

算数科における数学的モデリングの教材開発

— 「給食問題」の授業分析を通して—

大澤 弘典 (山形大学大学教育実践研究科), 岩田 栄彦 (山形大学大学院教育実践研究科2年)

要約

本研究では、算数科における数学的モデリングの具体的な教材開発を試みた。具体的には、公立小学校5年生1クラスを対象に、「単位量あたりの大きさ」の指導で「給食」を題材にPowerPointを利用しながら授業を実施し、対象児童の活動記録(VTR, ワークシート)等をもとに分析・考察した。その結果、給食を題材にした本授業は、算数科における数学的モデリングの一教材として有効であることがわかった。

キーワード: 数学的モデリング, 給食, 単位量あたり, PowerPoint

1. 問題の所在と本研究の目的・方法

(1) 問題の所在および研究の背景

国際的な学力調査TIMSS, PISAなどを論拠として、我が国の子供たちが「算数・数学の内容に興味を持って授業を楽しんでいない」、「算数・数学の有用性を十分に実感していない」等の指摘がなされて久しい。これらの課題に係わって、授業に興味・関心あるものにし、算数・数学の有用性を実感させるための有効な方法の一つとして、数学的モデリングを取り入れた授業が図られている(例えば大澤, 1996; 柳本, 1996 など)。また、児童・生徒がなるべく早い学年から数学的モデリングに係わる経験の必要性が指摘されている(池田, 2007; 岩田 2013 等)。しかしながら、とりわけ一般の公立小学校算数科における数学的モデリングの実践例は、まだ少ないのが実状である。

(2) 研究の目的と方法

小学校算数科の授業に、数学的モデリングの授業が適切に取り入れられたならば、中学校数学科の授業において、生徒の数学に対する有用感を促進することがより可能となるであろう。このような認識から、前述した1(1)の背景を踏まえつつ、

本研究では算数科における数学的モデリングの有効な教材を開発することを研究の目的とする。具体的には、すべての児童が共有できる題材として「給食」の場面を取り上げ、授業の展開においてPowerPointの利用を試みる。また、本研究の方法としては次のような作業手順で研究を進める。

- ・数学的モデリングについての先行研究の検討
- ・PowerPoint 授業の利点と問題点の整理
- ・算数科におけるモデリング授業の構想と実践
- ・実践した授業の分析・考察
- ・本研究のまとめ

2. 先行研究の検討

(1) 数学的モデリングについて

数学的モデリングは、単にモデリングとか数学的モデル化などとも呼ばれる。数学的モデリングとは、例えば三輪(1983)によれば、実際(現実)の問題を定式化して数学的に解決し、解釈・検討して不都合が生じればモデルの修正を適宜繰り返し、より適した実際の問題の解決を見出していく全活動のことである。加えて、三輪は数学的モデル化(数学的モデリング)の過程を次のように示している(図1)。

- それまでの経験・観察をもとにしてある事象が探究を要するという認識があるという前提の下で、
- ①その事象に光を当てるように、数学的問題に定式化する(定式化)。
 - ②定式化した問題を解く(数学的作業)。
 - ③得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて、その有効さを検討し、評価する(解釈、評価)。
 - ④問題のより進んだ定式化をはかる(より良いモデル化)。



図1：数学的モデル化過程(三輪, 1983)

また、PISA(2003)では、数学的リテラシーを習得するための数学化のサイクルとして次のように示している(図2)。

- (i) 現実に位置づけられた問題から開始すること。
- (ii) 数学的概念に即して問題を構成し、関連する数学を特定すること。
- (iii) 仮説の設定、一般化、定式化などのプロセスを通じて、次第に現実を整理すること。それにより、状況の数学的特徴を高め、現実世界の問題をその状況を忠実に表現する数学の問題へと変化することができる。
- (iv) 数学の問題を解く。
- (v) 数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。これには解答に含まれる限界を明らかにすることも含む。

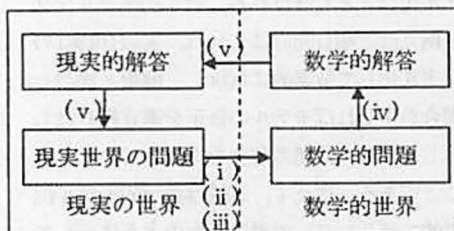


図2：数学化のサイクル(PISA, 2003)

通常の算数・数学の授業は、その多くが数学世界の中で展開されていると言える。児童・生徒の学習は、はじめに数学的問題が与えられ、最終的に数学的解答を得ることで完結する。これは、前述した三輪の数学的モデル化過程における2(1)②の数学的作業にしか当たらない。PISAの数学化サイクルにおいて言えば、2(1)(iv)の部分にしか過ぎない。一方、数学的モデリングの授業は、数学的世界だけに留まらない。また、通常の授業で教師から与えられた問題を児童・生徒が解決する場合、必ずしも主体的に取り組んでいるとはいえない。厳しく言えば、児童・生徒に与えられる問題は、指導者の都合に合わせて整理された問題が少なくない。さらに、必ず明確な答えが用意されている場合がほとんどである。

上述したように、数学的モデリングは、最初に現実の世界における問題から始まる。現実世界の問題を扱うことにより、児童・生徒の課題解決意欲を喚起し、主体性を高めるチャンスがある。児童・生徒にとって、課題を解決する必然性が存在し、解決する現実的価値が伴っている場合も多い。次に、現実世界の問題を数学的問題に定式化する。三輪の数学的モデル化過程では2(1)①、②の部分に当たる。PISAの数学化のサイクルでは、2(1)(i)、(ii)、(iii)に当たる。これらの活動は通常の算数・数学授業ではあまり見られない。さらに、数学的モデリングは、数学の世界で完結しないで、数学の世界で得た結論や解答を現実の世界で解釈したり再モデル化したりする。三輪の数学的モデル化過程における2(1)③、④やPISAの数学化のサイクルにおける2(1)(v)に当たる。児童・生徒は現実的解答を得ることで、算数・数学の有用感を感得していく。

以上のように、数学的モデリングは通常の算数・数学の授業で行われる過程とは異なっている点が多い。数学的モデリングは数学の世界のみの活動に留まらず、現実世界での活動を含む。児童・生徒の考える世界を拡張しているとも言える。また、目的意識を明確に持たせるものである。

数学的モデリングは学習指導要領とも無関係でない。現行の学習指導要領は、数学的活動を重要視している。数学的活動とは、生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを意味している(文部科学省, 2008)。このことから示唆されるように、数学的モデリングは数学的活動に包含されるとも言える。

数学的モデリングの効果や利点が少なからず確認できる一方で、数学的モデリングに関する実施上の問題点を、三輪(1983)やBlum(1993)等は次のように指摘している。

- (a) 定式化段階の困難さ
- (b) 指導時間確保の困難点
- (c) 授業・試験内容を複雑にしてしまう困難点
- (d) 教師の指導力不足の困難点
- (e) 数学的モデリング教材不足
- (f) 評価方法の未開発さ
- (g) 題材の現実性の希薄さ
- (h) 再モデリングの欠如など

また、数学的モデリングの初心者である児童・生徒が、自ら数学的モデルを深化させることは困難との指摘もある(例えば、Ikeda&Stephens, 1998)。これらの指摘などから、数学的モデリングの授業は高度で広範囲な高度な数学に係わる場合が多く、小学校などの授業に数学的モデリングを適切に取り入れることが少なからず難しいことが窺える。

(2) PowerPoint を取り入れた授業について

田淵(2007)は、PowerPoint を取り入れた授業の利点を次のP1~P4を挙げている。

- P1: 板書の時間や手間が省け、繰り返し見せたり、能率よく進めたりすることができる。
 - P2: 文字がきれいで見やすく、表、グラフ、図形、写真なども手軽に表示できる。
 - P3: 動く、消える、現れるなど視覚に訴える表現ができ、生徒の理解が深まる。
 - P4: 一度作ったものを工夫、発展させながら、次年度以降も使える。
- 加えて、黒板とチョークを使う旧態依然とした

授業に比べて、効率的、効果的であり、生徒の興味関心が増し、意欲も高まり、理解も深まるとも述べている。

一方、丹羽(2006)は、PowerPoint を取り入れた授業の問題点を次のN1~N4のように挙げている。
N1: パワーポイント型授業では複数要因を一気に提示するため、往々にして項目提示のスピードが速くなり学生が理解するスピードを超えてしまう。

N2: パワーポイントの複数のスライド情報と既存の知識を関連付けようとすると、より多くの考える時間が必要になり、そのため聞き逃しが増え、ポイントがわからなくなる。

N3: パワーポイントのプリントがあるため、安心感から集中して聞かなくなり、受講時の理解や印象付けのレベルが低下する。

N4: パワーポイントスライドは暗い環境下での提示になるため、睡眠に誘われる頻度が高く、受講姿勢の低いレベルの学生はまったく聞かない。

これらの問題点に留意しつつ、PowerPoint の利点を生かした授業を展開していくことは少なからず効果的であると考えられる。大室ら(2011)は、授業の準備時間を短縮することや環境を整えることで、通常の黒板での授業よりも綿密でかつ簡単に生徒に提示することができると述べている。

本研究では、上述した田淵のPowerPoint を授業に取り入れる利点「能率的に進めることができる(P1)」に着目する。PowerPoint の利用によりBlum(1993)らの指摘する問題点 2(1)(b)等の解消につながると考える。つまり、PowerPoint を利用することで、小学校における数学的モデリングの授業がより実現しやすくなると想定する。

3 小学校における数学モデリングの授業の実施

前述までの知見を踏まえて、次のように授業を実施した。

(1) 授業の概要

- ・授業名: 給食について考えよう
- ・実施日時: 平成25年10月30日(水)

- 3校時(10:55~11:40), 13時間目/全14時間
 ・対象児童: 山形市立A小学校, 5年2組
 (男子14名, 女子16名, 計30名)

- ・授業者: 岩田栄彦
 ・本時の内容

前時までに対象児童は, 単位量あたりの大きさの求め方を学んでいる。本時は, これまで学んできた単位量あたりの大きさに係わる学習内容の理解を深め, 興味を広げることが目標である。一斉指導において時間が短縮できる利点を活かすためPowerPointを使用する。具体的には, スライドを直接黒板に投影し, チョークによる板書と合わせて活用した。授業の内容は, 給食について考えるものである。給食の丸缶の重さに注目し, 一人あたりのスープの量を計算する。給食の量は低学年, 中学年, 高学年, 中学生という区切りで一人あたりの分量が決めている。各学年の一人あたりのスープの量を求める過程で, 現実に取り得る問題が現れる。これらは児童の既習内容の単位量あたりの大きさや四捨五入などを活用して解決していかなければならない内容を含んでいる。単位量あたりの大きさに係わる本授業を通して, 算数の有用性を実感することができ, 算数に対する興味を広げることができると推測される。

・授業の記録

本授業を撮影したVTR・ワークシート・授業者のメモ等の記述をもとに, 児童の発言等を整理した。なお, ワークシートの児童自身による省察は, 今日の授業で学んだこと, 身近な問題を算数で考えること, PowerPointを使用したこと, 今日の授業の感想などからなる。

・その他

本授業は山形大学大学院教育実践研究科の教職専門実習Ⅲの期間中(平成25年10月15日~11月12日)に実施されたものである。授業者は対象児童の実態を把握した上で授業を実施している。

(2) 授業場面の抜粋

ここでは授業記録をもとに, 数学的モデリング

過程における児童の活動場面を抜粋する。なおTは授業者を表し, それ以外のA~Iは児童を表す。

場面1 現実問題の発生場面 12:21~12:47

- 12:21~ T11: ちなみに6年1組はどうでしょう。
 12:22~ A12: え一つと, 12.0!
 12:23~ B13: 12.5!
 12:25~ C14: 12.4!
 12:35~ T15: まあ, さっき1, 3, 5ときたので, 次は6に1学年分ですけど
 12:37~ D16: 12.
 12:40~ T17: 6年生も調べてみました。
 その結果, いきますよ。ドン!
 (画面に10.3kgを表示させる)
 13:45~ えー!!!

上掲の場面1は, 1年生, 3年生, 5年生と順調に丸缶の重さが増えていることを確認した後に, 6年生の丸缶の重さを予測する場面である(図3)。



図3: 現実的な問題と出会う場面

6年生の丸缶の重さを実際に確認すると, 多くの児童は驚きの声を上げた。彼らが「6年生の丸缶が5年生の丸缶より重い」と予想していたためである。この場面で, 「なぜ5年生の方が6年生よりも給食の量が多いのか」という問題に児童は出会うことになる。実際のところ, 5年生と6年生の一人あたりのスープの量は200gで同じ量に決められている。A小学校の5年2組(30名)より

6年1組(28名)に在籍している児童の人数が少ないため、このような逆転現象が起きている。

場面1の後に、なぜ6年生の方が少ない量なのか、その原因を教師が質問したところ、「人数が少ないから」という意見を出した児童が多かった。他にも「給食室からそれぞれの教室までの距離が違うから」や「給食センターの人が入れ間違えた」、「たくさん食べる人がいるから」、「誤差」などの意見も挙げられた。

場面2 定式化する場面 26:01~26:30

- 26:01~ T21:一人あたりスープの量、370g
これで当たっているでしょうか？
- 26:04~ E22:当たっている。
- 26:06~ C23:当たってるんじゃない？
- 26:07~ A24:当たってると思う。
- 26:08~ F25:間違ってると思う。
- 26:12~ T26:はい、じゃあFさん。
- 26:13~ F27:はい。えーっと、11.1kgは丸缶の重さを含めているので一人あたりの量ではないと思います。
- 26:24~ E28:あー。
- 26:28~ B29:確かに。

上掲の場面2は、児童が自分のクラスの丸缶の重さをもとに、一人あたりのスープの量を計算した場面である。本学級の丸缶の重さは11.1kgであり、本学級の児童数は30名である。単純に児童の人数で丸缶の重さを割ると、一人あたり370g(=11.1÷30)という誤答になってしまう。

しかしながら、実際の丸缶自体の重さは4.7kgであることが既に示されていたにもかかわらず、ほとんどの児童が丸缶の重さを単純に児童の人数で割ってしまっている。Fさんは丸缶自体の重さを引かなければならないことに早い段階から気付いており、周りの児童らに話をしていた。370gを導き出す意見が発表されている間、Fさんは意見を言いたそうな素振りを見せており、最終的にT21で問いかけたところ、挙手・発言し、E28や

B29のような賛同を得ることになった。この後、授業者がスライドに丸缶4.7kgの画像を再表示して確認を行った。

場面3 解釈する場面 42:19~42:51

- 42:19~ T31:5年生と6年生は一人あたり量何gでした？
- 42:27~ G32:200
- 42:28~ T33:200gですね。では、1年生は一人あたり何gですか？
- 42:32~ H34:140g
- 42:34~ T35:140gですね。3年生は？
- 42:38~ I36:181
- 42:39~ T37:まあ、181gですけども、この日の結果はね、給食センターの人は何gを目安に入れていると思いますか
- 42:50~ B38:180

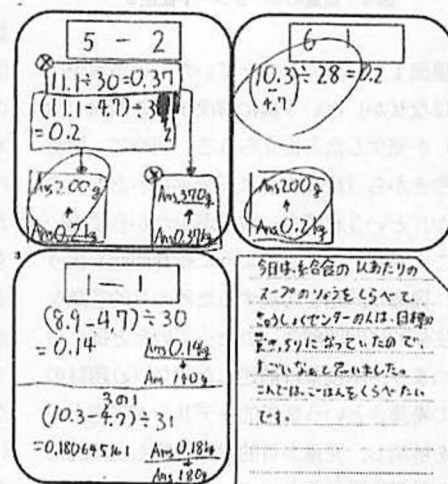


図4: 児童のワークシート記述1

場面3は、1年生と3年生の丸缶の重さをもとに、一人あたりのスープの量を調べている場面である。1年生と5年生、6年生はそれぞれ整数で一人あたりの量が算出される(図4)。しかし、3年生の一人あたりのスープの量を計算すると、無限小数になってしまう。児童は、無限小数の扱いにあまり慣れておらず、小数第何位で四捨五入す

るか迷っている様子が見られた。つまり、場面3は既習内容の活用に迫られた一つの場面であると言える。

4. 実施した授業の分析・考察

(1) 場面1 (現実問題の発生) の分析・考察

①現実性の希薄さの解消

場面1において児童は、給食の仕組みについて調べていく過程で、彼らの予想に合わない結果に出合った。A12やB13のように5年生の丸缶の重さよりも重くなるという予想である。実際、児童のワークシートには、「全学年同じ量だと思っていたのに」といった記述が幾つも見られた(図5)。

私は、給食が全学年、量は
同じだと思っただけで、ちがったので
びっくりしました。そして、

図5: 児童のワークシート記述2

この場面1で、「重いと考えていたものが実際は軽いのはなぜか」という真に解決すべき問題(給食問題)が発生したと捉えられる。同時に、児童のつぶやきから「給食の量に不公平さがあるのではないか」という意識も、彼らが少なからず抱いていることが窺えた。このように給食問題を扱うことで、児童は問題を解決するための目的意識を持ち、主体的に問題解決に当たっていたと捉えられる。つまり、本授業は前述した2(1)(g)題材の現実性の希薄さという数学的モデリング実施上の問題点を解消し、児童が目的意識を持ち主体的に取り組む数学的活動となっていると言える。

②PowerPointの活用における視覚的効果

場面1において、PowerPointのアニメーション効果が児童の驚きを促進する演出になっている。前述2(2)PowerPointの利点P3などを生かし、視覚的に訴える表現を取り入れることで、予想とは違う結果を表出するという演出を明確にすることができた。その結果、児童は原因究明の意欲を高めたと考えられる。

(2) 場面2 (定式化する場面) の分析・考察

①定式化の適切さ

「なぜ6年生の方が少ない量なのか」という現実世界の問題を、数学的世界の土俵に乗せていく活動は、前述した2(1)PISAの数学化サイクル(図2)で言えば、(ii)仮説の設定や定式化などの活動にあたる。給食問題(現実世界の問題)の解決に際して、ほとんどの児童は、具体的な人数の違いに注目することで仮説を設定し定式化することができていた。端的に言えば、既習内容である単位量あたりの大きさなどを十分に活用したと言える。つまり、給食問題は過度に高度な数学内容を避けつつ、児童の発達段階に見合った適当な定式化の活動を含んだ算数の数学的モデリング教材の一つとして有効であると言える。

②再定式化への展開

場面2では、数学的解答が現実的解答として当てはまるかどうか児童は吟味している。PISAの数学化サイクルで言えば、(v)現実との整合性を図る場面である。T21の発言から判るように、この段階では、多くの児童が一人あたりのスプーン量370gを数学的な結果として得ている。実際には、F27の発言にある通り、単純に重さを人数で割るだけでは一人あたりのスプーン量を求めることはできない。E28やB29のように、F27の意見を聞くことで、容器の重さを考慮する必要に気付く児童がたくさんいた。その後、彼らは計算をやり直している。自発的に再定式化を行い、新たな数学的な結果を得ていったのである。さらに場面2の後に、割る数が児童数だけではなく担任の先生の方や特別支援学級の児童の分などが含まれているという観点から吟味する活動も見られた。以上のように、より良い定式化を目指した活動を包含するという点からも、給食問題は数学的モデリングとしての教材として有効であると言える。

③PowerPointにおける再表示効果

場面2において容器(丸缶自体)の重さが4.7kgであるという情報が必要になる。導入場面において、4.7kgであることを示してはいるが、F27の発

言を受けて、PowerPointのスライドで再表示した。PowerPointを利用して、学習場を再現することで、児童の活動を支援できたと言える。

(3) 場面3 (解釈する場面) の分析・考察

①算数の活用

場面3での発話や図4などから判るように、児童は単位量あたり大きさの学習を通して学んだことを活用して、スープの一人あたり量を調べることができている。また、1年生と3年生のスープについても一人あたりの量を調べることができた。3年生の一人あたりの量を調べる活動では、無限小数を四捨五入しなければならない必然性が生じている。学んだばかりの知識や技能だけではなく、以前に学んできたことを必要に応じて活用しなければならない。このような活動経験が算数の有用性の実感に、より繋がっていくと考えられる。

②現実の世界における解釈

場面3から示唆されるように、四捨五入しておよその数を求めた結果である181gを吟味して、現実の世界で起こりうる誤差として捉えることも重要である。現実の世界には理想化された数値や関係ばかりがあるわけではない。算数の授業で得られた数学的結果を、可能な限り現実の世界における場面や問題に照らし合わせて解釈すること不可欠である。場面3は、数学的モデリング過程で、数学的結果を現実世界で解釈している一つの場面と言える。

③PowerPointや電卓による時間短縮

PowerPointでスライドを直接黒板に投影し、児童の意見をチョークで書き込むことで時間を短縮できた。また、児童に電卓を使用させることで、計算の時間を短縮し、児童が単位量の調べ方を議論する時間や、現実との整合性を吟味する時間を確保することができた。

5. まとめと今後の課題

(1) 得られた知見

本授業の分析・考察を通して、給食問題が小学

校における数学的モデリング教材の一つとして有用であることがわかった。また、PowerPointを利用することで児童の興味・関心の喚起や時間短縮などが可能となり、数学的モデリング実施上の問題点を解消するのに効果があることもわかった。

(2) 今後の課題

本研究の給食活動に注目した授業は一つの提案に留まる。算数科における有効な数学的モデリング教材例はまだ十分とは言えず、今後も新たな教材を開発する必要がある。また、小中連携等を視野に入れた数学的モデリング指導体系の明確化も望まれる。さらに、ICT機器が教育現場に普及していく中で、それらを利用した授業の開発も不可欠であろう。これらの課題を念頭に、今後も数学的モデリングの研究を推進する所存である。

引用・参考文献

- 池田敏和, 山崎浩二. (1993). 数学的モデリングの導入段階における目標とその授業展開のあり方に関する事例的研究. 日本数学教育学会誌, 75(1), pp. 26-32.
- 池田敏和. (2007). 数学的モデリングと算数教育. 日本数学教育学会誌, 89(4), pp. 2-10.
- 岩田栄彦. (2013). 現実的な問題を取り入れた中学校数学の指導. 山形大学大学院教育実践研究科年報, 第4号, pp. 220-223.
- 大澤弘典. (1996). 現実場面にもとづく問題解決: グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して. 日本数学教育学会誌, 78(9), pp. 16-20.
- 大澤弘典. (1998). 数学的モデル化にグラフ電卓の利用を図った教材例: テープレコーダーのカウンター問題. 日本数学教育学会誌, 80(9), pp. 30-33.
- 大室敦志, 西仲則博, 竹村景生. (2011). 中学校数学におけるICT利用による授業実践: 比例のグラフを題材として. 教育実践総合センター研究紀要, 第20号, pp. 301-305.
- 国立教育政策研究所監訳. (2004). PISA2003調査

- 評価の枠組み:OECD 生徒の学力到達度調査.
国立教育政策研究所. (2012). 全国学力・学習状況調査【中学校】集計結果質問紙調査の結果回答結果集計[生徒質問紙]全国-生徒(国・公・私立), p. 16.
- 田淵卓夫. (2007). 動き, 変わる画面で楽しく学ぶ数学指導: パワーポイントや自作ソフトを活用して. 日本数学教育学会誌, 89, 臨時増刊総会特集号, p. 248.
- 丹羽民和, 丹羽和子. (2006). パワーポイント授業の功罪: 血液形態学講義におけるFD実践.
- 三輪辰郎. (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. 筑波数学教育研究, 第2号, pp. 117-125.
- 柳本哲. (1996). 中学校における数学的モデル化について: 給水タンクを事例として. 日本数学教育学会誌, 78(5), pp. 110-117.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In T. Breiteig & I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context*. Ellis Horwood, pp.3-14.
- Ikeda, T. & Stephens, M. (1998). Some Characteristics of Students' Approaches to Mathematical Modelling in the Curriculum based on Pure. *Mathematics, Journal of Science Education in Japan*, 22(3), pp.142-154.
- Osawa, H. (2002). Mathematics of a relay: problem-solving in the real world. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the Institute of Mathematics and Applications*, 21(2), pp.85-93.

Development of teaching materials of mathematical modeling in elementary school

OSAWA, Hironori & IWATA, Hidehiko
Yamagata University

abstract

In this paper, we tried a concrete development of teaching materials of mathematical modeling in the arithmetic department. We took up "KYUSYOKU" in the theme for the fifth grader in a public elementary school, and executed the class while using PowerPoint. We analyzed it based on children's activity logs (VTR and work-sheets, etc.) in the class. As a result, the following suggestion emerged. This class that makes the KYUSYOKU a theme is effective as one teaching material of mathematical modeling in the arithmetic department.