想に反して鉛筆が進まない。側で見ていた母親が、「○○ちゃん、“せ”の字をかくといいよ」と助言した。母親はこの問題への取り組み方をそのように覚えているということは、母親にとっても難しい問題だったのであり、ゆえに、彼女は、五角形を描いて、対角線をひいてみたりしたことはなく、ましてや、作図法を学習することはなかったと推測される。小・中・高の数学教室で教えられたことがない。

後になって考えたのであるが、女児は、次のような形なら真似することができたであろうか。



三角や四角なら描けるのではないかと思う。ともあれ、三角や四角、まるを区別して描けて、言葉を獲得する。その後に続くこととして、上のような形や星型をフリーハンドで描く学習段階がある。

そういう学習の記憶の上に、定木やコンパスを使う絵かき、かたち描きの体験があって、星型や正五角形を描くことを問題と認識し、問題の解決に関心の向う段階がある。

学習プログラムはおおむね、易から難へと構想され、単純から複雑へと構成される。

ユークリッドの「原論」はそういう構成ではない。前節までに見たように、いきなり初等的ではない命題が出てくる。「点Aと線分BCが与えられて、Aを端点とする、線分BCに等しい線分 AD を作図すること」(命題2)。2等辺三角形の定理(命題5)の証明も単純ではない。それは、学習させられる、近代の学生たちにも難しいものであった。

わたしは、和算家の術を真似て正五角形を作図し、作図という単純操作に沈潜するうちに、「原論」の記述の底にある、あるいは行間にあるともいうべき、素朴な原始の感覚に近づけたと記して、その理由めいたことを述べてきた。

「原論」の題材は素朴、単純な操作からなり、述べ方も単純、明快である。そこには、現在のわれわれの数学教科書にあるような猥雑さは全くない。

命題として第I巻には簡単な作図題が並び、第II，III巻の主要命題は作図題になっており、第IV巻は16個の命題全てが作図題である。しかし、それら一つ一つは、緊密に構成された全体のなかで、他の命題との連関のもとに記述されているのであり、和算家が問題とした「正五角形の作図法」のような“作図問題”についての答がそこにあるわけではない。

正五角形の“作図問題”の場合、たとえば、どんな大きさであれ、定木とコンパスを駆使して正五角形のかたちを作ることが問題とされているのに対し、「原論」の作図命題では、辺や、外接円が与えられて、正五角形を描く“一つの”方法が記述される。

このことは今さらこの節で言うまでもなく、前節までに明らかなことであるが、「原論」については誤ったイメージを持っている発言を見聞きすることが多々あった。それに、教科教育論で「原論」を重く取り上げている主張を近年は読むことがない。若い人は今を、現在を追うのに忙しく、カリキュラム論の原資料として読む余裕はないということもあるから、私事にからめてもう少し述べておく。

「原論」を開いて、初めて「与えられた線分上に正方形を描くこと」(命題46)を見た

とき、わたしは「こんな易しい作図法まで説明している」と思った。

前節で取り上げた、角の２等分線の作図（命題９）に続く、「与えられた線分を２等分すること」（命題１０）、「与えられた直線にその上の与えられた点から直角に直線をひくこと」（命題１１）も易しい。

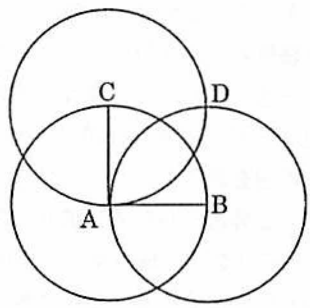
同じように易しい正方形の作図は、そこよりずっと後にあることを、初見では奇妙に感じた。正三角形の作図は、（命題１）としてずっと離れたところにある。

「原論」を丁寧に読もうとすることなど、わたしもめったになかったから、「原論」の文脈を想定することもなく、正方形の作図題を、“作図問題”にして、すぐにその作図法が頭に浮かぶ易しい問題だと思ったのであろう。

頭に浮かんだ作図の術は、たとえば、こんなだったと想像する。

直角をなす２直線をひく。その角Ａを支点にして（任意の）円を描き、２直線との交点をB,Cとする。

次ぎに、それぞれB,Cを中心とし、半径がBA＝CAの円を描き、Ａと異なる交点をＤとすれば、４角形ABDCとして正方形を得る。



このように作図された４角形が正方形であることの証明は、考えてみると格別、難しいわけではない。それより前に出ている命題に基づき可能である。しかし「原論」の作図による方が、前の命題とのつながりが滑らかなようにも思われる。次の命題であるピタゴラスの定理の証明（命題４７）での直角三角形の各辺の上の正方形の作図では、やはり、「原論」の作図（命題４６）とのつながり具合の方が滑らかである。

§４．問題解決型と、記述証明型と

「原論」の述べ方は単純、明快である。そこには、現在のわれわれの数学教科書にあるような猥雑さは全くない、と前節で述べて、中学数学について頭に思い浮かぶことはいろいろで雑然としているが、その雑物には、２等辺三角形の定理の証明法は３つあるとか、平行四辺形なるための条件によりとか、これは○の定理と○○の定理から成立するとか、が入る。

しかし、教育内容や方法に関係することではあっても、この論稿で考えようとしているのは教科書に見えていることよりはもっと重く、深く、ここに来たる流れのことである。

平行四辺形の語を教え、２等辺三角形の定理を教え、平行を定義し、平行線をひいて三角形の内角和の定理を証明する、全て由って来たるところは、「原論」のⅠ～Ⅵ巻の部分「幾何原本」である。「幾何原本」が西洋で読み継がれ、近代の学校でも、算術・幾何・代数の

幾何として基礎教養とされた。日本の学校では、西欧のカリキュラムを下敷きにし、初めのころの教科書は急造で、数学書も欧米物の翻訳、翻案が使われた。

明治は遠くになって、日本の教育制度も、敗戦時の大変革を経て、大きく変わった。戦後改革で6・3制の義務教育の中学校が生まれる。新制度が安定し、高等学校への進学が急増する頃には数学教科の内容の整備、改造も列島を巻き込んで進む。不幸なことにそのあおりを受けて、とわたしは考えるのであるが、高校の数学から、わが国で、「幾何原本」の伝統を担っていた「幾何」はなくなった。

不幸の一つは、科目の「幾何」がなくなって、解析幾何の基盤がわからなくなった。

証明問題に生徒を縛りつけるときではない、そもそも「幾何」自体が時代遅れの数学である、数学の思考や論証の鍛錬は「幾何」に頼らなくてもいい。教科についての変革・変化を、こんな風な、単色の発言、表現では括れないが、結果として、「幾何」のことは、平面幾何の初等部分のエキスを中学に下ろして教えるだけでいい、ということになって、今がある。かくして、定義、定理、証明は、中学校の図形領域の内容となった。内容を学年配分して、図形の合同について語り、平行を教え、錯角、同位角を教え、円周角の定理とその逆を教える。

「2等辺三角形の両底角は等しい」も証明すべき定理としている。逆必ずしも真ならずで、逆「2つの角が等しい三角形は、等しい角に対する2つの辺が等しい」は、「原論」(命題6)にあるような証明は教えようがないが、区別されるものとしている。

「原論」の作りでは、「A であるならば B である」と「B であるならば A である」は峻別される。峻別して第一巻を編むことが、平行線の公理を産んだと論じた。公理は、作図の体験から生まれたわけではない。

三角形について「2辺が等しい→2角が等しい」と「2辺が等しい←2角が等しい」は違う命題である。しかし、折り紙を折って切ったり、コンパスを使って描いたりして2辺の等しい三角形を作る、その体験の実世界では、見るからに2角も等しくなる。2等辺三角形を作ると、作り方から2等角になるのに、「2辺が等しい→2角が等しい」は証明すべきことだと言われたら、生徒は“証明”イメージをどう作ったらいいか。

2等辺の作図の仕方が一様ではない実体験の世界からは脱却しなければ作れない。

一方で、公理の語も公理概念も教えないが、平行線の公理は、自明なこととして教える。

逆命題になる「錯角が等しい→平行である」の証明も中学生には難しいので、自明なこと、教師が学んでいる知識では公理のようなもの、と胸に収めて、それを秘めて教える。

区別して使うこともない定理とその逆、自明な命題のオンパレードである。

前節までに調べたように、定理や証明は、緊密な一直線の鎖にされた作りのなかにあってこそ意味をもつ。授業では、「原論」にあったような構成はとりようがない。それを中学生に理解させようとする指導は標準の授業形態では難しい、というより無理である。

無理が通れば道理は引っ込む。中学校の図形領域の学習では、体験の上に立つ常識の道理は通らない。

いっそ、命題論証的に教えることは止めた方がすっきりすると思う。三角形の内角の和のことは、実体験の世界から飛翔することなく、算数で教えればすむ。「幾何原本」から発する伝統の幾何など、いまの数学教科の中から抹消しても、一向に差し支えない。ベクトルと行列、関数のグラフ、微分、積分の勉強に、平行四辺形なるための条件や、円周角の定理などなどの諸「証明」を用意する要はない。要らないように数学教科の要目編成がなってしまった。

幾何学の考えなどしなくて、ピタゴラスの定理を理解できるし、利用することができる。実際、和算は、「原論」式に証明などせずとも理解して、計算原理としていた。

三角法の指導も、平行の定義、平行線の公理、証明についての講釈はなしで進められる。そのことは、「塵劫記」や、その後の和算の発展、江戸期の測量技術、暦学・天体観測の進展が証明していると思う。渋川春海の生涯を語る話からも察せられる[13]。

塵劫記は論証の構成でなく、中国古代に、また、古代エジプトのパピルスの書にもあったように、問題と、問題解決のスタイルである。

わが国の学校数学からは、命題論証的なスタイルの記述をなくした方がすっきりする。

「幾何原本」の内容は、明治期に、国策に伴って学校で教えるようになった科目である。文明開化の明治も遠くなった。かくして、論証「幾何」の勉強は、アメリカ占領下に民主主義の進んだ現在の日本には要らないものになったのであろうか。

それを問う前に、日本人は「幾何」で何を学ぼうとしていたのか、その科目で日本では何が学ばれていたのかと問い、考えてみたい。

ここでは、教科目「幾何」教育に係わるわたしの見聞を書きながら、その問いに答える手掛かりを探す。

わたしは新制度・義務教育の中学校入学、新制高等学校の卒業であるが、高校数学に「幾何」が独立した科目としてまだあって必須、2年になって習った。大学の入学試験でも、「解析II」とだったたか、選択になっていた。

教育大学の教官になったのは、大学を卒業して8年ほど後のことである。数学教室には、大学生のとき講義を受けた先生方が教授で赴任されていた。群論の講義で覚えているK先生は分担されていた教科教育法の講義で、「幾何」の証明を伝授していた。というのは、何遍となく再試験をして、最後に残った数人の答案を見ながら、「やっと、垂線定理がわかったようだ。(合格!)」とつぶやいていたのを覚えているからである。数学談話室では、黒板に図を描きながらM先生とよく議論していた。

学生時代にM先生からは射影幾何学の講義を受けた。教育大学では、数学教員の免許単位の実習付きの「測量学」をS先生と分担し、集中で講義していた。

多分、入学試験の採点の雑談時、M先生の話。むかし、東北大学の数学の採点で、いつも「幾何」の採点を担当させられ、枚数は少ないのに、終えるのは最後になった。読むのに時間がかかるし、採点効率はたいへん悪い。(「幾何」のない今は楽だ。教科のなかでも数学の採点がいちばん早く終わる。)

採点場の大会議室には、他の科目の採点をする人もいる。国語の教授が、今の数学の問題はちんぷんかんぷん（解こうとする気が起こらなくなった）と語ったのを忘れられない。「幾何」があったころは取り組めたのである。旧制高校では文科コースでも勉強させられた数学の知識で解けた。新聞記事の記憶であるが、法学部の教授で、入試問題を解くのを楽しむ人もいた。

非常勤先の工学部の数学担当の教授は、高校教師の経験者だった。「幾何」の授業では、証明を何人かに板書させて指導することをしたが、あらかじめ予想したのとは違うのもあって難儀させられたと語ることがあった。

つまり、「幾何」では、問題解決型ではない証明記述型の学習をさせた。それが標準の内容からは無くなるような数学に、戦後、新制度の学校で変わって行った。高校の「数学B」に幾何を入れたことがあったが、記述型の学習が復活するような状況にはなくて、次の要領改定でなくなった。

幾何の内容が「数学B」に復活するときの高校教師の準備勉強の熱気を、わたしは全国研究大会の分科会で体験した。発表の多くが、中学で教えている「幾何」の内容の把握から始められていた。細部は忘れているが、当の「幾何」復活時の要領編成でキャップだった茂木勇先生にお聞きした苦労裏話は覚えている。

復活した幾何について K 先生にお聞きする機会があったが、先生は、チェバの定理、メネラウスの定理のようなのも入れたのではまずいと応えられた。計量的な定理も並べては、証明記述型の指導を徹底できないからだ、とわたしは解釈した。中学で教えていることの復習の上に、というのも、復活時に指導内容を作りにくくしたと思う。

ところで、モリス・クラインの数学史に関する大著[14]を教えられたのは K 先生からであった。K 先生には、また、一学年の理系学生向けの講義の順番がわたしに回ってきたときに、その講義用に先生が作成して使われたノートをお借りした。

話をまた新米教官だった時代に戻して、わたしは数学談話室で高校の幾何を再学習し、たとえば、三角関数の加法定理は、直角三角形を重ねた図で証明できることは S 先生に教わった。あるとき、三角比としての定義にもどって証明することを考えようとしたが、自分では証明図を描けなかったのである。

さて、数学教室で最年長の教授は、わたしの大学4年のときのゼミの先生であった。その T 先生とは、非常勤の工学部でもご一緒だった。帰りは自家用車で仙台駅まで乗せてもらった。が、幾何に触れる話を聞いたことはなかった。

それが、年に2回ほどしか会うことのなくなった晩年に、先生が数学の道に進んだのは、高等学校の幾何で開眼したことがきっかけであったと聞いて意外の感に打たれたのを覚えている。もしかしたら旧制中学の幾何だったかもしれない。開眼とは仰らなかったであろうが、８０歳を過ぎても忘れていないことであり、わたしの心象では、単に好きになった数学の話ではない。高等学校は佐賀高校、東北帝国大学の数学科への入学は定員に満たなくて、無試験だったという。旧制の高校生は知的エリートであった。旧制中学生の数も、

現在の大学進学者より少なかったように思う。

T高校生は、語学漬けの勉強のなかで、証明記述型の「幾何」に、西洋文明を支えていると思しき精神の真髄を感知したのではなかろうか。

なお、わたしが大学の理学部に進学したときの一年用の数学は、内容の記憶からすると、「代数学と幾何学」および「微分と積分」であった。後に、“現代化”されて、前者は「線形代数学」になる。そして、高校の「幾何」に引き続く内容は無くなる。

旧制の中等学校では、「錯角が等しければ平行である」で帰謬法（背理法）の洗礼を受けたものだ、と語る人がいた。エウクレイデスの「幾何原本」にある証明法だと教えられて、忘れられない経験となったのであろう。教科書の証明は「原論」のとは違っていたと思われるが、この稿の第２節で触れた命題Ｉ－２７である。

平林一栄先生が、国立大学定年後に勤務の大学で、この帰謬法を話すような講義をされたことがあるらしい。というのは、「・・錯角が等しいのに、この２直線が平行でなく、交わるとすると・・・」と言って黒板の（平行）２直線を交わらしたら、「センセイ！その２直線は曲がっています」と問われたという。

ちなみに、「原論」を見ると、２直線は折れて交わる図を描いているが、証明は、２直線が交われば三角形ができることを根拠にしており、直線を曲線に描かなくともいいようになっている。

背理法は、平行線の存在性によってではなく、高校数学の「集合と論理」のなかで、逆や裏、対偶とともに、“すぐわかる”例で解説されるようになった。“頭の体操”の種にはなっても歯応えなく、西洋伝統の思考にあった抵抗感も、そこにはない。

§５．特異な記述体系、ギリシャの奇跡

印刷術の発明後の「原論」、ラテン版のうちのローマで印刷のクラヴィウス版（１５７４）が、宣教師によって中国にもたらされ、前６巻が翻訳されて「幾何原本」の題で出版され（１６０７）、日本にも伝えられた[8]。享保７年（１７２２）には我邦（日本）に入っている[5]。伊東俊太郎の「ユークリッドと『原論』の歴史」[3]によれば、「著者クラヴィウスは（１５３７～１６２１）イエズス会の最高学府「ローマ学院」の学頭となった当代一流の碩学。しかしこの書は単なる翻訳というよりも、先行者たちの注釈やノートをあつめクラヴィウス自身の批判や改良を加えた一種の編述書である。」

和算家の作図法として“授業案”で取り上げたのは、藤田貞資（ふじた・さだつぐ（さだすけ[10]）１７３４～１８０７）の術、安島直円（あじま・なおのぶ１７３２～１７９８）の術、それに、川北朝鄰（かわきた・ともちか１８４０～１９１９）が「私の友人、平野喜房が発見した」と記している術の３つである。

藤田も安島も、中国語訳の「幾何原本」は読んでいないと思われる。が、「コンパスと定木を用いて」正五角形を作図するという問題は、トレミーの作図法を伴って日本に伝わっ

た。作図法を「大西洋の術」と呼んで記していたこととも重ねてそう推測される。和算家がトレミーの「アルマゲスト」の第１巻を読むことによって「大西洋の術」を知ったとしたら、そこには「原論」の命題番号を付して証明が書いてあることから、「原論」なる書の存在と、書には第XⅢ巻のあることも知ったであろうが[15]、「大西洋の術」を知ったのは、プトレマイオス著「アルマゲスト」の訳書によってではないであろう。

トレミーの目的は、三角関数の数表を作ることにあり、計算の出発点で、円周の$\frac{1}{5}$弧、すなわち、７２円周単位に対する弦の長さ（３６°の正弦の倍）を正五角形の作図法から算出している。

「原論」はおよそ紀元前３００年頃のものとされる。「アルマゲスト」は推定の通りに紀元後１５０年頃のものとするならば、トレミーは、彼の書より４５０年前から伝わるエウクレイデス著「ストイケア」（原論）を読んだことになる。そして、その最終巻の命題をちゃんと利用している。

藤田は、正五角形の対角線の長さは、辺の長さの$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$倍であると計算して、それを作図にするように考えたと推測される。「計算から作図法」は、トレミーの「作図法から計算」とは逆の営為であり、そこには、古代ギリシャと近代との間に、算術・数式の進展・普及という段差がある。

作図法が藤田の名で記録されていたことから、彼の術を導いた計算や、術を理解することは一部の和算家にはできたが、一般の算学愛好者には難しいことだったと推定される。さらに、彼の術や、安島の術や「大西洋の術」が、作図問題の解として明治まで伝えられたであろうことが、川北朝鄰の言「私の友人、平野喜房が発見した方法は簡単明瞭なので初学者のために書き留めておく」から推察される。

開国、明治維新の後、わが国でも英語のユークリッド式「平面幾何学」を読むことができるようになった[。お雇い外国人の授業で聴くこともできたであろう。

中等学校の教科書も編まれて、使われて、太平洋戦争、敗戦に至り、占領、戦後改革を迎える。戦後の教育を受けて育ったわたしには、教養の断絶[19]を前に、明治、大正の勉学を思うのが難しい。その溝は書籍上の経験では埋められそうにない。外堀が埋められないのであるから、初等・中等の数学に限っても戦前の勉学を思い描くのは難しい。

しかし、和算家の作図法を分析して、その体験で、ユークリッド「原論」（の平面幾何部分）を照らすような思考をこの論稿に綴ってみると、ここに取り上げ、関心を向けた命題について、戦前の教科書がどう書いているか、古典の精緻、繊細をどう伝えているかを観て、洋算・洋学の移入の状況を覗き知るという楽しみは楽しめるかもしれない。宮城教育大学の「林鶴一文庫」には古い教科書が保存されてある[30]。

さて、「原論」の、ギリシャ語原典からの最初の邦訳にして、全１３巻の完訳は、中村幸四郎先生他により１９７１年に刊行された。わたしは、この書をひも解きながら、和算家の

正五角形の作図の術を読み、それを「原論」に誘う“授業案”にし、それで、またぞろ自分の数学カリキュラム論の主張を思い出させられ、老人の頼りない歩みでこの論稿を書いている。歩みの先も覚束ないながら、もしも、正統の「原論」(の幾何原本の部分)を和算家が手に入れたとしたら、彼らはどう読み、どんな印象をもったであろうかと考える。

第一巻の最初は、正三角形の作図命題である。角の二等分線の引き方があり、“作図問題”にもならないような易しい作図法の解説が並んでいる。第一巻最後には、ご丁寧なことに正方形の作図法があって、句股弦の定理がある。初めてみる図で、面白い(証明)をしている。句股弦の定理の次ぎには、それの逆になる命題文がちゃんと書いてあって、その(証明)をしているようだ。いちいち、そうするのが大西洋の(数学の)流儀なのだろうか。ここで第一巻はお仕舞い。

第二巻の命題も計算式にすれば分かりきったようなこと、でも、それらを術として使うような歯応えのある問題などないだろう。

最初に日本語訳をめくったときのわたしの読み方がそんなものだった。組み立ての精緻なところまでは目が届かない。第一、合同条件のような、成り立つことが自明な命題がある。二等辺三角形の定理は基本的に使っているという構造まではなかなか読めない。後に使うところで、「前に○番めで記したことから」などいうこともしていないから。

「原論」に近しくなった今なら、作図を基盤とする素朴な感覚を探ろうとして、二等辺三角形の定理は、どんな方法で作図された二等辺三角形であれ、両底角は等しいことをいざ示さん、としているのだろうと深読みもする。すると、その場所に、そのようにある証明として馴染む。

しかし、素朴にして、単純な記述とは裏腹に、早くも、二等辺三角形の逆の証明から帰謬法(背理法)の論法になる。飛躍なく積み重ねて行くとはいっても、決して、一般の民のための教科書にはならない。

平行線の存在を公理としているというのも、組み立てと密接不可分のこととしてそうなっている。初等幾何学では、自明なこと、既知のこととすれば済むというものではない。

「原論」は、特異な記述体系の書であり、古代ギリシャが生んだ奇跡であると思う。こういう書を作ろうとさせた言語文化、思惟、思想は奇異で、奇異な大著を作ったひとの出たことがまた奇跡的である。著者はエジプトの地、アレキサンドリアに招聘され、この地の大学校で、今風に言えば、基礎教養の数学を教え、テキストにしたのであろうか。

テキストは、素朴な作図命題を軸に、精緻に、ギリシャ語が読めるひとは誰でも、数学を学んだことがなくても字面は声に出して読めるように、13巻の大著に組み立てられている。それが、近代に西洋で読み継がれ、言語、民族を超えて共有されるものと結果した。世界史の奇跡を生む要因は、原著が内包していたと考えられる。

「幾何原本」、すなわち「原論」のI～IV、(およびV,VI)については、あまたの解説、翻案が作られながら、古代の姿で繰返し復活を果たし、原型が残った。強く残ったものと対照的に、測量術や、面積・体積の問題や、辺境や地域の算術知のことで、古代ギリシャ

文化の外にあったもの、あるいは、それ以前の古代文明にあってギリシャに影響したものも、多くは、歴史の舞台から消えて行ったことであろう[16]。

古典古代の研究の成果なのか、後の西洋的な教育文化の結果なのか、かなりの数の「原論」の定理をターレスの名を付けて呼んでいる。ターレスは、「原論」の成立よりは３００年近くさかのぼり、ピタゴラスより半世紀ほど前のようである。

５つの角からなる（§３の一筆書き）星型は、ピタゴラス学園のシンボルと伝えられる。

「原論」の成るよりも前、古代ギリシャの神々が跋扈していた地中海の都市国家の若々しい成長期の数学知に、わが国の明治前の和算の賑わいをオーバーラップさせてみる。時空を越えてのわたしの夢想は、神社、仏閣に魂が出入りし、川に、山に、海に、祖先神がいると親に教えられた世界、霊を鎮めたり、祭ったりした村の、まだ夜の暗かった、記憶の底にある暮しを描く。

江戸に暮らした武士は、地中海の沿岸で明るい人間模様を繰り広げる神々とともに、宇宙の成り立ちを考え、議論する古代ギリシャ人の歴史を共有することはできないが、天と地を観測することは中国の書に学び、暦を改良し、実用を越える大きい桁の計算を算盤で行ない、図形の問題を出し合うことをして腕を競い、喜びを他と分かち合うこともあった。

この国は、急速な欧化政策で、近代学校をつくり算数を教え、幾何の教科書を作り、大学・数学教室をつくる。いろいろな面で欧米先進国に肩を並べるようになったが、明治維新から数えればたった２００年あまり、西洋音楽はにぎわいながら、鎮守の森に響く太鼓のエネルギーには及ばない。古典古代をつらぬき近代に流れる哲学の精神がわれわれの魂に響いてこないことからすれば、日本国生れの「数学原論」、長く読み継がれる奇跡をこの書は内包していた、と言われるような本を著わす、日本人のユークリッドが、もう１００年経てば出るであろうか。

ギリシャ古典「原論」の特異な記述体系、形式に縛られない、長く読み継がれ、将来の初等・中等教育の内容となる「新編・塵劫記」を編む人は、出るかもしれない。それはこの国の和算文化を引き継ぎ、問題解決型で、日本語で書かれている。その幾何編第一巻は、この稿の論考からすれば、作図の術を骨格として編まれていることが期待される。

宮城教育大学を６５歳で停年退職してから１０年が過ぎようとしているのに、そんなことしか言えない。ピアノ階梯の初級用教則本「バイエル」は日本人にもそのまま使えた。が、初級用の数学教本がそもそも今、これからの時代に成り立つのかを考える力は、わたしにはない。

追記）このエッセイを資料として発表したところ、早速、徳田建司くん（和算研究家）のご好意を得ることができて、和算家の正五角形の作図法を紹介している三上義夫[6]を読むことができた。手書き謄写版摺りである。そこでは、三上が次のように述べている。

「初めに西洋の画法がしるされている所から見ると、西洋の画法を見て他の画法を案出したものと思われる。西洋の作図法に接していたことの証拠にもなるし、またこの種の研

究も全然等閑視されたものでないことの証拠ともなろう。しかしこの事は他に何等の所見がなく、数学史家の従来これを説いたものを聞かぬのである。おそらくははなはだ珍奇なものと見てよい。」

この節で叙述したことは、計らずして、三上の疑問に答える内容になっていると思う。それにしても、西洋事情についての文献、情報もわずかであった今から５０年も前に、資料を的確に読んでいる三上の眼力には敬服する。

§６．西洋近代の数学研究から

角の二等分線の作図は、「原論」では、二等辺三角形の定理の後にあるから、という話を、§２で述べたが、そこに注意を向けてくれたのはアメリカの数学教育の雑誌であった。それとはまた別に、同種の雑誌エッセイで、「素数は無限にある」の「原論」にある証明について教えられ、感心したことを思い出す。ここでも「原論」の素朴に目を開かせられた。

「素数は無限にある」ことの証明は、「もし有限個だとすると、それら全部の積に１を加えた数は、・・・」とする背理法で、いくつかの本で読んで知っていた。一度読んだら、なるほどと感じ入って忘れられない。ところが、われわれに馴染みの、簡潔なその背理法には、落とし穴がある、とエッセイの筆者は説明する。

素数を小さい方から並べると、２，３，５，７，１１，１３，１７，１９、・・・である。

それから作られる数、２×３＋１＝７，２×３×５＋１＝３１、２×３×５×７＋１＝２１１、２×３×５×７×１１＋１＝２３１１は素数である。同じく、次の、２×３××５×７×１１×１３＋１＝３００３１も素数である、と学生が間違えるような、そういう背理法になっているというのである。

わたしの記憶も、そう間違えるようになっていた。「原論」の証明は、そういう錯覚を生じないようになっている。命題文自体「無限にある」ではなく、「素数の個数はいかなる定められた素数の個数よりも多い」（Ⅸ－２０）となっていて、したがって、証明は、整数論入門や代数学の書で目にする、「もし有限個だとすると、・・・」で始める短く簡潔なのとは違う。「原論」の証明に当てはめれば、素数、２，３，５，７，１１，１３によって上で作られた数３００３１は、５９×５０９と分解されて素数ではないが、５９と５０９は、２，３，５，７，１１，１３とは異なる素数である、となる。

ユークリッドの証明は、構成的で、わたしには背理法と感じられない。

余談になるが、夏に集中講義で行なっていた理学部の教科教育法に、「原論」紹介を挟んだ年があって、第７～９巻の内容は数論であると話したなかに、「素数は無限にある」をとり上げ、３００３１は実は素数ではないと言って、因数が見つけられるか試したことがあった。たちまち見つけた学生がいた。他の学生たちもその同級生の計算にびっくりしていた。素数表は手元になかったろうし、電卓も使っていなかったと思う。

第Ⅹ巻では、初めに、通約不可能な２量についての命題があり、また、最大公約量の求

め方が語られる。今日、無理数の発見と言って語られている内容に連なる。

システムとしての「原論」は、発見の姿を物語ることはないが、発見されたことを精密に記録する書となって、古代の神々が一神教の神の摂理の前に異教の神として退場させられた後も東方で読み継がれ、近代の西洋に復活し、素朴、繊細な原始の記述のなかに発見の形を推測する余韻を残している。

退場させられた神々も、絵画に、演劇に、スポーツに、時の姿で復興される。

火星の軌道はコンパスの描く円を重ねて得られる曲線ではなく、アポロニオスが古代に研究した円錐曲線であった。ケプラーの第一法則である。

「原論」には円の面積は直径上の正方形に比例することの“証明”はあるが、円積率・円周率のことは書いていない。楕円のこともない。「原論」にない古代の曲線を継承するサイクロイド、その他の機械的曲線の研究が微分・積分の創出を刺激する。

上で話した素数のことで、自然数の表から、２の倍数、３の倍数、５の倍数、・・・とふるい落として素数列を作るのを、エラトステネスの篩いと呼んで教えている。前２３０年頃のエラトステネスから近代の数論に至る線を一本、年表のページにひくと、ディオファントスは５００年近く後の古典古代の人、フェルマーがディオファントスを再生の書として読むのはさらに１４００年ほど後である。

大英博物館展に展示されていた古代ギリシャの壺だったか、アキレスが描いてあった。紀元前５５０年頃のものである。ギリシャ文化の期間は長く、広がった地域は広い。ユークリッドが書いた複数のものを含み、この世から消えていったものは膨大である。なかで、長く読み継がれ、初期の全体像を多面的に探られ続けて、原初の姿を日本語にも翻訳された「原論」が身近に、現にある。このような、歴史の奇跡を生む要因を、このギリシャの書は持っていたことになる。

数学の歴史話に戻る。「原論」を源流とする西洋史の数学の断片である。

ガウス（１７７７〜１８５５）は、ギリシャ・ローマ時代には蛮地であった北ドイツの地で生まれる。父親は煉瓦職人の親方であった。ガウスを数学者に向わせたのは、正１７角形が作図できることを発見した喜びであったという。「原論」は、正１５角形の作図法は書いているが、正７角形、９角形、１１角形、１３角形、１７角形、・・・のことはない。ガウスは、後に、正７，９，１１，１３角形はコンパスと定木では作図できないことを証明している。

ガウスが解くことになる作図問題を、証明記述型の「原論」がお膳立てしていたことになる。

ゲッチンゲン天文台長になったガウスは、天文台と、近隣の２つの山頂がなす三角形の３つの角度を測り、内角の和が１８０度になるかどうかを調べたという。３つの辺は光の線で作り、「原論」が平行線の公理を用いて証明している、内角の和定理が成立するかを調べたのだと伝えられる。

その当時、ハルツの森にはまだ、グリム童話の魔女が住んでいたであろう。

デデキント（１８３１～１９１６）が１９才でゲッチンゲン大学に入学し、３年後に提出した解析学の博士論文はガウスの賞賛を得た。ゲッチンゲンには数年とどまり、デリクレイの講義を聞くこともしたが、その後は中等学校の教師をした。ここに、デデキントの話を挟んだのは、実数を定義する、彼の「切断」概念の導入は、「原論」第Ｖ巻の比の定義によることを想起するためである。彼自身は確か、これは数学を教えるための方法ではないと記していたと思うが、日本の大学の数学教育へ影響すること大であった。

ヒルベルト（１８６２～１９４３）はF. クラインの取り計らいで１８９５年にゲッチンゲンに移り住む。当時、ヒルベルトの関心は幾何学に向っており、非ユークリッド幾何の講義をしている。ゲッチンゲンに住んでからは「幾何学の基礎」について研究を始めた。

ユークリッドの「原論」を原本とする研究である。

藤原松三郎（１８８１～１９４６）が明治４４年９月の東北大学開学を控え、「東北大学に入るべく留学の命を受けたのは明治４０年の秋であった。」「獨船ルードウヒ号に唯一人の日本人船客として・・・、ゲノアで上陸して伯林（ベルリン）に着いたのは１２月の暮であった。翌年の冬のゼメスターから月沈原（ゲッチンゲン）に移った。」

わたしが大学の学生のときの数学科の教授は４人、ともに、藤原のいた東北大学への入学生である。なお、助教授は５人、（§４に記した）Ｔ先生はそのうちの一人であった。他に、平山 諦講師。

さて、日本は明治に、陸軍や、学校制度をドイツにならった。ドイツの大学で西洋の学を学んだ日本人は、さかのぼれば古典古代に至るものとして、文化が、また、科学が語られるのを耳にし、古代の遺物を眼前にしたであろう。

日本の中等学校の「幾何」は、数学史で語られる「原論」が直接の原典ではなく、そこからの学びの歴史、伝承のなかで派生した教科書によったものである。

でも、西洋で語られているように、「原論」は、西洋で形成された数学の源流、演繹的体系を学ぶ教科、緻密な思考の鍛錬の場を提供する基礎科目として意識された。

ところで、日本が学校制度を見習おうとしたとき、大学の中核にあった神学部は初めから移入の対象外になったことはともかく、初等教員の養成や、工学は大学の外にあり、ドイツの学問の府では、数学研究が他から独立し専門化し始めていた。学問も科学も専門分科し、数学は、力学の実験や、天文の観測からは離れて行く。

幾何については、図形は描かれるものではなく、座標平面に乗せられて代数方程式が決めるものにされたり、微分の対象とされるものであったりして、幾何学の枠組みの特殊化、一般化が図られる。一方でそれらとは別に、ヒルベルトは基礎の厳密性について考究した。

「原論」は、古代の遺跡のようながら、廃墟ではない。数学を他領域と区別しているのは、演繹的体系による記述であり、その典型はユークリッド「原論」である。もちろん、演繹的とは「原論」の作りの、多面のうちの一側面にすぎないが。

彼の地の数学の成り立ちを、われわれは理解しようとすることはできる。しかし、ギリシャから流れる文化に浸ること、長い彼の地の体験を共有することはできない。

この地で真似なくてもいいこと、真似ない方がいいことも多いはずである。身の丈に合わないことだってある。日本人の身の丈については彼の地の歴史は教えてくれない。自分で測るしかなく、この国の数学の形成のかたち、日本語による教育での故郷は、明治前にさかのぼって手探りするしかない。和算を研究するとはそういう行為なのかと考える。

江戸のものをその時代のこころで読むのはむずかしい。ますます難しくなって行くが、それを試みる探索で見つかった資料から、時空を越えて、「原論」に書かれる前に古代文明の土地で息づいていた素材そのもの、操作そのことが感知されるかもしれない。

西洋で「原論」の紡いだ数学を背中にして探り、その尺度で測っては聞こえない、野生の叫びが、聞いてくれる人を待っているような気がした。

むすびに

この論稿をむすぶ言は、中学校の数学教科の教育法の再生、あるいは、教育内容の新生を和算の記憶、記録、発掘、整理に期待したい、であり、すでにその趣意は上に書いた。

その幾何の部は、直角三角形を核とし、平行の定義はしないし、平行四辺形なるための「条件」はなく、もちろん、2等辺三角形の定理を定理としないから、それを「証明」したりしない。以上は「原論」と違うことになるが、現在の教科書の解説がそうであるように、それでも、ピタゴラスの定理の証明（説明）には差し支えない。また、三角形の合同条件と呼んで複数の十分条件を並べ授けているが、与えられた三角形と同じ三角形の書き方としては異なるから、別々のことにする。そう、幾何の部は、作図の作業を主体にする。そうすれば、その後に出会うかもしれない「幾何原本」は学びやすく、また、教えやすくなるであろう。

今さらのようながら、「原本」の幾何は西洋を学ぶ科目として設定し、欧化の時代に作られ、使われた教科書のように、平行線の公準を公理とし、平行線の存在を帰謬法で証明するテキスト、あるいは副読本を作成して教える私立高校が出ないかと夢みる。が、現実には、大学の科目に設ける案ぐらいしかわたしには思い浮かばない。

数学に向う人や、哲学を研究しようとする学生が選択する科目になればいいが、さて、現今の世相でそういうことが期待できるかどうか。

中学校世代への副読本としては、演繹的、厳密な論理体系（への入門）を目指すのではなく、「原論」の単純、素朴な内容（の積み重ね）と、過不足なく、丁寧な記述を見習ったものを思い描く。作図命題のちらばりと配列に学び易さへの配慮が込められ、論理構成のかたちの兆しが、学ぶ寺子たちにも見えるようなもの。そこには「原論」のⅣ巻と同じ作図題があって、でも、副読本の扱いはⅣ巻とは異なり、与えられた円に内接する、正３，４，５，６，８，１０，１５角形の作図が問題とされて並んでいるかもしれない。Ⅱ巻にあるような作図で、式を立てると２次方程式になるような命題は、正５角形の作図の前にあるように思われる。

方形、長方形は四隅が直角の四角形であり、その概形は、小学生にもフリーハンドで描ける。

三角形の内角和の定理を証明することは、「原論」の作りでは、方形の存在性に係わることであり、ゆえに、正方形の作図は、正三角形の作図とは一線を隔する。斯様に、「原論」の演繹体系の底には現実の感覚を超える思考が働いている。（命題Ｉ－１が正三角形の作図で、正方形の作図は、平行線の公理を使い始める命題２９の前に置くことはできず、ピタゴラスの定理の直前に、命題４６としてある。）

中学生、万人向きの読本で、超現実の思考に基づく「原論」から拾い出した定理を、覚える知識に強いるようでは、深みのない内容の、他人行儀な教導になる。伝統の「幾何」も、入学者数からすると義務教育化している高校生には基礎教養の知識とは言い難くなった。

ともあれ、記号少なく、あるいは「原論」がそうであるように記号は一切なく、日本語で書かれていて、親子三代にわたって読めるような書であることが望まれる。

使い古されたものがあってこそ、新しいものが正当に評価される。

振り返り見ると、上に書いたような中等教育用のテキストや副読本など、江戸期の和算家には考えられなかった、たとえタイムスリップして未来の日本を一度見させられたとしても、目指しようのなかった目標であった。

和算研究に直に接したのは、東北地区和算研究交流会の一回きりであるが、その体験、そのときの体感が、このようなことまで言わせる試論を生んでくれたと思う。もちろん、交流会への出席後に読んで知ったことも少しはある。

むすぶ話にはならないが、最後に、はじめにに付け足すように私事を少し書かせていただく。

中村幸四郎先生は、若い頃ヒルベルトの「幾何学基礎論」を訳しておられる。

わたしが先生の隔週の数学史の講義を聴講したとき、年齢は８０歳を超えていた（わたしの父より７歳年上）。デカルトの「座標」思考を話題にされたこともあった。「原論」の幾何や、パップスの問題を引き継ぐように話されたと思う。先生の姿勢は、歴史の研究はできるだけ一次資料にもどれであり、（西洋で形成された）新しい数学にも学ばねばならない、であった。

西洋の数学者は、数学をオイラーから話すことができる。日本人はガウスまでしかさかのぼれないと言われたこともあった。

雑誌の連載で、先生が微分概念の出現を期するライプニッツの論文を読み解いているのを読んだことがあったが、当時すでに、一冊本になっていたかもしれない。

ところで、神戸大学の講義にわたしを誘ってくれたのは、宮武 修先生である。東北大学の数学教室、昭和１２年卒業である（わたしの生まれ年）。ただし、先生と話すようなったのは、同窓とは別の偶然によってであった。

わたしは４０歳のころ、量子力学をかじって、物理の基礎について考えた。いまの物理

理論を対象にしても、自然に、物理学史の発見を考証することになる。数学を探求することとは別種の学習であり、その作業に微分記号は欠かせないが、この論稿で触れてきたような数学は要らない。だが、「原論」が示している論理的階層システムのイメージは、物理の基本法則を考えるときの思惟の底にあった。

宮武先生は数学者でありながら、物理数学の論文も書かれていた。数学出身であったから物理の話がしやすかった。素粒子論のことを訊ねたら、「素粒子の理論は、まだ、分類学の段階です」、「素粒子といってもいっぱいあって、たいていは、非常に短い寿命です」と教えられた。

そのときから数年が過ぎて、先生の住まう関西の地の大学にわたしが転任になって、中村先生にもお会いすることになった。中村先生の、神戸大学での半期の講義が終わってからも、お互いの研究、目下の関心事を話すというゼミを行ったのを今更に思い出す。両先生が話されて（関西学院大学で、大阪電気通信大学で）、後に、中村先生が体調を崩され、その後、３人ゼミを行なうまでの元気は回復されることなく終わってしまった。

両先生は、また、この論考の§４にイニシャルで登場ねがった先生方は、S 先生、M 先生を残してすでに故人になっている。（この原稿を作った後、M 先生が今年、平成２３年の「７月９日に永眠しました・・・８５歳の生涯でした）との、ご子息からの葉書を受け取った）。

死者との対話に支えられながら「原論」のことを書き綴るうちに、宮武先生と話した当時のわたしの関心事が、改めて思い出される。

そして、物理の基本法則について考えることが、今からでも、また、できるような気になりかけている。

量子力学についての粒子・波動の両性説は今も健在である。ニュートンの質点力学の延長上に思考実験されているという点では、特殊相対論の帰結も同じである。素粒子は、その名からして力学の質点にされている。囚われの歴史のなかにいるかぎり、桎梏の外にある法則を想像することはできない。重い素粒子を更なる（小さい）基本粒子からなるとする標準理論は分類学の域にある。真の基本法則のかたちを求めるには、古代ギリシャの原子論よりさかのぼらねばならない。より前に知を求めた哲人たちは、宇宙に一なる構成要素を考えた。その哲人の一人ターレスは、生々流転する「万物の原理は“水”である」と考えたという。

ローマのキリスト教化の歴史は、天動説、地動説という２つの説に分ける宇宙観を強いた。われを神の下の中心に置き、われの大地は動かずとするような考えは、神の愛とは別で、日本で布教されても広まらなかったと思う。江戸期の庶民も、支配層も受け入れなかったであろう。「地球は丸い」とは、西洋から来た知識の一つとして西洋の文脈で、わたしたちは学校で教えられたのだと思う。祖父や祖母には認識の外のことで、知にもならないことであった。

われを振り返れば、西洋文化の外に生まれ育ち、神話の神々について聞くこともない少

年期を過ごした。戦中には閻魔様のいる地獄絵に驚き、戦後しばらくは、大人が語り合う暗い夜道で狐に化かされる話を、興味津々に聞いた。そんな昔に先祖がえりしたからか、元旦参りや七五三は近くの神社へ、葬式はお寺さんへ、というひとの流れに逆らわず、生々流転の自然のなかに浮かぶ自分に安らぐ。

たまのことに、光子よりも早いニュートリノが観測されたという新聞記事に心がさわぐ。まさかと思う。数日が過ぎたころ、もしやと、棚上げのままの、物理法則の“公理”をチェックしたい気持が起こる。

棚の袋から取り出し、死者との対話を楽しみながら、青春の夢を追うことはできるに違いない。取り組むのは一日のうちのわずかの時間でも、旧い日本に生まれた先輩方の一途、ひたむき、集中を、少しでも真似ることは鎮魂の祈りに向かい、心が静まるかもしれない。

参照文献、参考資料あるいは参考書

[1] 板垣芳雄：和算家の正五角形の作図法をユークリッド「原論」の数学で読む　教科カリキュラム論の延長上に、そして、「原論」の特徴を析出させる試みの一つとして、東北数学教育学会年報、第４２号、４５～６２、２０１１．

[2] 板垣芳雄：正五角形の作図法を授業案にする（前篇）、鳴門教育大学・学校数学研究、Vol.19 No.1, ５～２３、２０１１．

同上（後篇）は、同誌、Vol.20 に投稿予定。

[3] 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵（共訳）：I. L. ハイベルグ（編）『ユークリッド原論』、共立出版、（昭和４６年）１９７１．

[4] 小林昭七：ユークリッド幾何から現代幾何へ、日本評論社、１９９０．

[5] 藤原松三郎：暦算全書及び幾何原本の渡来　―和算史の研究 第四―、昭和１４年、（東洋数学史への招待―藤原松三郎数学史論文集―、２００７．所載）

[6] 三上義夫：証明の問題、和算研究、第７号、算友会（発行責任者：下平和夫）、１１１～１１８、１９６０．１０．　同、「和算研究」復刻Ⅱ、日本数学史学会、２００９．４．

[7] 平山 諦：和算の歴史、ちくま学芸文庫、２００７．p.195~8.

[8] 王 青翔：ヨーロッパ数学を日本に最初に伝えた人はだれ？ 話題源数学・下、p.841.

[9] 千喜良英二：若者の知的教養だった和算、話題源数学・下、p.848~9.

[10] 大竹茂雄：和算家の分布一覧、話題源数学・下、東京法令、１９８９．p.852~3.

[11] 伊藤幸男：遠藤正先生の思い出。遠藤マキ子：夫 遠藤 正と『和算』、山形縣和算研究會・會誌、第２４號、平成２３年３月、p.3.p.4.

[12] 伊藤幸男：最上徳内とその周辺、同上、p.11~17.

[13] 冲方 丁：天地明察、角川書店、２００９．

[14] Kline, Morris: *Mathematical Thought from ancient to modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[15] プトレマイオス著、藪内 清訳：アルマゲスト、恒星社厚生閣、１９８２．初版（上巻）は１９４９年。

[16] ジョージ・G・ジョーゼフ著、垣田高夫 大町比佐栄訳、非ヨーロッパ起源の数学・もう一つの数学史、講談社、１９９６．

[17] 中野京子：名画の謎・ギリシャ神話篇、文藝春秋、２０１１．

[18] 森本恭生：西洋音楽論、光文社新書、２０１１．

[19] 渡部昇一：日本の歴史 ①古代篇、現代までつづく日本人の源流、ワック、２０１１．

[20] 帚木蓬生：蛍の航跡・軍医たちの黙示録、新潮社、２０１１．

[21] 浅田次郎：終わらざる夏（上・下）、集英社、２０１０．

[22] 秦 郁彦：旧制高校物語、文春新書３５６、文藝春秋、２００３．

[23] 公田 藏：明治期の中学校の数学教育 ―明治３４年制定「中学校令施行規則」とその改正に関連して― 、数学教育史研究、第４号、１～１１、２００４．

[24] 公田 藏：明治初期の工学寮・工部大学校における数学教育、数学教育史研究、第５号、２６～３７、２００５．

[25] 公田 藏：明治前期の数学教育 ―東京大学予備門と文部省直轄大阪中学校の事例― 、数学教育史研究、第６号、１１～２２、２００６．

[26] 板垣芳雄：鶴丸先生の講演について、東北数学教育学会年報、第３６号、２００５．

[27] 森川幾太郎：図形の対称移動と証明問題作り、東北数学教育学会年報、第４１号、２０１０．

[28] アラン J. ビショップ著 湊 三郎訳：数学的文化化 ―算数・数学教育を文化の立場から眺望する― 、教育出版、２０１１．

[29] 伊達文治：学位論文、数学教育における文化的価値に関する研究、２０１１年３月。

[30] 林 鶴一 数学教育関係蔵書目録、「林鶴一文庫」を資料とする数学カリキュラムについての基礎的研究、科学研究費補助金 基盤研究（C)(2)（課題番号１１６８０２４６）研究成果報告書、代表者 板垣芳雄、平成１３年３月。

Geometry by Euclid's context doesn't fit pupil's formation of knowledge

ITAGAKI Yoshio

(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

In order to modernize Japan, Meiji government had to assimilate European civilization at all parts. They had constructed national education system. At colleges and University, foreign professors taught various specialties. Later, Japanese

students overseas took their positions. Mathematics textbooks were translated or adapted mainly from English ones. From elementary school Arabic numerals and horizontal writing have been used. Deductive geometry of Euclid which was traditional in the West world was taught at high school.

In those days, the percentage of pupil who advanced to high school was very low.

After the Pacific War, junior high school has been newly established, which belonged to compulsory unit.

Through the times of economic growth in Japan, senior high school students had been increasing, and nowadays almost all people enter to the high school.

By the irony of historical circumstances, theorems originated from Book 1 of Euclid's Elements are teaching merely in junior high school, now.

In this essay, I insist that before the War Japanese students had intensively studied the deductive-philosophical aspects of mathematics by geometry through the high school.

By the way, Euclid's Elements was books for specific aristocracy or elite. As we analyze in this essay, the Books is written elaborately and organized closely. Therefore, it has produced various mathematics researches in the history of Europe Mathematics. It has been reread to generate many textbooks for scholars.

In the meantime, the books itself had very unique system and theme. Then their content doesn't fit general education of arithmetic or geometry for the public, especially for Japanese.

About plane or solid figures, Japanese people would study by problems-solving better than by deductive thinking. In addition, many exercises with concrete figures induce their good understanding of geometry. However, it is difficult to find such exercises in Euclid's Elements. Before the age of Euclid in Greek civilization, there might be primitive mathematical thinking. That unaffected thinking would be natural to pupil's learning in these days.

" Wasan(和算)" , mathematics in the Edo period in Japan, enable us to imagine primitive and simple problems. Wasan had a long-time seller "Jinkoki(塵劫記)" published at 1627, whose author had studied his mathematics by Chinese books.

Constructions of regular pentagon by "Ajima(安島直円 1732~1798)" and others, help us to read between the lines of Euclid's volumes, and to guess pre-Euclid primitive thinking in the age of Thales.

Keywords: Euclid's Elements, curriculum for elite, school geometry in Japan, curriculum of junior high school, problems-solving, Wasan.