東北数学教育学会　年報第44号　2013年3月31日

均質性の意識化を意図した授業に関する考察

市川　　啓　山形大学地域教育文化学部
成澤結香里　山形大学地域教育文化学部学生

要約

本研究の目的は、均質性の仮定を意識化するための授業について検討することであった。このことを意図した実験授業を構想し、第4学年を対象に実践し、授業記録を作成して分析と考察を行った。その結果得られた主な知見は以下の通りである。

①問題設定が、均質性を意識させるために有効であった。
②未知のデータについて「同じとすると」と仮定する倍比例の推論には抵抗が少ないこと。
③既知のデータについて「同じとすると」と仮定する等分比例の推論は、困難があること。
④等分比例の推論では、同じ数で割るにとどめず、同じ数に等分することを意識させることが大切であること。

検索語：　均質性　意識化　仮定　比例的推論

1　はじめに

「全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組みが期待される内容のまとめ」(2012　文部科学省)は、乗除法の意味理解に課題があることを指摘している。

乗除法が用いられる前提には、比例関係がある。だとすれば、子どもたちの比例概念が進展すれば、乗除が用いられる場面の理解が促進し、乗除法についての意味の理解が促進すると考えられる。

そこで、本研究では、比例概念の中でも特に、均質性に着目した。整数の範囲内の乗除が修了する第4学年を対象に均質性の意識化を図ることを意図した授業について、検討をする事にした。

2　比例的推論の仕方とを均質性の仮定とのかかわり

ここでは、まず比例的推論を2つのタイプに分類する。次に、均質性と推論の仕方について検討する。

(1) 整数の範囲における比例的推論の2つのタイプ

本研究では、整数の範囲内における比例的推論の仕方を以下の2つタイプとして規定する。

1つめは、「一方の数量がn倍になれば、方の数量もn倍になる」という推論で、これを倍比例と呼ぶことにする。

2つめは、「一方の数量がm等分になれば他方の数量もm等分になる」という推論でこれを等分比例と呼ぶことにする。

用語「倍比例」は、「帰一法」と対なす「方法を表す」言葉として用いられる場合がある。しかし本研究では、それとは区別して、あくまで推論の仕方を表す言葉とし用いることにする。

例えば、以下のような問題を「帰一法」呼ばれる解決方法で解決したときでも、等分比例と倍比例という2つの推論が働くことを以下に示す。

[問題]　3こで240円のヨーグルトがあります。このヨーグルト12個の代金はいくらですか。

［解決と用いられる比例的推論］

①まず、ヨーグルト１個分の値段を求める３個で 240 円であることがわかっているので１個は３個の３等分。

ヨーグルトの個数が３等分になれば、代金３等分になるはず。(等分比例推論)

240 ÷ 3 ＝ 80

ヨーグルト１個の値段は８０円。

②次にヨーグルト 12 個分の値段を求める。

ヨーグルトの個数が 12 倍になれば、値段も 12 倍になるはず（倍比例推論）。

80 × 12 ＝ 960

ヨーグルト 12 この代金は、960 円

（２）比例的推論の２つタイプとの均質性の仮定の仕方とのかかわり

比例的推論が用いられる大前提は、２量比例していることである。しかし、たとえ比例していなくても、比例的推論を用いる場がある。それは、２量の間に比例関係を仮定している場合である。

ここでは、比例を仮定して推論する場合において、「仮定する内容」の違いに着目し、検討する。

具体的に次の問題場面で考えて見よう。

［問題場面］

オレンジを 30 個もらいました。

その中の３つを絞ってジュースにしたらそれぞれのオレンジから下のような量のジュースが絞れました。このことをもとにして、30 個のオレンジから全部で何ｍＬのジュースができるか予想しましょう。

オレンジ	１個目	２個目	３個目
絞れた量(mL)	60	80	70

ここでの解決は、割進みを学習する以前×小数学習以前の児童を想定する。

<解決方法と推論　その１>

データの示された３このオレンジから絞れるジュースの量を求める。

60 ＋ 80 ＋ 70 ＝ 210

30 ÷ 3 ＝ 10

オレンジの個数が 10 倍になれば、絞れるジュースの量も 10 倍になるはずだから（推論ａ：倍比例）

210 × 10 ＝ 2100

30 このオレンジからは 2100 ｍＬ絞れると予想する。

<解決方法と推論　その２>

データの示された３このオレンジから絞れるジュースの量を求める。

60 ＋ 80 ＋ 70 ＝ 210

オレンジの個数が３等分になれば、ジュースの量も３等分になるはずだから（推論ｂ：等分比例）

210 ÷ 3 ＝ 70

オレンジの個数が 30 倍になれば、絞れるジュースの量も 30 倍になるはずだから（推論ｃ：倍比例）

70 × 30 ＝ 2100

30 このオレンジからは 2100 ｍＬ絞れると予想する。

上に見られた３つの比例的推論をするときに仮定されたことについて検討しよう。

①推論ａ（倍比例）

搾っていないどのオレンジも、３つで 210mL ずつ絞れると仮定。

②推論ｂ（等分比例）

ジュースを絞った３つのオレンジから、仮に同じ量ずつ絞れたとすると仮定。

③推論ｃ（倍比例）

絞ったオレンジも、搾っていないオレンジも「どのオレンジからも１つから 70mL 絞れるとすると」と仮定。

倍比例の場合は、基本的には未測値に対して、ある値を仮定している。一方で等分比例の場合は、既にデータのある既測値に対して、「実際はそうではないのだけれど、仮にそうだとすると」のような仮定をしている。

この問題場面における仮定の仕方は、推論の仕方によって異なっていることがわかる。

３　研究の目的

本研究の目的は、均質性の仮定を意識化す

るための授業について検討することである。実験授業を構想・実践した上で、授業記録を分析、考察することを通して、上記の課題を検討し、学習指導への示唆を得たい。

4　実験授業の構想

（1）実験授業の構想

・第 4 学年を対象にして、１あたりを示さない問題で、倍比例による推論と等分比例による推論を顕在化させる。
・比例関係が場面に内在する問題と、比例関係を仮定して推論する問題を連続的に扱い、乗除が用いられる場面についての理解の進展を図るようにする。
・子どもたちが、何をどのように仮定して推論するかが、できるだけ見えるように配慮する。

（2）各時間の中心問題

＜第１時＞

［問題］ 3 mで 198 gのはり金があります。このはり金 27 mの重さは、何 gでしょう。

＜第２・3時＞

［問題］ 畑に 33 株のジャガイモが植えてあります。
1 株目を掘ったら、ジャガイモが 450 gとれました。２株目からは 600 g、３株目からは 490 g、４株目からは 460 gとれました。このことをもとに、33 株から収穫できるジャガイモの重さを予想しましょう。

（3）指導計画の工夫と各時間のねらい

●第１次（比例が内在する問題場面）

（2）に示した問題の通り、均質性が前提になった問題に取り組み、長さがｎ倍になれば、重さもｎ倍になることや長さがｍ等分になれば重さもｍ等分になることに気付かせる。このことに基づいて、かけたりわったりしていることしていることを明らかにする。

また、このような推論は、長さと重さの間に比例関係があること、子どもの言葉ではどの１ｍも同じ重さであること、太さが変わらないことが前提になっていることに気付かせる。

●第２次（比例を仮定する問題場面）

ジャガイモの株数と収穫できる重さに関する問題場面で、株数がｎ倍になれば収穫できる重さもｎ倍になること、株数がｎ等分になったら収穫できるジャガイモの重さもｍ等分になることに基づいて、かけたりわったりしていることを明らかにする。

この推論は「どのａ株からもジャガイモが同じ量ずつ収穫できる」と仮定していることに気付かせる。

（4）問題場面の工夫

第１時は「帰一法」でも「倍比例方略」でもどちらでも解決できるようにした。第２・３時は、「倍比例方略」を用いようとすると、３３÷４で必ず小数倍が出てくる。まだ整数の範囲の乗法しかやっていない４年生だからこそ、問題が顕在化する。つまり３３÷４＝８あまり１となり　１株からどれだけとれるかを考えることを迫られる。すると、等分比例の推論を用いなくてはならない。

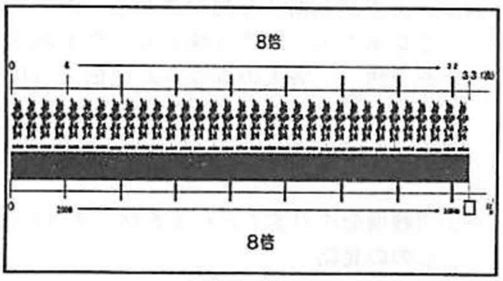
つまり、第２時の問題は、必ず等分比例と倍比例の両方の推論が顕在化し、そのときの仮定について吟味する機会が出てくる。

（5）数値設定の工夫

第２時に与えるデータの数をあえて奇数とすることで、中央値をとって処理しないように配慮した。また、データの個数が偶数だと最大値と最小値の真ん中の数（平均値）を考えてしまう児童がでることを避けるため与えるデータの個数は、２個にはしないことにした。

また４つのデータを与えると決めた後、４つのデータの最大値と最小値の真ん中（平均値）と与えた４つのデータ４つの平均値が一致しないように配慮した。子どもの考えを見取るためである。

（6）図の工夫



【図１】

【図１】のように、数直線と数直線の間にジャガイモの株と地面の中を模した図を挟み込み、2 つの測度空間を関連づけやすいように、またどんなユニットを想定しているのかを表現しやすいように配慮した。

5　実験授業の概要

（1）対象、日時、授業者

①　対象

国立大学附属小学校４年生　39 名

②　日時

＜第１時＞

平成２４年１１月１５日（1 単位時間）

＜第２・３時＞

平成２４年１１月１６日（2 単位時間）

③　授業者

TT　市川　啓・成澤結香里

（飛び込み授業）

（2）データ収集の方法と分析、考察の対象

授業を１台のビデオカメラで撮影した。第１時は、教室の後ろから固定カメラで撮影した。第２・３時については学級担任の協力のもと、基本は教室の後ろから固定で撮影したが適宜、発言者をアップにしたり、カメラをもって移動し、あるグループや特定の児童の学習の様子に焦点を当てて撮影したりもしている。

これをもとに授業記録を作成した。本稿では、この授業記録を分析・考察の対象とした。注 1）

（3）第１時の授業の概要

①問題を提示する。

「□ m で 198g のはり金があります。このはり金 27m の重さはなん g でしょうか。」という問題を提示し、□の中は何mだったらいいかを問うた。すると、「27 の倍数になっているmだったらいい。」や、「小さければいい。」という考えが出されたが、□には 3 を入れて、本時の問題とした。

②３mで198gのはり金は、27mでは重くなりそうか、軽くなりそうか、見通しをもつ。

3m の重さと長さだけがわかっている状況で、まずはじめに重くなりそうだという見通しを立て、その理由として、27 ÷ 3 ＝ 9 と計算することで、27m は 3m の 9 倍の大きさとなり、3m のときの重さより重くなるという考えが出された。ここで、長さが長くなれば、重さは重くなることと、重さを決める手がかりは長さにありそうだということを確認した。はかりを使わなくても、計算で 27m 分の重さが求められるという内容の発言があり、自力解決に入った。

③27m分の重さを求める式、198×9について検討する

児童の大半が 198 × 9 の式で答えを導いたものの、数名の児童が、198 に何をかければよいのかということを悩んでいた。9 がどのようにでてきたのかを問うと、はじめは式のみの説明であったが、次の児童が 27m の中に 3m がいくつあるのかを求めたと説明した。

④長さの測度空間と重さの測度空間を結びつける。

「3m が 9 こ」ということは、つまり「198g が 9 こ」あることと同じなのだということを、テープ図と数直線を用いて長さと重さを関係づけながら確認していった。

27 マスに区切ってあるテープ図を 3 マスずつまとめて行く操作をして、27m の中に 3m が 9 個あることを確認した。

「この 3m は？」と教師が問うことで「3m で 198g」、「どの 3m も 198g」だから長さも重さも同じように 9 倍するのだということを確認した。

⑤帰一法の解決について

ある児童が、帰一法での解決を発表し、倍比例の解決のときのように、テープ図と数直線を用いて長さが3等分になったら、重さも3等分になることを確認した。テープ図は、3m分ずつ区切られていたものを3等分して1mずつに区切って、「1mで66g」が27個あることを確認した。

⑥長さと重さがともなって変わらない場合とはどんな場合かを考える。

長さが9倍になったら、重さも本当に9倍になるのかを問うたところ、「計算上の問題だから」という反応が返ってきた。長さと重さが伴って変わるときは全く同じ針金が続くときで、途中で太くなったり細くなったりすると長さと重さを同じように倍にしたり、等分したりすることはできないということをまとめた。

6 分析と考察

研究の方法で示したとおり、第2・3時の授業プロトコルを分析と考察の対象とする。

なお、以下、授業記録に出てくる児童の名前はすべて仮名である。

（1）授業場面毎の分析と考察

①前時（実験授業第1時）のふり返り

前時に学んだことを問 うたところ、4名の 児童から以下のことが出された。

- 長さを○倍したら、重さも○倍になる。(C2003：駿、Tb2003) [注2]
- ずっと太さが同じだったらかけてもいいけど、太くなったり細くなったりしたら、かけたりできない。(C2004：ししと)
- 図で3mずつ区切っていって、3mは198だから、3mが9個あるから、わってかけて答えを求めることができる。(C2005：大陽)
- (前略) 太さが少しでも変わったら、っていうこと、太さが同じだったら、あの、こういう答えになるんだけどっていうことが、勉強になったって言うよりもおもしろかった (後略)。(C2006：ちか)

---

②問題場面を提示する

ジャガイモ掘りを想起させる。畑で育てているジャガイモが33株あり、今年の出来具合を予想し、隣人の斉藤さんに伝える状況であることを伝える。その際、ジャガイモの数直線[注2]を提示した。

③問題場面に対するとらえを話すあきひとと、しのの発話

- そのでかいやつを数えてそれとかければいい。(C2012：あきひと)
- すぐ終わる。(C2013：あきひと)
- ジャガイモの中のさあ、一株の量がわかればすぐ終わる (C2014：あきひと)
- もし、えっと、1株の量が同じだったら、一株の量がわかればわかる。(C2015：あきひと)
- 算数のあれだから、あきひとくんの言っていることは正しいと思うのだけど、実際は一個が7個とれても、隣が8個とか、9個だったりとか、この（聞き取れず不明）多いなとか、ばらばらだと思います。でも、収穫量を求めると言うんだったらだいたいだと思うから、いいと思います。
(C2016：しの)

---

④どの一株からとれる量を知りたいかを問う

- 子どもから、真ん中、左側の2つの意見が出たため、どちらがよいか挙手させた。その結果、真ん中：左端が約3：1の比率であった。そこで、「じゃあ、真ん中にしよう (Ta2012)」と発話したところ、「えー (C2019)」という複数の児童からの反応があった。

<分析と考察A>　「えー」には2つの可能性が考えられる。1つは、真ん中と左端では収穫量が同じではないと認識している可能性、2つめは、収穫量が同じでもジャガイモ数直線の左端の株の収穫量を知って、それをもとに33株全体の収穫量を予想したいと考えている可能性である。

- 併せて、とれる量は個数で表すのではなく、重さで表した方がよいことを確認する。

その際、1 株からとれるジャガイモの個数が同じでも、ジャガイモの大きさが違ったら、同じ個数だからといって同じ収穫量だと言ってよいかを問い（Ta2014、2015）、収穫量を重さで表すことを導いた。

⑤(ある)1株からとれるジャガイモの重さ（450 g)を提示し、33株の収穫量を考えさせる。

Ta2018：一株めは、450 g です。これわかったら、収穫量求められるんだよね？

C2026：だいたいだよ、だいたい。

＜分析と考察 B ＞

1 株をもとに求める収穫量は、あくまでだいたいだと思っている。つまり、すべての株から同じ重さのジャガイモがとれるとは考えていない。

⑥33株からとれるジャガイモの収穫量を予想する。

・式を問い（Ta2020)、450 × 33 が子どもからだされた（C2031：きらり)。おのおのが計算し、C2033 で計算結果が 14850 となることが発表された。そこで、「この畑からは何 g のジャガイモがとれるのか（Tb2014)」を問うた後、挙手により全員の回答が 14850 g であることを確認した（Tb2015、Tb2016)。

＜分析と考察 C ＞　この時点では、全員が 14850 g とれると考えている。つまり、すべての株から 450 株ずつジャガイモが収穫できると仮定することに躊躇している児童はいない。

⑦ ⑥を受け、「この畑からは、ぴったり 14850 g 取れると言ってよいのか（Ta2024）についての検討

C2035：だめ。

Ta2025：えー、だめなの？

Tb2017：だめなの？なんで？だってみんなさっき、同じですとかいいですとか言ってたじゃない。何グラムとれますかって聞いたとき、この式でよくて計算もみんな同じですって言ったよね。言ったよね？先生の質問に答えて。言ったよね？

C2036：はい。

Tb2018：わかりました。で、なんか言いたいことある人は？

Ta2026：けいしゅん君

C2037（けいしゅん）：ええと、あの、14850 グラムというのは、一株目が 450 グラムだったから、だいたいで考えているから、全部は 450 グラムってはi限らないから、だいたい、全部が 450 グラムじゃないかなって考えているから、答えとしてだすには、約 14850 グラムです。

C38：同じです。

C39（あきひと)：うん。そういうこと。あくまで計算上の問題です。

Tb2019：もうちょっと何人かで言ってほしいんだけど。

C40（ちか)：けいしゅん君も言ったように、私たちは、だいたいで、計算する前にも言ったと思うんだけど、だいたいで、だから、だいたいで 14850。だから、斉藤さんだかに教えちゃったら、それは、ぜったいだとは限らないし、とってるのはあるんだけど、それに、一株一株同じ重さだとは限らないから、個数も変わると思うから、だいたいだと思う。斉藤さんにこたえちゃだめ。

＜分析と考察 D ＞

450 g は一株の量であって、すべてが 450g とは限らないことを意識して 450 × 33 をしている。

---

⑧ だいたい450gとは、どれくらいの重さの範囲を想定しているのかを問う（Ta2027)。

・あきひと　452g とか、453g とか。

・しの　４４５～４５４の間（10 の位までの概数)

＜分析と考察 E ＞

だいたい 450 g とは、450g からあまり離れないデータのことだと思っている。

⑨次の1株の収穫量(600g)を提示し、予想の仕方を考える。

・600 × 33 = 19800 で求めた値が、450 × 33 = 14850 と大きく違うという子どもの反応を受け、重さの違いを問い（Tb2033)、5000 g、正しく計算すれば 5050 g の違いがあることに気づかせた。

⑩ ジャガイモの重さを量り、⑨で求めた差の分のジャガイモの個数がかなり多いことを感じさせる。

⑪ さらに2株分の重さのデータを提示する。

Tb2046：ずいぶん予想がみんなが言ったように、違っちゃうよね。斉藤さんに、こうですよ（19800g）って言うのと、こうですよ（14850g）っていうのではちがうよね？どっちを言おうか迷わない？

C2063：間をとる。

このやりとりの後、間をとって実際に予想させることはせず、さらに2株分の重さのデータがあることを伝え、それを提示した。

＜分析と考察 F ＞

⑨で求めた2つの予想についてどちらを採用すればよいかの問いに対し、間をとるという考えが出された。

間をとって考えるということはすなわち、「(ⅰ) 2株両方のデータに基づいて予想をしようとしている。

(ⅱ) 実際のデータとは異なる仮想的な値を設定し、それを用いて予想しようとしている。」ことである。

⑫中心問題を設定する

4つの記録をうまく使って、ジャガイモがどれだけとれるか考えてみましょう。

⑬自力解決
（近くの友達と相談を含む）

⑭解決の発表と検討 （わかなの解決）

C2081（わかな）：450+600+490+460 ＝ 2000
33 ÷ 4 ＝ 8 あまり 1
2000 × 8 ＝ 16000
16000+500 ＝ 16500
500 っていうのは、1株目と2株目と3株目と4株目の平均

C2082：同じです。

Ta2039：同じになったよって言う人？（挙手を求める）

Ta2040：最初から、もう一回。この考えを最初から見ていきましょう。最初なにしたんだっけ？

C2083：4株の合計を

C2084（あきひと）：4株の合計を、

Ta2041：その次は？ 33 ÷ 4 説明できる人？（挙手を求める）

C2085（けいしゅん）：33 ÷ 4 をしないと、2000 を何でかけるかわからない。33 ÷ 4 は、4 株ずつがいくつあるか。それをすることで、（音声不明）の 1 がでますよね？で、その数を、2000 × 8 の 8 のところでつかって、で、たす 500 のところありますよね？そこの、500 のところが、あの、1 株分の数ってするんだから、そこの 1 株分の（音声不明）が約 500 っていうこと。で、だから、33 ÷ 4 は、（音声不明）

Ta2042：で、33 ÷ 4 ってなにしたことなんだっけ？

C2086（けいしゅん）：4 株ずつ、これが、4 株を、な（音声不明）んだから、その 4 株がいくつあるか。

Ta2043：33 株の中に、4 株はいくつあるかなって。8 っていうのは？そうすると？なにが 8 ？

C2087：4 株

Ta2044：あまり 1 は？

C2088 あまった 1 株

Ta2045：次に、2000 × 8 は、16000。2000 × 8 は、何が何個？

C2089：2000 が 8 個

Ta2046：2000 の単位は？

C2090：グラム

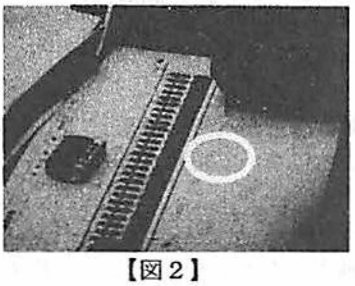
C2091：2000 グラムが 8 個
Ta2047：そうすると？ 16000 ？
C2092：グラム
Ta2048：2000 グラムっていうのは、なんだっけ。
C2093：４株分の重さ
Ta2049：それが、8 個。それをこの図にかいてみたいと思うんだけど、できそうな人いますか？だいやくん、書いてたよね？前にきてどうぞ。
C2094（だいあ）：（４株ずつ○で囲む。）
Ta2050：囲んでくれました。そうすると？
C2095：１、２、３、４、５、６、７、８、９

＜分析と考察 G＞

わかなは、倍比例の推論を用いて、32 株分の重さを求めた。その際、（４株、2000 g）ユニットでノルム化ができていた。33 株からとれるジャガイモの重さを求めるために、（４株、2000g）から、新たな下位ユニット（１株、500 g）を形成した。ただしその作り出し方は、具体的には語られなかった。

また、わかなの解決を全体で検討するにあたり、黒板上のジャガイモ数直線で解決の仕方を解釈する活動を促した（Ta2049）。すると、株の部分を４つずつまとめて○で囲んだ。（C2094）。続けて C2095 が、そのかたまりの数をかぞえた。この活動を通して、32 ÷ 4 =8 の式の意味と図の操作を関連づけた。

⑮ ⑭の活動をもとに、個人に配布したジャガイモ数直線に書き込みをさせる。それを、黒板の図を用いて全体で確認する。



【図２】

＜分析と考察 H＞

４株ずつ○で囲んで、株数を表す数直線に４株ずつの目盛りをつけ、その目盛りに対応させて、下のジャガイモの重さを表す数直線に 2000、4000、6000、8000、10000、12000、14000、16000 という目盛りをつけた。この結果から、最初の４株も、次の 4 株も、その先の４株もすべての４株から 2000 g とれるということを意識しているかどうかは別として、仮定したことがわかる。

⑯ どの4株からも2000 g とれるとしてよいか検討する。

Ta2078：（前略）いちばん端のこれ、4 株分とったやつは、わかったんだよね。じゃあ、これは？（4 株のすぐ隣の 4 株）
Tb2068：次の４株
C2116（あきひと）：いや、わかんない。
Tb2069：わかんない。たしかに。まだ抜いてないし。そうだね。まだ抜いてないからわかんないよね。抜いてないから、もうできない？もうちょっとがんばれる？
C2117：約にすれば、約なら、（音声不明）
C2118（あきひと）：約ならねえ。
Tb2070：多分とか約とか。
C2119（あきひと）：このまま計算していくと、全部約 500 っていう計算になる。
Tb2071：ちょっとまって。いま 4 株の話してるんだよ。4 株で、1 株目 2 株目 3 株目 4 株目って全部足すと 2000 だから、ここまでの 4 株は 2000 で正しい？正しくない？
C2120：正しい。
Tb2072：ここまでは正しいんだよね？でももうその先はわかんないんだよね？わかんないけどみんなは、なんとなくこの先までがんばってこの先までやったんだよね？じゃあ、次の 4 株は、こう考えていくとすると、何グラムとれるって考えるといいのかな？
C2121：2000
Tb2073：2000 で考えるのがいいの？次のここは？
C2122：2000
（これを 8 回繰り返す）

＜分析と考察Ｉ＞

データの示されていない４株分からとれるジャガイモの重さを尋ねられると（Ta2078）、あきひと（C2116）は、わからないと答える。しかし、この時間の最後に書いた学習感想を見ると、C2081（わかな）の以下の解決に最初は賛成だったと記述している。

450+600+490+460 ＝ 2000
33 ÷ 4 ＝ 8 あまり 1
2000 × 8 ＝ 16000
16000+500 ＝ 16500

つまり、データのないどの４株も、2000 g 収穫できるとして解決していることに、特段の疑問を頂いていなかった。だとすれば、わかなの解決の手続きだけをなぞった検討では、「データのない４株も、データのある４株と同じだけ収穫できると考える」ということを意識できなかったであろう。つまり、比例を仮定して乗法を用いたことを意識させることはできなかった。

本実験授業では、C2116（あきひと）「いや、わかんない。」において、初めて「本当は同じとは限らない」ということが意識化された。このことから、教師の「（前略）いちばん端のこれ、４株分とったやつは、わかったんだよね。じゃあ、これは？（４株のすぐ隣の４株）」（Ta2078）の問いが、「本当は同じとは限らない」ということを意識化する手がかりになっていたことがわかる。

筆者らは、ここで比例を仮定していること、すなわち「データのない４株からも、2000 g のジャガイモが同じに収穫できるとすると…」というように比例を仮定していることを意識化させたかったが、実際の授業からそのように仮定する見方が自然にできるわけはないことがわかった。具体的には、Tb2069 ～ C2118 のように、未知の不安定さを「約」という言葉で解消していた。

⑰　最後の一株から何g収穫できるか考える。

Tb2074：って考えていくと良さそうだったよね。2000 × 8 っていうのがこの 16000g なんだよね。ここまでいい？そしたら、ここまっでやって、ちかさんが「んー」って言ってたんだ。ちょっと「んー」って言ってたこと教えてくれる？

C2123（ちか）：１株目と２株目と３株目と４株目はわかってるじゃないですか。だから、そのどれかをあてはめればどれかは当たってるんじゃないかと思ったから、どれがいいかなと思って。だからそれで悩んだ。

Tb2075：ちかさんが悩んでることわかった？

C2124（ちか）：あの、この、ここってまず、まだほってないからわからないですよね？　だけど、この、わかる、１株目と２株目と３株目と４株目のどれかをあてはめちゃえば、あてはめて、考えれば、いいんじゃないかなあと私は思ったから、それを選んでたから（音声不明）

C2125：っていうことは勘なんですか？

C2126（ちか）：多分そのどれかにあてはまるだろうと。

Tb2076：どれを選ぼうか迷ってたんだよね。どれ選べばいいのかなあって。わかなさんは 500 っていったんだよね？

＜分析と考察Ｊ＞

ちかは、32 株までは、2000 × 8 ＝ 16000 として求めていたが、33 株目から何 g とれるか考えるにあたり、収穫量が既知の４株の中から、どれか１株を選んでそれにあてようとしていた。つまりちかは、（４株、2000 g）というユニットを、（１株、500 g）× 4 で構成されていると見ることはできていないことがわかる。また、データがないどの４株からも 2000 g ずつとれるとは考えることはできたが、どの１株も同じ重さ（500g）ずつ収穫できるとまでは仮定できていない。

⑱最後の一株からとれるイモの重さを、500g と考えることについて議論する

Tb2078：１株どうしたらいいかなー。最後の一株どう考えればいいの？

C2128（ゆみ）：ふたつ考えがあって、まず１株目と２株目を（音声不明）て、１株

目と 3 株目と 4 株目ってだいたい 500 グラムじゃないですか。それで 500 って考えるのと、ちょっと前にでるんですけど、4 つの株で 2000 じゃないですか。だから、2000 ÷ 4 をしたら、一つが何グラムかっていうのが求められてそれが 500 になるじゃないですか。そこで 500 って考えました。

Ta2079：同じように考えたよっていう人？

C2129（りょうこ）：わかなさんと同じで、まず 450+600+490+460 ＝ 2000 になりましたよね？ 4 株抜いたから、2000 ÷ 4 をして 500 グラムですよね？ 500 × 33 で 16500。2000 ÷ 4 をして、一つの一株を全部同じ数になるようにわって、500 です。

C2130：質問です

Tb2079：大陽君

C2131（大陽）：最後の一株が 500 グラムっていうのはわからないから、それを 500 g っていう風にはできないと思うんですけど、

Ta2080：大陽くんの質問は、最後の一株から何グラムとれるかわからないのに、500 ってしていいの？ってこと？

C2132（大陽）：んっと、2000 ÷ 4 ＝ 500 っていうのはわかるんですけど、最後の一株が 500 かはわからないから、

Ta2081：ここまで（2000 ÷ 4）は納得できるの？

C2133（大陽）：ここは、納得できるんですけど、

C2134（りょうこ）：いいですか？大陽くんのことについて、この紙に書いた時って、見えますか？ 2000、4000 とかやってるじゃないですか。それは納得したんですよね？それで。

C2135（大陽）：（うん）

C2136（りょうこ）：それなら、2000 のときは一株が 500 で、4000 のときも一株が 500 ということだから、最後の残りも 500 だと思うんですけど、

C2137（大陽）：わかりました。

C2138（ひかり）：りょうこさん、ゆみさんとかにも質問なんですけど、ゆみさんの一つ目の考えのだいたい一株から 500 っていってましたよね？その 500 をどうやって（音声不明）二つ目の考えは 2000 ÷ 4 だったんだけど、一つ目の考えだと、4 つの株をみてだいたい 500 グラムって言ってるから、そこをどうやって求めたか教えてください。

C2139（ゆみ）：たとえば、3 株目って 490 グラムじゃないですか。それを 500 と考えると 400 って考えると、・・・、490 はどっちかって言ったら 500 だから、って計算して、460 も 500 で、

C2140（ひかり）：でも 600 グラムだと、100 グラムの違いがでるから

C2141（ゆみ）：そこは（音声不明）

C2142（あきひと）：かわりになら説明できる。

次に、倍比例と等分比例の推論に基づいて 32 株分の重さや 1 株分の重さを求める方法に焦点を当てて、検討した。

Ta2082：一回座ろう。いまさあ、いままでてきた考えをもっかい。これ、4 株は、8 倍で、何株？

C2143：32 株

Ta2083：2000 グラムは、8 倍で？

C2144：16000

Ta2084：16000 グラムって、何の重さ？

C2145：ジャガイモ

Ta2085：何株分？

C2146：32 株分

Ta2086：4 株の 8 倍が 32 株で、2000g が 8 倍で 32 株分の重さ。こっちね。(2000 ÷ 4 の方）2000 グラムで、何株分なんだっけ？

C2147：4 株分

Ta2087：4 株分の重さを、÷ 4 してるのは？

C2148：一つの重さ（音声不明）

C2149（あきひと）：一つの株が約どれくらいかを求めるため。

Ta2088：そう。4 株を、4 つに、わけて、4 株を 4 つに分けると？

C2150：1 株

Ta2089：4 株ぶんの 2000 を 4 つにわけると？

C2151：500 で、一株は 500 グラム

＜分析と考察 K＞

500g とみるための方法が、児童から 3 つ出された。一つ目は、1 株目と 3 株目と 4 株目のデータの分布を見て、500g の周辺にデータが集中していることから、だいたい 500g とみるとしようと考える方法。二つ目は、「2000 ÷ 4 をしたら 1 株分は何 g かを求められるから（4 株で 2000 g なら 1 株は 2000 ÷ 4）、それで 1 株分の重さを求める方法。三つ目は、2000 ÷ 4 をして、一つの 1 株を全部同じになるようにわって（等分して均質化することを意識したと思われる）、500g という考えである。

それに対して、大陽が C2131、C2132、C2133 のような発言をしており、一貫して最後の一株の重さはわからないのに、わり算を用いて導いた仮想の値を答えとしてよいか疑問を持っていた。それに対して、C2134、C2136 で、大陽はどの 4 株も 2000g とれると認めることは、どの 1 株も 500g とれると認めていることと同じではないかとりょうこから指摘された。自分がどの 4 株も 2000 g とれると考えていたことをふり返り、りょうこの指摘に対し、1 株から 500g とれることを認めざるを得ないと判断した。そして「わかりました」とだけ発話し着席した。

りょうこの発話からは、すべての 4 株から 2000 g とれることを仮定することと、すべての 1 株から 500 g とれると仮定することが全く同じことであると、認識していることが明らかとなった。

⑲前時の学習と結びつけて仮定を意識する。

Ta2090：なんか昨日と似てないか？

C2152：あ！あぁ！あ！（多数の児童から同じ反応）

C2153（あきひと）：昨日どんな風にやったっけ？

Ta2091：見てみよう。

C2154（しげあま）：前は、m と g だったけど、今日は株と g だ。（音声不明）変わっただけだから、何 m と何 g でしょ？何 g と何株だから。

Ta2092：これって、かたおかくん言ってくれたことあったよね？気付くかな？

Ta2093：昨日は針金だったら、

C2155（かたおか）：昨日は針金だったら、いつも同じ太さだったら、例えば、（音声不明）と、一株の、

Ta2094：昨日だったら、針金だったら、いつも同じ太さだったら、長さが 9 倍だったら、重さも 9 倍だったよね？（C：あー）それができない時って、どんなときだっけ？言ってくれる人？（挙手を求める）

C2156（駿）：長さが違うとき。（音声不明）太さが違うとき

Ta2095：太さが変わってしまうときできないって。（あきひと：これだって重さが変わったら（音声不明））最初の 3 m が 198 グラムでも、次の 3 m が 198 グラムとは限らないときは、長さが 9 倍なら重さも 9 倍ってできないって昨日やったんだったよね？

Ta2096：んじゃあ、昨日の針金で、太さが違うっていうことって、今日のジャガイモで言うと（音声不明）

C2157：重さ！

Ta2097：重さが？

C2158：重さがちがう。

Ta2098：最初の 4 株が 2000 グラムだけど、次の 4 株は？

C2159：違うかもしれない。

Ta2099：違うかもしれない。

Tb2081：違うかもしれないんだよね。（「かも」を強調）

Ta2100：っていうときは、何倍なら、株が何倍なら、重さが何倍ってできる？ちがうとき。

＜分析と考察 L＞

Ta2094 から C2160 のやりとりは、均質性があることが比例するときの条件になっていることが、教師の問い（Ta2096、Ta2098）により前時の学習と結びつけられ、児童の発話となって現れている。

また、この場面では、最初の 4 株が 2000g

だとしても、次の4株が2000gではないかもしれないことが子どもによって語られ（C2159）たことをもって、比例的推論をする前に、均質性を仮定することの必要性が子どもに理解されたととらえる。

⑳均質化を仮定することで、乗法や除法が使えることに気づかせるために、均質でない場合を提示する。

C2160（あきひと）：できないけどこれは計算としてだいたい（音声不明）
Ta2101：もし、重さが違うときどうする？
C2161（あきひと）：約（音声不明）を求めて（音声不明）
Ta2102：重さが違ったらまずここ（次の4株）わかんなきゃいけないよね？わかんなきゃ　いけなくて、もし、次の4株もその次の4株も重さがわかったらみんなどうする？
C2162（あきひと）：それだけちがう重さを加算してあとは、また約の2000をたしていって、おそらく10000の（音声不明）
Ta2103：たとえば、最初は2000グラムでも、次は2000gじゃない場合、ときっていうのは、例えば2100グラム、次は2200グラムって全部分でてたら、33株分を求めるときは、全部足すよね。
C2163：うん。
Ta2104：でも今日は、それがわかってないんだよね？最初の4株しかわかんないっていうことなんだよね。いま全部わかんないから、じゃあ求められないかって言ったら、どう？
C2164：もとめられる。
C2165：約
Ta2105：具体的には？
C2166：約
C2167：平均
C2168：だいたい
Ta2106：このとき、だいたいどのくらいとれるって考えたの？
Ta2107：本当は、違うかもしれないんだよね？でも今は、違うかもしれないんだけど、どの4株もとか、どの1株も…
C2169（ゆみ）：どの4株も2000グラムだから、（音声不明）
Ta2108：今は、どの4株も　2000グラムずつとれるって考えたからできたんだよね？　じゃあこっちは？いまゆみさんがいってくれたみたいな言い方で言えないかな？
Ta2109：どの、一株も、
C2170：500
Ta2110：500グラムずつとれたって考えると、こうやってできたんだよね？まとめたらこういうことだよって言えそうな人？まだまとまらないかな？

<分析と考察M>

仮定を顕在化させるために、4株ごとの重さが違う場合、全体の重さを求めるにはどうするかを問うた。それに対し、子どもから、それぞれのデータを加算していくという方法がだされた。つまりこれにより、均質でないときは、乗法を用いることができないことが顕在化した。

ある4株分の収穫量が2000gということしかわかっていないときに、2000×8＝16000のように乗法を用いて得られた32株分の収穫量は、『他の4株分もすべて2000g収穫できるとすると』と仮定して求めた値であることを意識させることが筆者らの大きなねらいであった。

子どもたちは、実際はどの4株も2000gではないとは思いつつ、何とか求めるなら、4株は2000gで、その8倍が32株分で、求められた16000gを、本当はわからないから求められないけど、そうすればなんとか求められて、だけどその値は正確ではないという自覚があるため、「約」や「だいたい」という言葉で、表現したと思われる。

教師は、何度も「どの○株も□gとれるって考える」（Ta2107、Ta2109、Ta2110）と表現しているが、子どもはC2169「どの4株も2000gだから、」のように断言したり（どの1株も）「500」（C2170）のように言い切りで、「～と考える」とか「～とすると」という表現を用いようとはしなかった。

この4株も2000g、この4株も2000gの

ようにどの4株も2000 gで「同じ」という事と同時に、「どの 4 株も同じとすると 」のように「仮定している」ということを、「同じ」とは別に教えなければいけないであろうことも明らかになった。

㉑わること（等分除）の意味と仮定していることのつながりを考える

Tb2082：予想するときのコツが知りたいんだよね。どうやって考えるとうまく予想できるのかな？とれば、正確なのはわかるよね？でも、掘らないで今知りたいわけだよね。算数をつかって。なんとか。そういうときに、どんな風に考えれば、予想として、でたらめなのじゃだめじゃん。ここは 2000 で、次は 5000 とか。じゃなくて、なるべく予想としてみんなが聞いたときにそうだなーと思うようにするには、どんなことに気をつけて予想すればいいの？

Tb2083：ここが 2000 だとしたら、ここも？

C2171：2000

Tb2084：ここも？（音声不明）

C2172：2000、2000、（音声不明）

Tb2085：と考えれば、予想できる。でもその一株が困っちゃった。困っちゃった時にはどうするの？

C2173：2000 ÷ 4

Tb2086：どうして4でわったの？

C2174（こうき）：4株ずつまとめてるから、4株あわせて2000だから、4株ずつで、（音声不明）4を 4 でわったら1ですよね。だから、一株残ったやつを、その、いままでまとめてきたやつを 4 でわれば、（音声不明）ます。

Tb2087：4 株を 4 でわったら、なにがでるんだ？4株÷4

C2175：1株

Tb2088：4株を4でわったら1株だから、2000グラムを4でわると？

C2176：500

Tb2089：500グラムって何表してんの？

C2177：一株

Tb2090：一株の何？

C2178：一株の重さ

Tb2091：一株の重さ？だよね。ところでさあ、4 でわるっていうのは、どんな風に分けること？わる 4。どんな分け方を表してる？どんな風にわけること？ 2000を？4つに？

C2179：わける。

Tb2092：4つに分けるって言うとき、いろんな分け方があるよね。500、500、500、500、っていうわけかたもあるけど、100、100、100、1700っていう分け方も。÷ 4 のときはどんな分け方？

C2180（あきひと）：全部が均等になるように。

Tb2093：等しくなるように分けるんだよね。じゃあ、全部が同じだとして、本当は全部違うんだけれども、同じだとすれば、一株から？何gとれるの？

C2181：500

Tb2094：だとすると、最後の一株ぶんは、何グラムを足すのいちばんがいいのかな？予想としては。500 を足すのが一番いい？みんながやろうとしてたことはこういうことかな？

（4株・2000 gの幅で区切りを入れた黄色いテープの図をジャガイモ数直線に重ねて貼る。）

Tb2095：これ、いものとれる重さとみてください。最初の4株で2000gとれました。これは事実。だけど次はもうわかんないから、つぎの4株も2000グラムとれるとして考えたつぎまた 2000g とれるとして考えた。2000、2000、2000、とれるとして考えた。最後の一株どうしようかなって考えるとき、4株で合計2000 だったら、一株では、本当はばらばらなんだけど、同じとしたら、500とれるって考えて、最後500を足して、そしたらこの予想はどうかな？齋藤さんに教えるには。

C2182：いいと思う。

Tb2096：なるほどね。

＜分析と考察N＞

なぜ 4 でわるのか（Tb2086）という教師の理由を問う問いかけに対し、こうき（C2174）

は、（４株、2000 g）という基準に対し、等分比例の推論を働かせて、500 gと結論づけている。そのときに語られた言葉は、「４株ずつまとめてるから、4株あわせて2000だから、（中略）４株を４でわったら１ですよね。だから、（中略）いままでまとめてきたやつを４でわれば、（音声不明）ます。」である。ここで着目したいことは、等分比例の推論をするにあたって、「等分」という言葉は語られず、株数の測度空間を「わる４」すれば、収穫できる重さの空間も「わる４」するという理由である。

教師の（Tb2091）わり算の意味（４でわる時の分け方）を問う問いによって、C2180（あきひと）の「全部が均等になるように。」の言葉を引き出している。そののち、Tb2093で「等しくなるように分けるんだよね。じゃあ、本当は全部違うのだけれど、同じだとすれば（後略）」ということで、この場面でわっていることの意味が、均質性を仮定していることだと気づかせるように意図している。

つまり等分比例の推論において、2つの測度空間を「同じ数でわる」という理解にとどまっていると、「等分」が意識されず、それ故に「本当は同じでないけれど、同じにしたとすると」というような均質性を仮定していることの意識化に至らないことが危惧される。

㉒かたおかの解決について検討する

かたおかは、残りの一株を最初の一株と入れ替えれば残りの一株の重さが決まると主張し、16000＋450とし、16450gと結論づけた。この解決について、ひなと（C2190）は、32株までは「4株で2000gとれる」ということをつかって導いているのに、最後の一株だけ450gと決めたら、それまで前提としていた「4株で2000g」に矛盾するのではないかと指摘した。

<分析と考察O>

かたおか（C2183）は、データの一つを持ってきてそれを最後の一株の重さとすればよいと主張したが、それにたいしてひなと（C2190）は、少なくとも4つ合わせて2000になるような重さを最後の一株に当てるべきだという意味の主張をした。

㉓ししとの解決を検討する。

ししとは、450×8＝3680、600×8＝4800、490×8＝3920、460×8＝3680とし、４つのデータが33株の中に同じ数ずつ存在するように割り振ると一つの重さにつき8株ずつあると考えればよい。結局最後の1株が問題になる。最後の1株は、みんなが言うように500gとした。それぞれの株の並べ方を変えれば、わかなの解決と全く同じであることに気付かせた。

7　結語

本研究の目的は、均質性の仮定を意識化するための授業について検討することであった。実験授業の分析と考察から得られた主な知見を整理しておこう。

- ○比例が内在する場面での倍比例・等分比例の推論を扱い、そこで乗除法を用いてよい前提に気付かせ、これを手がかりにして比例を仮定しているということを意識させることを意図した展開に繋げることができた。
- ○４株分それぞれから収穫できる量がわかっていて３３株分からとれる収穫量を求める問題設定により、最後の１株からどれだけ収穫できるとすればよいかということが子どもたちにとって問題となること。
- ○この問題設定による実践から、子どもたちが、何をどこまで同じと見ているか、すなわち仮定しているかに違いがあることが明らかとなった。
- ○未知のデータについて同じとするとと仮定する倍比例推論は、比較的抵抗なくできる。
- ○既知のデータがあった上で同じとするとと仮定する等分比例の推論は子どもにとって困難であること。
- ○上記のことを改善するための指導への示唆として、等分比例が、２つの測度空間における対応する量同士を同じ数でわるという理解にとどめず、同じに等分することまで意識させることが大切であること。
- ○調査に協力してくれた、第４学年の子どもは「～だとすれば○○になる」というように、仮定をおいて、数学的に導いた結論を

そのまま表現しようとせず、「約」「だいたい」という言葉を用いて現実とは違う仮定から導かれた結論を表現しようとする傾向があった。

本実践に関し、ワークシートや、授業後の表か問題、インタビュー調査等をデータとして、さらに児童の思考の様相について詳細な検討を行うことについては、今後の課題としたい。

［付記］本研究は、以下によって支援されている。

平成24年度科学研究費補助金（基盤研究(C)）「小学校算数科・中学校数学における乗法概念領域の教授・学習に関する臨床的研究」

平成24年度科学研究費補助金（基盤研究(C)）「小学校算数科と中学校数学の接続を意図した比例概念の形成に関する実証的研究」

［謝辞］本研究の実践・データ収集に際し、多大なるご協力を頂いた山形大学附属小学校奈良崎芳晴先生に、心より感謝申し上げます。

註

註1）実験授業に関わって、これ以外に子どもたちのワークシートを回収し、事後の調査問題を行い、インタビュー調査もしている。ただし、これらのデータについては本論文では、分析・考察の対象とはしていない。

註2）駿は「0倍」と発話したが、教師は、これは「○倍（まるばい）」を読み違えたと解釈し、「なんとか倍」と言い直した。

＜引用・参考文献＞

市川啓．(2009)．比例的推論に関する考察：第4学年における「1あたり量を示さない問題」を通して．第42回数学教育論文発表会論文集，295-300

Lamon,S. (1994). Ratio and proportion:Cognitive Foundations in Unitizing and Norming.G.harel&Confrey(Eds.),*The developing of MULTIPLICATIVE REASONING in the learning of mathematics,Albany,NY:State University of York Press*(pp.89-120).

中村光一．(2011)．整数の乗法，除法の問題場面での4年生の子どもの比例的推論の実態．日本数学教育学会誌，第93巻，第6号，2-10

布川和彦．(2006)．比例的推論の授業における小学校4年生の学習の様相．上越数学教育研究，第21号，上越教育大学数学教室，1-12

布川和彦．(2009)．比例的推論を利用した割合単元の構想と児童の学習過程．上越数学教育研究，第24号，上越教育大学数学教室，1-12

清野辰彦．(2004)．「仮定の意識化」を重視した数学的モデルの授業－「1次関数とみる」見方に焦点をあてて－．日本数学教育学会誌，第86巻，第1号，11-21

高橋久誠．(2000)．小数の乗法の授業構成に関する考察－比例の考えをもとにして－．上越数学教育研究，第15号，上越教育大学数学教室，85-94

田端輝彦．(2007)．整数の乗法における比例関係の顕在化に関する一考察－割合(比)の三用法の類型と1あたり量を示さない問題の分析を中心として－．第40回数学教育論文発表会論文集，325-330

Vergnaud,G.(1997).The nature of mathematical coccepts.In T. Nunes & P.Bryant(Eds.) ,Learning and teaching mathematics: An international perspective(pp.5-28).East Sussex, UK : Psychology press.

全国学力学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～小学校編．文部科学省国立教育政策研究所教育課程研究センター．(2012)

A Study on the lesson which aims at the awareness of homogeneity

ICHIKAWA Hiraku
Yamagata University Faculty of Education, Art and Science
NARISAWA Yukari
Yamagata University Faculty of Education, Art and Science student

ABSTRACT

The purpose of this study is to examine the experiment lesson which aims this purpose and practice the lesson in Fourth grader. We analyzed and considered it from a lesson record and got the following knowledge.

① Problem situation is effective in awaring of homogeneity.

② It's easy to reason that multiplicative proportion supposed recognize as the same.

③ It's difficult to reason that divide equally proportion supposed recognized as the same.

④ In the reasoning of divide equally proportion, it's important to aware of deviding equally.

＜資料＞　第２時板書