東北数学教育学会　年報第44号　2013年3月31日

「原論」第XⅢ巻命題10の直角三角形をめぐって；正五角形、トレミーの作図法、再論と補遺

板垣 芳雄
（宮城教育大学名誉教授）

はじめに

定年前の生業を引きずるような仕事からは、たとえ元気でいても、10年過ぎたら引退をと心に決めながら、その準備の年になるはずの年の3月に大震災があって、私的な心掛けなど、どこか遠い土地のことになり、日常に当たり前であったことを求める日々のなかで、昨年も一昨年も在ったことの有難みを噛みしめ、今年も例年のように在るようにと願う気持になったことで、前年に、山形県村山市での東北地区和算研究交流会で発表した論説にある正五角形の作図法を丁寧に、数学としてではなく、授業で教える形式をとって解説してみようと考えたのでした。

考えることに向わせた要因には、不満足の気持が論説を発表した当方に残っていた、ということもあったでしょう。まだ気付いていない作図方法があるだろうし、方法の網羅、分類、さらには優劣比較のことも気になります。

和算研究交流会では、わたしの大学の先生が、高校時代の先生が、また、現役でした。論説の発表は、資料を頂きながらずっと無音に過ぎていた先生への挨拶になるかもしれない、発表は、和算の調査・研究へ、また、90歳を目前とする先生方への、数学教育研究に従事していた者からの応援メッセージになるのではないか。

「私的メモ」と記してこの学会の研究会の口頭発表用に準備した配布資料にそういう願いの痕跡が残っています。震災時の私情も綴ってあります。

授業で教える形式をとって解説してみたのが「正五角形の作図法を授業案にする」（前篇19ページ）（後篇33ページ）となりました。授業は、ユークリッドの「原論」の命題を演習時に読みながら進められます。定年後も私学・工学部の非常勤の講義は続けて「原論」を開くことなどなくていたのですが、和算にはない演繹思考、「原論」の体系という点から、「原論」から流れる西洋の幾何・数学の教育、数学研究の歴史は、日本は共有していない、わが国にはなかった、そこを、しっかり弁えておくことが、近代日本の学校教育の数学を考える基盤とすべきであるという思いが湧き出て、西洋にあって、日本になかった歴史の厚みを計るように、他人に授ける形で自分の業としての学びをつづりました。そのことから、教育内容が和算研究から学ぶことを逆に教えられます。そして、「授業案」と別立てで

つづったのは、題して「和算家による正五角形の作図から学んだこと、ユークリッド「原論」に照らして考えたこと」、そのなかに、一年延びになったけど、引退、隠居を自分に向けて宣言しておきました。

前回の研究会（平成２３年１２月３日、弘前市）の発表では、この「学んだこと、考えたこと」を発表原稿として、「原論」第１巻の命題について話しました。

隠居の心でいても、電気もガスもある町に住んでいますから、手紙もメールも来ます。

書いて発表すれば反響の木霊があります。「学んだこと、考えたこと」は昨年の福島市飯坂町での和算研究交流会で資料にしたので、会には欠席された先生方に送ったら、間もなく、丁寧なお便りを頂きました。老先生から再度お聞きしながら、「和算研究」の現物は見ることなくていたのを、和算研究家からのメール添付のコピーで読むこともできました。発表原稿を読み直し、年報４３号（２０１２）に投稿するときに、§５の追記として書き足すことができました。

前回の研究会で話したのは、「授業案」の第４回目に記録したことです。今回は、「授業案」の第５回目の内容をお話します。いずれも、わたしにとっての“発見”でした。「授業案にする」を書きつづったことがそこへと導いてくれました。

キーワード：ユークリッドの「原論」、正五角形の作図、大西洋の術、正二十面体の作図、円周角の定理、三角比の公式、発見学習

註）本稿は、東北数学教育学会・第１７回初夏研究会（平成２４年５月２６日、福島市飯坂町）における口頭発表用に作り、出席者に配布した原稿の原型を保持している。

§１．正五角形の作図法を授業案にする

正五角形の作図法に、トレミーの方法というのがあります。福島市の初夏研究会の口頭発表で話しました（２０１０．１２）。そのときの発表資料が、年報４２号（２０１１）に載っており、トレミーの作図法、及び、和算家による３つの作図法を「原論」の命題と結び付けて説明してあります。その後、これら、正五角形の作図法を授業するプログラムを作り、５回の講義・演習の案にしました。それを作りながら新たに気付いたことや、授業を思考実験する過程であらためて考えさせられたこともあり、「授業案にする」は、実際に授業をしたかのように、わたしの「セリフ」入りで書きました。仮想の授業（講義・演習）の「セリフ」です。

その１～３回の講義・演習（前篇）については、山形市の研究会（２０１１．５）で発表しました。続く４，５回の講義・演習（後篇）のうち、４回目では、学習した正五角形の作図を鑑賞するうちに、コンパスの空中移動という言い方で記した視点に向かいます。それは、作図法分類の観点にもなり、その気付きは、「原論」について、数学書が「ユークリッドはコンパスを限定的に使用している」ことの証しとして解説している命題に、まっ

たく違った光を当てることになると思いました。命題は、「原論」の構築、構造を映しています。「原論」の作りをやっと観照できた気持になって、筆者にはうれしい発見でした。数学的の発見ではなく、作図教育の紙上“実践”から気付く種のことです。

空中移動のことは、(後篇)に書いたのとは別の諸命題によって、「原論」の緊密な作りのこととして弘前の研究会(２０１１．１２)で話しました。そのときの発表資料にした原稿に入っています。(→年報４３号、２０１２)

今日の研究発表会(福島市、２０１２．５)では、５回目の授業、「トレミーの作図法」を準備することで発見したことについて話します。数学の内容としては、既に発表したものにちらばりあるのを、繰り返して話すことになります。

ところで、うれしかったという発見は、西洋の古典学者の領分に入る内容であり、独りよがりのことではないか、という不安があります。既に誰かが気付いているだろうかという疑問も筆者のものです。そこは、江戸から遠い地の、冬篭り老人の心境になって、(英文)論文にして審査にさらさねばわからないことだ、とまでは考えなくています。

偶然、「授業案にする」を、校閲してくれた人(徳田建司くん)がいました。彼はわたしの仮説に同調できたようです。彼には、新しい知見であったとわかりました。

彼が、講義・演習の推論を全部チェックしてくれたことも幸いでした。ただし、校閲ぶりから、「授業案にする」(前篇)・(後篇)を通読するのに、難儀したこともわかりました。

一人でシナリオを読むよりは、教室で講師が話すのを聞き、作図を真似て、与えられた作図題を自分でも考える方が楽に先に進むのでしょう。学習内容としては、３時間の講義・演習で、５回分にはなるようだ、と分量を計ることもできました。

なめらかに読み進めなかったらしい箇所からは、「原論」を読むことの難しさを、逆にわたしが教えられたように思います。

コンパスの空中移動の観点も、そういう箇所の一つに入り、今回(この稿§４で)補足しています。

なお、トレミーの作図法という呼び方がどれだけの国で使われているか、実際に使われていたか(ギリシャ語の名のプトレマイオスを英語書き英語読みで使っているという、難しい設問としてではなく、単に数学教科のなかでという意味で、)については調べていません。トレミーの定理の方は、日本の最近の教科書にも(英語読みで)出ていますが、それと、同じトレミーさんです。

トレミーの作図法を知った和算家は、それを、大西洋の術と呼びました。

§２．円に内接する正五角形の作図、命題XⅢ－１０の直角三角形

年報４２号(２０１１)の論稿では、トレミーの方法を最初に書いています。それを、「正五角形の作図法を授業案にする」では５回目、最後の授業での内容にしています。教え方の順番の違いは何を反映しているか、この稿では表立って論じませんが、いろいろな作図

法を勉強した後でトレミーの方法を教えられてこそ、すごさがよくわかると思います。

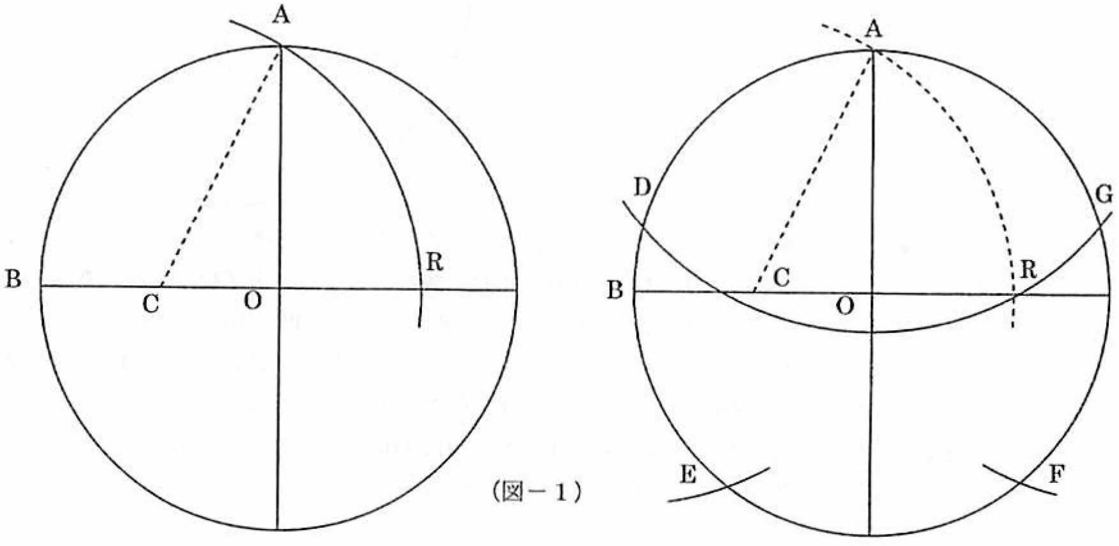
もちろん、3回目に取り上げている安島直円の方法も美しい。それを思いつくような潤沢な幾何の知識を、安島はもっていたことを教えられます。

さて、5回目の授業の内容についてお話します。前置きなし、単刀直入にトレミーの作図法を黒板上に演じることにします。

円を描き、円の中心Oで直交する直径を2本引きます。それら直径の半径がOA, OBです。まず、半径OBの中点Cをとる(作図する)。そして、Cを中心に、CAを半径とする円を描き、その円がBOの延長と交わる点をRとします(図－1、左)。次に、Aを中心に、ARを半径とする円を描き、最初に与えた円周と交わる点を、DとGとする(図－1、右)。

次に、D,Gを中心に、半径がそれぞれ、DA,GAの円を描き、最初の円と交わる、新しい点をそれぞれ、E,Fとします。

A,D,E,F,G,Aと直線で結んで、正五角形が得られます.



(図－1)

この作図で、正五角形が得られていることは、"計算"して確かめることができます。実際、初めに作図している点Rの位置は、与えられた円の半径を2とすれば、AC＝ $\sqrt{5}$ ですから、OR＝ $\sqrt{5}-1$ として計算できます。AとRをむすぶ線分の長さも計算できる。

そこでその数値が、半径2の円に内接する正五角形の辺の長さになることを示せばよい。

半径2の円に内接する正五角形の辺の長さは、作図とは関係なく、別途、"計算"することになります。

この、計算して"確かめる"ことは作図法を見つけることとは別の作業です。また、手を動かし手順を考えてする作図には、"計算"にはない学びがあります。

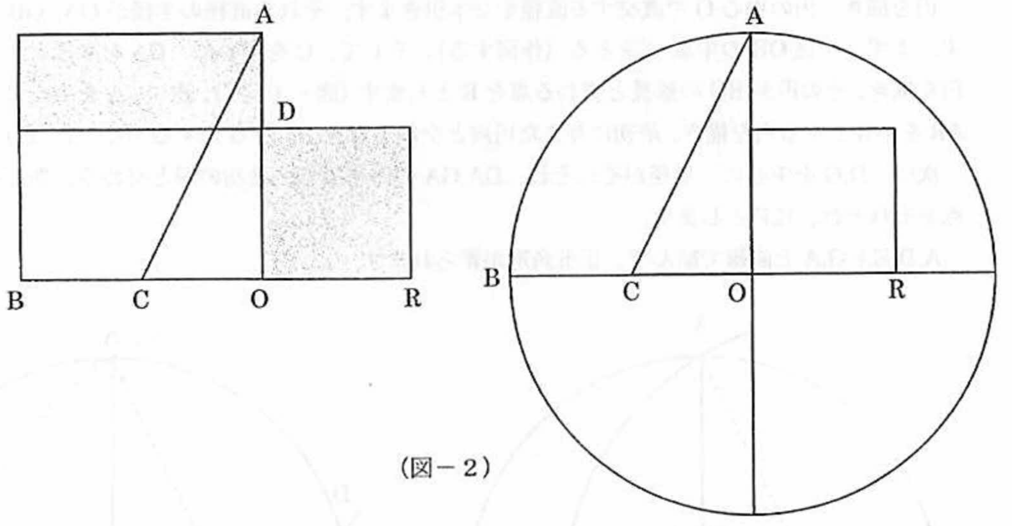
授業は、正五角形の作図法をあれこれ探すように進みます。

授業では、二次方程式を立てても、解の公式で解くこともしていません。

実は、看板にはしていませんが、授業は「原論」へ誘うということも主題にしています。

点 R の作図は、OR を辺とする正方形が、(図－2) の長方形 AD×BO に等しくなるように作図するという面積関係の問題として、1回目の授業で取り上げています。

関係を式にすれば、BO＝OA ですから、線分 OA ＝d が与えられたとき、OR＝a についての方程式となり、BO×AD＝OR×OR、文字式にして、$d(d-a)=a\times a$ となります。

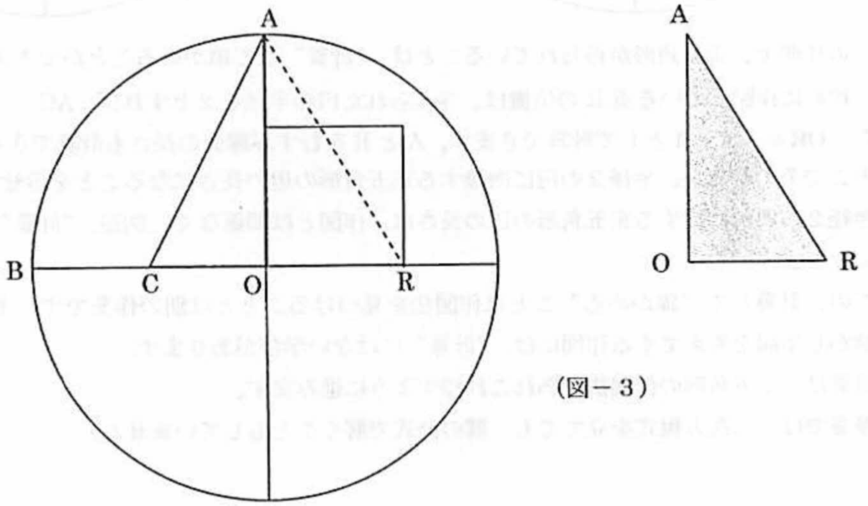


(図－2)

「授業案」(前篇) を見直したら、1回目には、上の左の図しかありませんでした。しかも記号の付け方は違う。2回目、3回目の講義・演習にもなし、中学校で習った数学の上に、授業は、ゆっくりと「原論」に誘うように企画したことが思い出されます。

この (図－2) は、(後篇) にある4回目にあります。4回目の講義で、1回目の図を思い出し、(それより一週後の) 5回目に出る右の図に合わせて記号を付けたのでした。

講義で、半径 OA の円に内接する正十角形の辺は OR に等しいことに気付かせ、それに基づく正五角形の作図法が4回目のテーマでした。



(図－3)

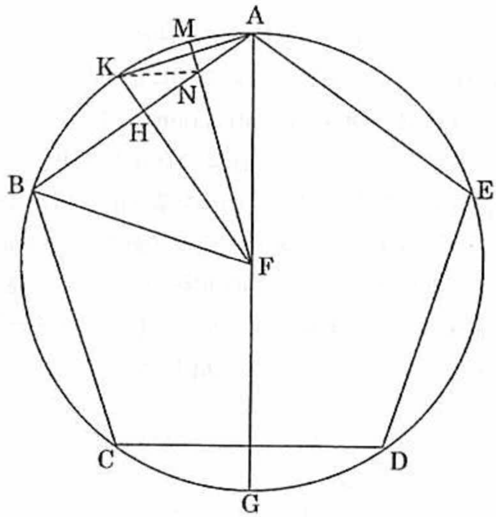
トレミーの作図は、点Rを得た後、ARの長さで円周を刻んでいます。それで、正五角形が作図されるということは、ARがこの円に内接する正五角形の辺に等しいということです。言い換えると、一つの円に内接する正五角形の辺（AR）と、正六角形の辺（AO）と、正十角形の辺（OR）とを３辺とする三角形は直角三角形である。

それを、「原論」では、第１３巻の命題１０として証明している。

命題XⅢ－１０の証明は、たどりやすいように、現代風の記号式にして書き、「授業案にする（後篇）」に、授業の“受講生”への配布資料として入れてあります。

そこでは、下の図によって、勾股弦の関係$AB^2=BF^2+AK^2$を証明しています。

これから以後では、同じ円に内接する正五角形の辺、正六角形の辺、正十角形の辺を３辺としてできる直角三角形を、（６，１０，５）直角三角形と記し、これで定理を指すこともすることにします。内接正五角形の辺を（５）と略記することもします。



（図－４）

いろいろと端折って話してきて、言い落としがないか気になりますが、先に進みます。

トレミーは、「原論」の命題XⅢ－１０を引用して、自分の作図法を説明しています。

ここで問題にするのは、この命題の関係をユークリッドはいかにして発見したか、です。「授業案にする」の“授業”を準備しているとき、わたしは、この命題１０を使用して証明している命題１６によって、その答えを推測することができるのではないかと考えました。命題１６を読んで、推測は確信に変わりました。

５回目の“授業”では、その推測を語っています。

命題１６は、正二十面体の“作図法”を記述している命題です。「原論」に誘う“授業”をしながら、わたしは古代ギリシャ人の暮らしを、学園を、その数学を想像し、あるところでは、夢想していました。次の節で話すのは、数学の推測の内容です。

ところで、ここに至って（この発表用の草稿を書くことを自分に課したことによって）、

作図法についてトレミーの記す“証明”では、わたしの“授業”1回目で取り上げている面積関係の命題、「原論」第2巻にあるような命題は引用していなかったと思いました。

トレミーは、線分を外中比に分けるという、第6巻の命題によるとしています。先の図でいうと、線分 OA を外中比に分けたときの大きい方は OR に等しい。

三角形の相似関係によって、円周角の定理も使って、トレミーの定理を証明していた。

そういえば、トレミーは三角比の表を作る計算で、“半角の公式”も使っていた。

トレミーのときは代数式による記録、伝達はまだだったけれども、われわれがやるような計算はどんどんやっていた。3分の1の角のサインの値を近似計算するようなこともしました。

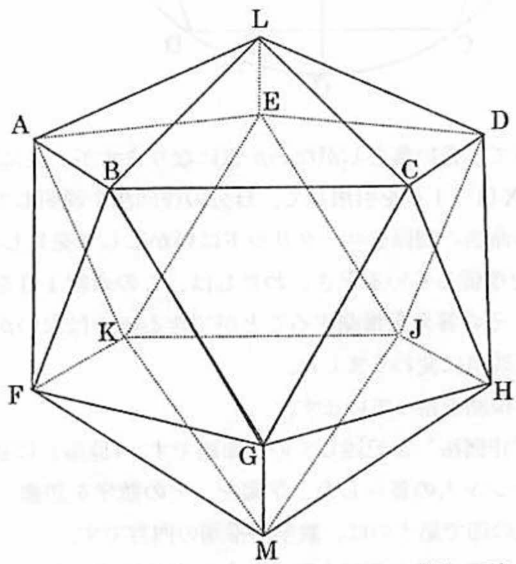
§3．正二十面体の作図

上で、$\boxed{\text{命題XⅢ－１６}}$は、正二十面体の“作図法”を書いている、といったのでは、「紙面に描くのが作図でしょうに、平面でない空間に描くのですか」と尋ねられそうですが、$\boxed{\text{命題１６}}$では、正二十面体が構成（construction)、すなわち“作図”している、それを構築することで、現代風に言えば、正二十面体の存在を証明しているのです。

正二十面体の構成には、$\boxed{\text{命題XⅢ－１０}}$ を基本的に用いています。

他方、$\boxed{\text{命題１０}}$の（6，10，5）直角三角形の証明が、平面の、トレミーの作図法の要でした。われわれが問題にするのは、この事実はいかにして発見されたのか、です。

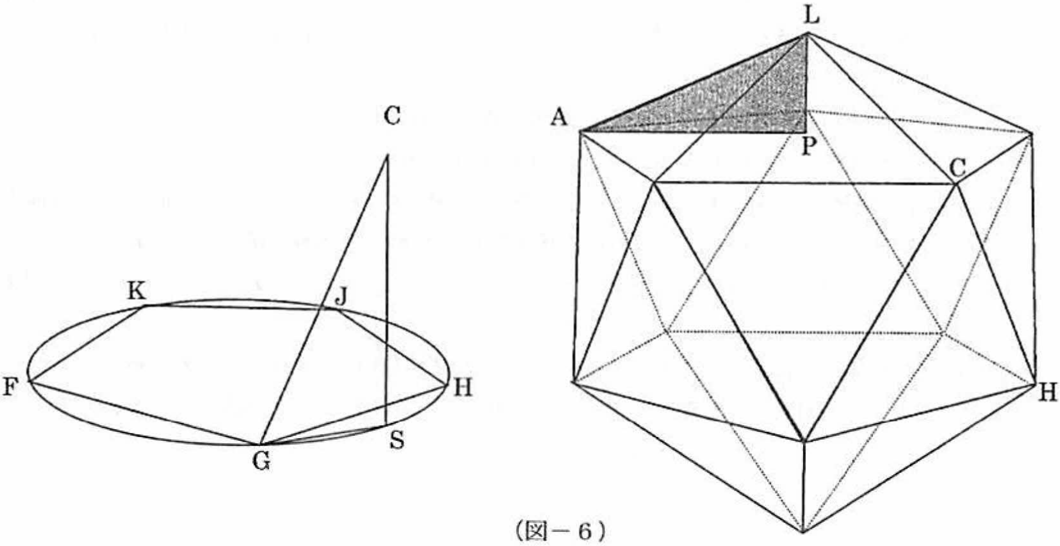
あいにく正二十面体の模型は用意できませんでしたが、それを手にした気持になって、あれこれ調べることにしましょう。次の立体図を見てください。



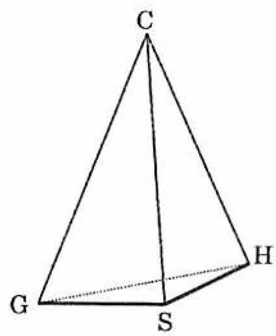
（図－5）

$\boxed{命題１０}$の（６，１０，５）直角三角形が、この立体のなかに潜んでいます。正五角形 ABCDE の外接円と正五角形 FGHJK の外接円を縁として、直円柱ができます。よって、弧 GH の中点を S とすると、三角形 CGS は直角三角形で、先の外接円に対し、CG＝GH は正五角形の辺に、GS は内接正１０角形の辺に等しいので、（６，１０，５）三角形になります。CS は、（６）辺に当る。

直円柱の、上の縁の円の中心を P とすると、三角形 ALP もその直角三角形になって LP が、（１０）辺になることが分かります。



（図－６）



（図－６）の下の立体図は、（６，１０，５）直角三角形二つと、辺が（５）の正三角形一つからなる三角錐。底面は、（１０）の辺を等辺とし、底辺が（５）の２等辺三角形。

ユークリッドは、$\boxed{命題１６}$で、上の図でいうと、正五角形 FGHJK を描き、線 SC を引き、・・・、SC に点 S で垂直な平面に、正五角形 ABCDE を描いて、・・・、正二十面体

を構成して見せます。くりかえし$\boxed{\text{命題１０}}$の記す関係のパーツを使い、見事なお手並みに思います。

ところで、われわれの考えようとしているのは構築の道ではなく、逆に、正二十面体を観察して、この“作図”の構成に便利なパーツの性質を発見する道を推測することでした。

上で、CSとした長さ、直円柱の高さになりますが、それが、直円柱の底面になる円の半径に等しいことが直観でわからないかな～と思いましたが、だめでした。それがわかれば、（６，１０，５）直角三角形を発見することになる。

模型で「測って」発見した、としてもよさそうですが、それを数学的に理詰めで納得するとなると、比例式を立てて導くようなことになりました。「授業案」５回目の演習では、そういう問題を課しています。

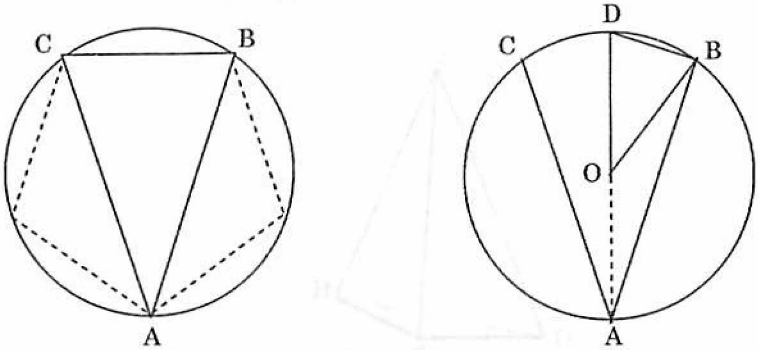
一応、ここにも、さわりの部分を、証明は省いて書いておきましょう。

「三角形AHCは、角Cが直角で、三角形ALPに相似である。

ゆえに、AP:LP=AC:HCである。ところで、AP（r）を半径とする円（直円柱の底面の円）に対し、ACとHCは、その円に内接する正五角形の対角線（d）と辺（a）に等しい。

一方、同じ円に内接する正十角形の辺（s）について、$r:s = d:a$であったから、LPはsに等しい。」

最後の比例式、前に記した略式の書き方をすれば、（６）:（１０）＝（対角線）:（５）となりますが、それは、「授業案」４回目の最初に（“受講生”には）話していて、そのとき描いた次の図によって、わかります。



（図－７）

こんな風にして、（６）と（５）からLPは（１０）に等しいと、出せる。

（５）と（１０）とから、（図－６）の立体を作れば、高さCSが（６）と出せないかな～と思いましたが、考える力は、今のわたしにはなさそうです。それで、元の正二十面体で測定して発見できるという話にしました。

さて、前の節で、$\boxed{\text{命題１０}}$の関係をユークリッドはいかにして発見したか、と言って、

それは正二十面体を観察する事によってであろうと推測して、$\boxed{\text{命題１６}}$を読むことから始めて、考証をしてきました。

考証は数学によるもので、歴史についての推定にはなっていませんが、「原論」の記述形式から離れた考証の立ち位置から「原論」の内容を思い描き、「原論」成立の時代を推理すれば、ユークリッドの生まれた頃には既に分かっていた関係だったと考えるのが自然であると思います。それが定説でしょうが、上の考証を経てわたしにもやっとわかりました。

しかし、「原論」の作りはユークリッドの創出したものです。よって、文脈を重視すれば、第１３巻命題１６で詳述している正二十面体の構成も、ユークリッドの作図法と呼びたく思います。そうすると、命題１０の証明も、ユークリッドのものとなるのかもしれません。

また、これまでの考証の結果、トレミーの作図法は「原論」には記してはいないけれど、ユークリッドには容易に作れただろうな、と思われます。

「授業案にする」（後篇）の初めのところに、講義・演習とは別立てで論じておきましたが、「原論」は、そういう作図解を載せるような作りにはなっていない。第４巻に「与えられた円に内接するように正五角形を作図せよ」というのに答えている命題もあるけれども、なるべく短い手順で、うまく正五角形を作図する方法を求めているのではない。

トレミーが「原論」の命題を引用して、「アルマゲスト」に記している作図法は、この節での略式の記号によって書いてみると、（６）の数値を６０にとって、（５）を計算するのに、（６）から（１０）を計算し、それをもとに（５）を計算する方法として、であった。

（口頭発表の会場にあるのは、サインペン使用の白板であろう。手元にあるコンパスは黒板用だし、白板に文字記号を書こうとすると、慣れていないので、手に震えが出ます。そこで、発表には、資料として用意したこの原稿だけで話が進められるように図を入れました。ここまでの図は、「授業案にする」（後篇）からとっています。なお、話すのは、ほぼ２５分間ですから、§２と§３、その一部分になるでしょう。

以下の節は、本論に続く内容ではありますが、口頭発表用に使うことは想定しないでつづることにします。）

§４．２線分の大小を、コンパスで直接比較する

与えられた円に内接する正五角形、正六角形、正十角形の辺を、それぞれ、（５）、（６）、（１０）と略式に書いたりしたが、「それらを３辺とする三角形は直角三角形になる」ことを「原論」は第１３巻の命題として $(5)^2=(6)^2+(10)^2$ を証明している。その証明については、前々節で話した。前節では、このこと、すなわち、（５，６，１０）三角形が（５）を斜辺とする直角三角形になることをベースにして、「原論」は正二十面体を構成していると話した。“作図”していると言う方がいいようにも思う。

ところで、構成法でベースにしている「（５，６，１０）三角形が直角三角形になる」と

いう定理はいかにして発見されたのか。

それはそのまま、現代のわれわれの問題にもなるが、多分、現に在る正二十多面体について観察、測定の上に、思考を重ねて発見されたに違いないと推定した。

その推定の心眼をもって、「原論」の正二十面体の構成（命題XⅢ－１６）を読むと、正二十面体の構造のなかに、発見されるべき定理（命題XⅢ－１０）の影、形を推測できることがわかった、と言っていいと思う。

当然、当時知られていた知識を「原論」は書いているが、（５，６，１０）のような定理がいかにして知られるようになったか、発見に至る思考過程を物語るようには、これまた当たり前のことながら、書いてはいない。その上、「原論」が知識を伝える方式といい、伝えようとする知識を書く形式といい、哲学の時代の影響を受けていたにしろ、ユークリッドの創造したもので、当時にあっても特異な書き方であったであろう。

推定の心で正二十面体の構成を読んで、わたしは「原論」の特異な形式から抜け出て、やっと、（５，６，１０）直角三角形の定理がわかったという気持になることができた。

その気持で、正二十面体の構成を記述するに要する諸命題や、ここに至るまでの「原論」の内容を思うと（拾い読みの上でのことであるが）、以前とは違った方角から、ユークリッドの時代に近づけたような気分になる。

前は、トレミーには母国語の書のようなものとしても、本人が「原論」の全１３巻を読んだなどとはとても想像できなかったのであるが、かなり楽な拾い読みで、巻によっては走り読みで、全巻を通読できただろうと考えられるようになった。それにしても、（本学会の年報４３号掲載の論稿に記したことだが）、「原論」は紀元前３００年ごろの書、トレミーが「アルマゲスト」を書くのは、紀元後１５０年頃である。（現代から関ヶ原の戦までさかのぼるより年数が長い）。

ユークリッドの時代に近づけた気分は、和算家の作図法を４回“授業”して、作図に親しむ古代ギリシャの教室の授業を想像したときであった。その想像が、「原論」第Ｉ巻の命題（1）、２，３を、わたしに“わかる”ものにしてくれた、と前の論稿「学んだこと、考えたこと」（年報４３号）に書いた。

それに補足し、本稿の文脈のもとに、前稿の論を敷衍することが、実は、この節の目的である。

前稿の参考資料にしている小林昭七の書は、命題Ｉ－２について、かなり丁寧に解説している[5]。次に、命題の概略を一応書いてみる。前稿とは少し変えて書く。

「原論」は、コンパスの開きで線分の大きさを測り、他所にある線分と直接比較することを許容していない。だが、コンパスの開きを空中移動させることのない作図で、間接比較できることを、命題２と３とで示している。その方法は、正三角形を作図し（命題１）、線分を延長する作図を２回、円を描く作図を２回くみあわせて、線分の一方の端点が、他所にある線分の端点に一致するように書き移せば（命題２）、共通の端点を中心とする円を描いて比べられる（命題３）、というものである。

小林の書が、命題２を記して、最初に書いていることは、

「これは命題１に比べてずっと難しい。Euclid 幾何の証明に慣れた後ならともかく、これが二番目の定理として中学や高校の幾何の授業にいきなり出てきたら、よほどできる生徒でないと証明は考えつかないだろう。」

だが、「頼りないコンパスでも、頭を使えば」、コンパスの開きを空中移動させることのない作図をくりかえして書き移せる、と命題２の方法を説明し、次のように言う。

「Euclid 幾何の真髄は命題２の証明のようなところにある。こういうすばらしいアイデアの味の忘れられない人々が学校で Euclid 幾何を教えるべきだと主張するわけである。」

著者は昭和７年生まれである。わたしより５年ほど上である。身近にいた、小林と同年代の先生方の、真摯に数学に向う姿が浮かぶ。戦後になるが、中等学校の幾何の証明で鍛えられた最後の世代だと思う。

なお、わたしのときは、高校の２年で「幾何」を習って、平行線の「公理」に出会った。「平面幾何」の記憶はそのときのもので、論証のことを中学で習った覚えはない。勤務のゼミで命題２と３を読んだことはあるが、その意味を“知る”のは近年のことである。

中学では、高校の入試のための補習というのもあって、アチーブメント・テストと称された問題で、現在の入試にあるような歯応えはなかったようにも思うが、そう思うのは、老いた頭脳には、現在の５教科の問題量が重く感じられるからで、中学生の知力も、体力も身近に見なくなっているからかもしれない。アチーブメント・テストには、保健体育、図工の問題もあった。楽譜の書いてある問題も混じっていた。

数学では、いわゆる生活単元の国定教科書を手にした年代と思う。中味の記憶はもうないが、負の数について一年で習っていないことは、ある出来事に伴って覚えている。

話を「平行線の公理」のこと、小林昭七の書のことに戻す。

高校で、「平行線の公理」を習わなくなって久しい。だから、数学科の大学生も「公理」概念を知らない。

小林の書は、「原論」の第５の公準（平行線の公理）を証明しようという試みが非ユークリッド幾何の発見という結果を生み、さらに一般の幾何が生まれていった歴史を眺めることを目的としている。第１章が、Euclid の幾何、そこで、「原論」の２３の定義、５つの公準を含め、第一巻を紹介し、（雑誌連載を本にするときに）全４８命題を載せている。

命題１、正三角形の作図、のところでは、こういうことを書いている。

「証明を少し注意深くみると二円が交わることが公準から証明できないことに気がつく。（その、座標平面による解説は省略する）。これは実数の概念がはっきりしていなかった時代にはどうにもしょうがなかった欠陥で、Dedekind が１８７１年に連続性の公理を導入して補正したものである。」

こういう評定を下すとき、著者は、近代の数学の成果の上に立っている。数学の成果もいろいろである。数学がすでにいろいろであるといった方がよいかもしれない。そこは、同じ書の別の部分を引用して、小林自身に語ってもらうことにしよう。

「Hilbertは有名な（幾何学の基礎）で、Euclid幾何の完全な公理化に成功したが、彼の公理系は複雑で中学、高校生にはとても教えられないどころか、専門の数学者でも学ぶ気になれない。Euclidの『原論』はバイブルの次に広く読まれた本であるとよく言われるが、今、我々が読んでも実にうまいなと感心するような証明が多く楽しい。それに反して、Hilbertの本を今読むのは基礎論に関心のある人ぐらいであろう。」

近代のいろいろな数学には、「原論」にはない視点、観点がともなう。「原論」の欠陥とされる点も、新しい数学から観てのことである。古い数学にこそ、中学、高校生の心に沿う原始のやさしさが見つけられるのではないか。「原論」の特異な作り、緊密な文脈のなかにも、素朴の心で読めば、古代人の率直な読みに近づけるのではないか。

数学の本に小林の書いていることは、ずっと、わたしの考えでもあった。そういうことをいくつか上げ、逆に、率直な読みを推測することが、先の稿を補うことになるであろう。

「『原論』の命題の並べ順を見るとEuclidは意識して平行線の公準をなるべく使わずに命題を証明しようとしたことがわかる。だからこそ、後年、数学者たちが平行線の公準を他の四つの公準から導こうと努力したのである。」[5] p.141

なるべく使わないで証明しようとした、というと、Euclid自身が平行線の公準を証明できないかと考えたのではないかと思うことになるが、平行線の公準を重いものに見ること自体、後年の数学者の研究の視点であると思う。

公準５は、命題２９になって初めて使う公準だが、単純に、後で参照しなければならないから、公準として初めのところに書いたと見ることもできると思う。

公準ではないが、後で使う定義で、巻の初めで書いているのはたくさんある。（目に付く内容のでは、定義Ⅲ－６（円の切片）、定義Ⅲ－１１（相似な切片）、定義Ⅳ－３（外中比）など）。公準５は作図命題の内容で、定義一覧とは別にされている。他の４つの公準に比べて長く、初等的でないということはあるが、「原論」に現にあるように命題を連ねて書いてゆくのに、前提とせざるをえない命題として、平行線の公準が残った。

だから、第一巻の命題をそこにあるように記述するのに、平行線の命題言明が公準にされねばならないということは、ユークリッドが発見したことで、それを記録した「原論」は、その発見を後世にまで伝える書物になった。そういう見方、言い方もできると思う。

たとえば、「A点を通り、直線BCに平行な直線は一つあって、一つに限る」というのを、論理上は公準にしてもいい。だが、「一つあって、」と存在性まで公理にしたら、第1巻の命題２７，２８は要らなくなる。第1巻の緊密な作りはほころび、編成は破綻してしまう。

ところで、耳慣れない「一つあって、一つに限る」は、英語の直訳であろうが、わたしがこの表現を耳にしたのは高校の幾何の授業であろう。以来、忘れられない言い方として、今も口から出る。

「一つに限る」という見方、言い方は、「原論」にはないものであろう。

小林は、「説明を容易にするため、『原論』のままでなく、現代風に公準を述べることにする。」と書いて、公準1を

「与えられた２点 A,B に対し、A,B を結ぶ線分を一つ、そして唯一つ引くことができる。」としている。

ここは、「原論」では、「任意の点から任意の点へ直線をひくこと」と軽く、あっさり言うのみである。

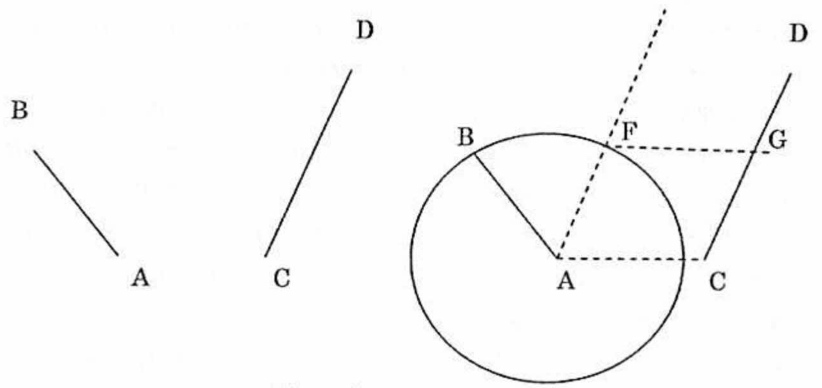
「唯一つ」の意味を込めていないことは、命題４の証明で、与えられた２点を通る直線は一つと言えば済むところを何やら説明していることから覗える。考えてみると、「唯一つ」と言えば、線をひくだけでなく、その他の直線一般を思考していることになる。

子どもが線をひくときはひくだけ、複数の直線の集まりなどに思いは及んでいない。２点をつなぐ線をひくとき、この一つの他にはひけないと考えることもない。引き終わって、直線は２点できまると言うこともない。考えてみると、教師はいろいろなところでよく「きまる」と言うが、それは生徒の作業を誘導する言葉ではない。

新しいことを学びつつある、純で、うぶな者には、学ぶ内容から離れるメタ知識や、内容に付随して話されるアクセサリーの知識は、素直な学習を進めるのに障害になる。

ひるがえって考えてみるに、「原論」には、作図法とか、円周角の定理という言い方は出てこない。定理という言葉すらない。命題１０は証明されていて使うことはあっても、命題１０を使う、という表現はない。命題という言葉がそもそもない。

話が逸れ出したようだ。そちらの方面のことは、むすびに、で書くようにし、この節の最後では、２線分の一方を他方に作図で移して、大小を比較する法を考えたので、それについて話す。第一巻の編成がほころぶといって上にあげたのとは別の例証になる。



（図－８）

２線分 AB,CD が与えられたとする。AB に等しい大きさを、A が C に重なるように移し、CD から切り取る作図を行なう。

A と C を結ぶ。A を通り、CD に平行な直線 AF をひく。A を中心とし半径 AB の円を描き、直線 AF との交点を F とする。F を通り直線 AC に平行な直線をひき、CD との交点を G とする。線分 GD が、CD から AB に等しい大きさの CG を切り取った残りになる、CD

－AB。(平行な直線が、CD と交わらないときは、線分 AB の方が線分 CD より大きいとわかり、その差 AB－CD に等しい大きさを直線 AF 上に作図することになる)。

以上、公準５を（中学数学ではそうしているように）「平行線をひく」というだけで進めれば、こうやって、２線分の大小を比較できる。しかし、「平行線をひく」この大小比較の作図法を、命題Ⅰ－２，３の代わりに入れるとしたら、(命題３１以降の) どこへ入れても、第１巻の体系にはひびが入り、緊密な連関は壊れてしまう。大規模な修繕を行なうにも、むだのない有機的な体系の保持はむずかしいと思われる。

「平行線をひく」この大小比較の方法は、ユークリッドにはすぐ思い浮かぶ作図法であったと思う。しかし、角度を書き移して平行線をひいても（平行線の存在性)、CG が AB＝AF に等しいことを示すには、逆の命題「平行ならば、錯角は等しい」(一意性）の成立が必要とされる。それが、公準５となったと推理するのもおもしろく、そういう想像の上で考えても、公準５を必要としない、命題Ⅰ－２の作図の創出はすばらしい。

命題Ⅰ－２の作図は、正三角形の作図（命題Ⅰ－１）を基にしている。

命題９，１０，１１の作図も正三角形の作図を基にしている。見事な作りである。続く命題１２の作図は、命題１１を基にしている。

§５．正弦定理から円周角の定理へ

正弦定理から円周角の定理へ、というのは、円周角から正弦定理へ、と書くべきところを間違えて逆に書いているのではないか、と思わるかもしれない。正弦定理は円周角の定理を使って高校の数学で証明される。ここで使うから、中学で円周角の定理を教えられたのかと思う。「覚えているか」と高校の先生に尋ねられるかもしれない。

円周角の定理を中学校で習い、正弦定理を習うのは、高校の入試に合格してからである。

円周角の定理を使って、正弦定理はスマートに証明される。外接円の半径 R の入った記号式で覚えさせられている。周知の公式だから、図も、記号の説明もなしで話を進める。

スマートに、軽々と証明されることに、わたしは抵抗感があった。あるとき、翻訳本で、定理を、第一正弦定理、第二正弦定理と二つに分けてあるのに出会って、なめらか過ぎる証明に引っかかる気持がやっと融けた。

第一正弦定理には、半径 R が入っていない。入っていない部分は、各辺をそれぞれ底辺にとり、三角形の高さをサイン記号を使って書いて、面積は底辺×高さという算数の知識でそれぞれを式にし、それら３式は等しいとおいて得られる。もともとは、そういう知識として授けていたのだろう。知識間の絆が切れたのは、いつのことか。

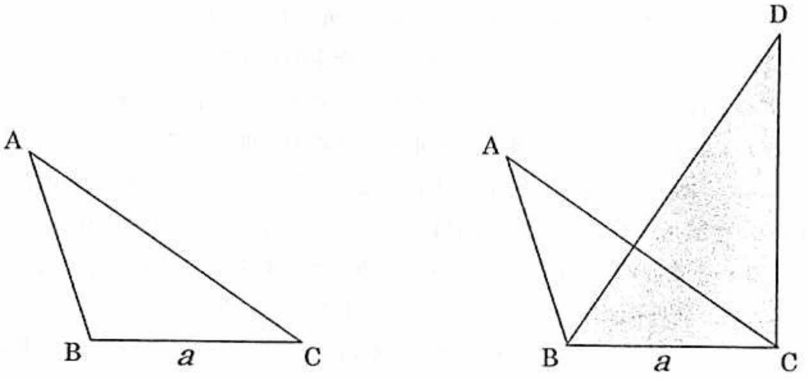
この節で書きたいことは、ここから始まる。では、次の比、

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ が外接円の直径２R に等しいことはいかにして発見されるのか。

それを考えることは、円周角の定理（の発見）に導く。それで、書こうとしていること

は、正弦定理から円周角の定理へ、となる。

上の比の値が２Ｒに等しいことをいかに発見するか、というよりは、むしろ、この式の値はいったい何を表すだろうか、何か意味ある値だろうかと問う方が自然でおもしろい。



（図－９）

左の図で $\sin A$ はどうなるか。角Ｄは角Ａと同じ大きさに、直角三角形 BCD を作ると、

$$\sin A = \sin D = \frac{a}{BD}$$

BD は直角三角形の斜辺、それは、三角形 BCD の外接円の直径になる。そこを考えることも中学の数学の想起になる。

生徒が、BD は三角形 ABC の外接円の直径でもあると気付けば、三角形 ABC の外接円の中心の作図、三角形 BCD の外接円の中心の作図に考えを移して、（中学で習った覚えのない）円周角の定理（の逆）の証明法を発見する道に導くこともできる。

中学の論証を高校の数学で想起し、自らの考えで相互のつながりを作らせる、級友とともに考えさせる授業のシナリオが思い浮かぶ。

最後のステップのところは、「授業案にする」（後篇）の追記に書いている。「原論」の第３巻を読んで思い付いたことである。学校の教科書の筋からは生まれそうにない、提示されたこともないような授業シナリオが、隙間なく緻密な記述の「原論」を開いて構想されたというのも意外で、おもしろい。

むすびに

前稿の「授業案にする」が講義で語る相手は、教育を仕事にしていない、数学には素人の大人であった。その講義内容について書いたこの稿でも、ユークリッドの「原論」のことを話してきたが、その聞き手のみなさんは、数学関係の教育に携わっている人である。

講義するのと、講義内容について話すのとでは、話も、話し方も違ってくる。しかし、西洋古代の書について語るときは、私たちや私たちの子が日本の学校で習った、あるいは習わされている数学の知識を念頭においている。

円周角の定理や正弦定理は習った知識のうちにある。習うことには、円に内接する三角形というのがあり、三角形の外心、重心がある。三角形の五心というのもある。

図形領域に限っても、「原論」にはない用語が、漢字の日本語としてある。

三角形の五心とはうまくいったもので、「内心」に対する「外心」、「重心」とくれば音声の記憶で「五心」が思い浮かび、「垂心」も重心、外心の仲間に入る。

「原論」には、「内心」の語も「外心」の語もない。語はないが、三角形の内接円を作図するとき内心が作図されるし、外接円を作図するところでは外心が作図される。

「原論」に、重心や垂心の命題はない。だから、重心の語も垂心の語もなく、五心はない。

「原論」には、「正多面体」の語もない。「いままでに述べた（５つの）図形以外に、等辺等角で互いに等しい図形にかこまれる他の図形はつくれない」と第１３巻の最後で述べている（命題１８のなかで）。そして、第１１巻の初めにある定義一覧には、正方形、正八面体、正二十面体、正十二面体の語はあるが、正多面体というのはない。

「定理」の語はない。よって、「定理を使って」と言うこともない。もちろん、高校の教科書にはどの単元にもあると思われる「応用」の語はない。

現在の私たちの数学の知識に寄り添って「原論」のことを話してきたが、現実には、年代によって、習った数学の提示の仕方に違いがあり、私たちの知識の方が「原論」の知識よりはるかに複雑、雑多である。題材は多肢に亘り、多面的である。

中学校の教科書は、２等辺三角形の定理について記している。その定理の証明法は３つあります、と習ったという子どもの言から、教師の教え方も多様になるのが覗える。

「原論」は、２等辺三角形の定理（命題Ｉ－５）も、その逆（命題Ｉ－６）についても、一つの証明を記述するのみで、次の命題へと進む。この素っ気なさのせいだったのか、この定理の証明で落伍する学徒が多かったという。が、それは、近世、あるいは近代の幾何の学習者のことである。古代の学習者のことまではわからない。

歴史をさかのぼろうにも、ユークリッドに関する比較的詳しい叙述があるのは、プロクロス（４１０－４８５）の「ユークリッド原論第１巻注釈」の十数行というから、それ以前に、幾何が初学者にいかに学ばれたかは、古典学者の考証の外にあり、いかようにも想像される。

ともあれ、「原論」が世に出るや、アルキメデスやアポロニオスが、その多くの命題を巻数と番号だけを示して使用しており、「原論」がいかに急速に普及したかがわかるという。

普及したのは、羊皮紙の写本にして読むことのできた一部の貴族や、選ばれた人である。

安価に大量に作られるようになったからとて、現代語訳を作っても、大衆社会での数学の教科書にはならないし、安易に、日本の大学で、セミナーのテキストにもできない。

しかし、古代ギリシャでの普及、古典の復興、近代学校の成立があって、現代の日本の、

私たちの知識に２等辺三角形の定理がある。

私たちは、三角形ABCと書き、頂点Aから底辺BCに垂線を下ろす、という。記号のこういう書き方といい、平行、錯角、同位角といい、ユークリッドの「原論」があったから、そのいずれもが今のわれわれの知識にされている。

ありがたいことに、今は、原典に近という、復刻された「原論」全巻の日本語訳がある。

２等辺三角形の定理（命題Ⅰ－５）については、その証明に拘泥することなく、それのいろいろな数学からの見方についても気にすることなく、神妙な顔もせず、素直に学ぶ気持で、この命題が、以後、「原論」で使われている箇所で、その働きの広大なのを観照したらどうであろう。

定義も、あらかじめの一覧表と思って軽い気持で読むと、現在の私たちの雑多な数学の知識から解放されて、意味のひろがりを楽しむことができる。たとえば、

「定義１．点とは部分をもたないものである。定義２．線とは幅のない長さである。」

「部分をもたない位置である」という方がいいと、高校で誰かが言ったような気がするが、位置、あるいは場所を言いたがるのは、対象の図形を、近代の座標平面の上に置いて考えるからではないか、と思う。自分たちが囚われていることを意識するのはむずかしい。

「原論」の定義は、数学者の使っている語の「定義」の概念と同じはずはない。ギリシャ語の定義の意味は、数学者という職業が近代に生れるよりも、遥かにむかしからあった。当然、今の数学で頻出する「定義」で「原論」の定義を考えては間違う。

国語辞典が言葉を定義するのとは一緒にできないが、「原論」にある定義は、使う用語を一応「説明しておく」というのに近いと思う。

古代人の思考スタイルを、雑多な学から遠く、囚われの知識のない幼児の姿に重ね観る。

三角や四角や丸を真似て描くように言ってもうまく描けないでいる幼児を目前にしたとき、読み、書き、思念するカタカナのカタチが、日本の子の深層の素材になっていると夢想した。カタチの記憶は、学校で教えている幾何の平面図形にどう立ち向かうか。

平行四辺形を算数で教えるのは、大人の知恵で、もしかしたら、知恵ではなくて、上で教科内容としているものと結びつけるという、大人の狭い了見から出たものかもしれない。

数学教科の領域に住む大人の浅知恵から出たことでは、「正三角形は２等三角形の特別な形です」と算数で教えていたことがあった。

「原論」には、そんな人工の知識は盛られていない。「原論」の定義一覧表にある四辺形の分類は、児童の年齢の知識形成の型に近いと思う。

ところで、「原論」には、コンパスとか、定木という具体物をいう名詞は出てこない（と言うとき、数論の第７～９巻、および、無理量論の１０巻は念頭においてない、以下でも同じ)。カタチの名を具体物から引き離し、緊密で哲学的推論での構成のよろいをまとわせながら親しめば、記述は長々しくとも簡明で、そこには、素朴な、原始のやさしさがある。

書いてある内容を読んだ後で、そこにある原始のやさしさに浸ると、夢の外で、現に中学で教えている定義や定理、高校で教えるたくさんの「基本」「公式」の型が猥雑に感じら

れる。教科書を開いたら、三角比の方程式の問題が章末に並んでいて、老人には味読することができない。中学の教科書を開いても、(かなしいかな)、図形の知識が、覚える漢字の学年配分のように、配分されてあるあり様へ目線が行ってしまう。証明記述を楽しめるような文章には出会えそうにない。

「原論」を編む目配りには、有機性や緊密性はあっても、生徒に対して学校数学につきわれわれのする配慮のようなものは一切ない。

わたしは、「原論」を読みながら、「正五角形を作図する」を課題にする"授業"をして「原論」には書かれていない、ギリシャ古代の学びを推理する体験を楽しむことができた。

また、正二十面体に古代人が数理的に親しみ、深く解析していたと知った。

一方で、正五角形の作図法を、5回の"授業"で、ほぼ考えつくすこともできたと思う。

初夏を迎えて、東北の地の、寒い暦の春先から、気まぐれに「原論」を取り出し、気ままにめくることのあった隠居の部屋にも、先年、近くに越してきた幼稚園から園児の声が聞こえてくるようになった。

外で遊ぶ園児の遊具は、立体物である。平面図形は、ともに遊ぶものにはない。平面の図形は、その子らには、立体の側面としてのカタチとして見えて、たたいたり撫でたりするものかもしれない。円周や線の作図は、グランドの地面に描いたり、ひいたりすることから始まるのかもしれない。

教具や製図の道具のなかに、目盛り定規が、分度器があり、性能のいいコンパスがある。文具として見慣れていて、古代に使われていた円を描く道具を、わたしは、現代のと同じような物に思っていないか。

スイッチをいれたラヂオの、春が来て年度が変わって新しくなったロシア語入門から、今までに思いもしなかった話が耳に入った。

ロシアの児は、アルファベットの文字と読みとを学校に入る前にみな覚える。

ロシア語単語の読みは、ほぼアルファベットの読みの通りである。少しの例外に慣れるのには年数を要する子もいるが、・・・。

入学前に、文字はみな読めるようになるなら、新しいどんな単語も、つづりを教えられれば、みな書けるということになる。

日本語の国の学習となんと違うことか。

文献

[1] 板垣芳雄：和算家の正五角形の作図法をユークリッド「原論」の数学で読む；教科カリキュラム論の延長上に、そして、「原論」の特徴を析出させる試みの一つとして、東北数学教育学会年報、第42号、45～62，2011．

[2] 板垣芳雄：正五角形の作図法を授業案にする（前篇）、鳴門教育大学・学校数学研究、

Vol.19 No.1, 5～23, 2011.
[3] 板垣芳雄：和算家による正五角形の作図から学んだこと、ユークリッド「原論」に照らして考えたこと、東北数学教育学会年報、第43号、28～53, 2012.
[4] 板垣芳雄：正五角形の作図法を授業案にする（後篇）、鳴門教育大学・学校数学研究、Vol.20 No.1, 9～41, 2012.
[5] 小林昭七：ユークリッド幾何から現代幾何へ、日本評論社、1990.

On proposition 10 of Book XIII in Euclid's *Elements*; Supplement to the previous papers about Ptolemy's construction of a regular pentagon

ITAGAKI Yoshio
(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

Ptolemy's method of drawing a pentagon inscribed in a circle was investigated in my previous papers. Ptolemy proved his construction by propositions of the *Elements*, where proposition 10 of Book XIII was used essentially. Here, Book XIII is devoted to properties of five regular solids.

Euclid constructs icosahedron in proposition 16, in which proposition 10 of the same Book is significantly used. Proposition 10 states that a triangle whose sides are respectively sides of an equilateral pentagon, hexagon, and decagon inscribed in the same circle is a right triangle, which has been a theorem well-known to Western scholars.

Conversely to the deductive way of constructing the regular solid "icosahedron", I guessed in the previous paper "Teach to construct regular pentagons" that the fact of proposition 10 was discovered by observing the real icosahedron and analyzing its properties. To consider how that discovery was done is the subject of our study in this paper, again.

Ptolemy's construction itself is not contained in the *Elements*. But, as the result of reading the *Elements*, we conclude that Euclid could realize easily Ptolemy's method.

Keywords: construction of regular pentagon, Ptolemy's construction, Euclid's *Elements*, construction of icosahedron (regular polyhedron), theorem of angles inscribed in a circle, formulae of sine rule