東北数学教育学会 年報第45号　2014年3月31日

六斜術についての注意

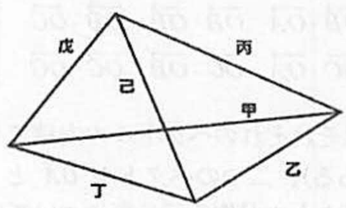
萬　伸介（宮城教育大学名誉教授）

平山諦　著「学術を中心とした　和算史上の人々」（筑摩書房）の 243 ページにある六斜に関する久留島義太が括ったと記述されている式表示について注意を述べる。三平方の定理を用いた計算（中学校における数学的活動として取り上げが可能）によって、記述の訂正が必要であることを指摘する。

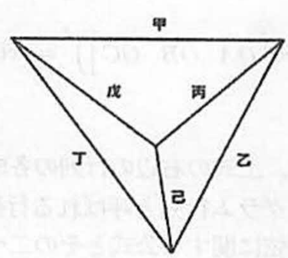
キーワード：六斜術、グラム行列式、三平方の定理、平山諦、久留島義太

1　六斜術

平山（[3]）の 242 ページの図は下の二つである。すなわち、四辺形（四つの辺、およびその辺の長さを乙、丙、丁、戊とする）の対角線およびその長さを甲、己とする。三つの辺丙、己、戊が交わる点を頂点とし、三辺甲、乙、丁の三角形を底面と考えると、[図 1］は三角錐（四面体）の平面（底面を含む平面）への投影図と見なすことができる。



［図 1］



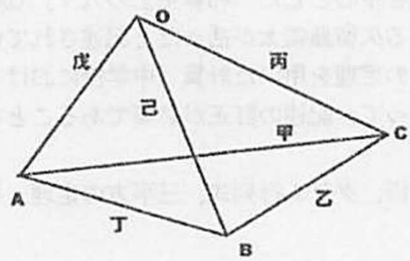
［図 2］

三角錐（四面体）の平面への投影を変えると、[図 2］の様な投影図が得られることは容易に理解できることである。甲、乙、丙、丁、戊、己という辺の名称の付け方は「大成算経」と同様であり、「大成算経」には［ 図 1］に対応する図が示されている（[5]、[6]）。このとき、六個の辺の長さの間の関係を記述するのが「六斜術」である。平山（[3]）の 243 ページと 244 ページに六斜に関する公式が示されており、菅野元健、久留島義太、建部賢明の和算家三名

によるそれぞれの式表示が紹介されている。

2　六斜術の公式：行列式を用いた証明

下の図のように、三辺丙、戊、己の共有点をO、三辺甲、丁、戊の共有点をA、三辺乙、丁、己の共有点をB、三辺甲、乙、丙の共有点をCとする。辺の名称は平山（[3]）の242ページの図に合わせた。



［図 3］

四点O、A、B、Cは空間（3次元ユークリッド空間）内の点ととらえると、相異なる三つのベクトル $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ を考えることができる。この三つのベクトルを列ベクトルとする行列の行列式の平方は

$$(*)\quad \left(\det\left[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}\right]\right)^2 = \det\begin{bmatrix} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC} \end{bmatrix}$$

と表現される。上式の右辺の行列の各成分はそれぞれのベクトルの内積で与えられている（グラム行列と呼ばれる行列である）。二つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角の余弦に関する公式とその二つのベクトルが作る三角形についての第2余弦定理より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left\{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right\}$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = \text{戊}^2$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \tfrac{1}{2}\{\text{戊}^2 + \text{己}^2 - \text{丁}^2\}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \tfrac{1}{2}\{\text{戊}^2 + \text{丙}^2 - \text{甲}^2\}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} = \text{己}^2$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\{\text{己}^2 + \text{戊}^2 - \text{丁}^2\}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\{\text{己}^2 + \text{丙}^2 - \text{乙}^2\}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC} = \text{丙}^2$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\{\text{丙}^2 + \text{戊}^2 - \text{甲}^2\}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\{\text{丙}^2 + \text{己}^2 - \text{乙}^2\}$$

が成り立つ。これより、上記（＊）式の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&\text{戊}^2\text{己}^2\text{丙}^2\\
&+(1/4)\{\text{戊}^2+\text{丙}^2-\text{甲}^2\}\{\text{丙}^2+\text{己}^2-\text{乙}^2\}\{\text{己}^2+\text{戊}^2-\text{丁}^2\}\\
&-(1/4)\,\text{己}^2\{\text{戊}^2+\text{丙}^2-\text{甲}^2\}^2-(1/4)\,\text{戊}^2\{\text{丙}^2+\text{己}^2-\text{乙}^2\}^2\\
&-(1/4)\,\text{丙}^2\{\text{己}^2+\text{戊}^2-\text{丁}^2\}^2\\
=&(1/4)\{\text{戊}^2\text{丙}^2\text{丁}^2-\text{戊}^2\text{己}^2\text{丁}^2+\text{戊}^2\text{乙}^2\text{己}^2+\text{戊}^2\text{乙}^2\text{丁}^2\\
&\quad+\text{丙}^2\text{己}^2\text{丁}^2-\text{丙}^2\text{乙}^2\text{己}^2+\text{丙}^2\text{乙}^2\text{戊}^2+\text{丙}^2\text{乙}^2\text{丁}^2\\
&\quad+\text{甲}^2\text{丙}^2\text{己}^2-\text{甲}^2\text{丙}^2\text{戊}^2+\text{甲}^2\text{丙}^2\text{丁}^2+\text{甲}^2\text{己}^2\text{戊}^2\\
&\quad+\text{甲}^2\text{己}^2\text{丁}^2+\text{甲}^2\text{乙}^2\text{己}^2+\text{甲}^2\text{乙}^2\text{戊}^2-\text{甲}^2\text{乙}^2\text{丁}^2\\
&\quad-\text{戊}^4\text{乙}^2-\text{丙}^4\text{丁}^2-\text{甲}^2\text{己}^4-\text{己}^2\text{甲}^4-\text{戊}^2\text{乙}^4-\text{丙}^2\text{丁}^4\}\\
=&(1/4)\{\text{甲}^2\text{己}^2(\text{乙}^2+\text{丙}^2+\text{戊}^2+\text{丁}^2)-\text{甲}^4\text{己}^2-\text{甲}^2\text{己}^4\\
&\quad+\text{乙}^2\text{戊}^2(\text{甲}^2+\text{丙}^2+\text{己}^2+\text{丁}^2)-\text{乙}^4\text{戊}^2-\text{乙}^2\text{戊}^4\\
&\quad+\text{丁}^2\text{丙}^2(\text{甲}^2+\text{戊}^2+\text{己}^2+\text{乙}^2)-\text{丁}^4\text{丙}^2-\text{丁}^2\text{丙}^4\\
&\quad-\text{甲}^2\text{乙}^2\text{丁}^2-\text{甲}^2\text{丙}^2\text{戊}^2-\text{乙}^2\text{丙}^2\text{己}^2-\text{丁}^2\text{己}^2\text{戊}^2\}
\end{aligned}$$

となる。さて、三つのベクトル$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$が一次従属ならば、すなわち、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$が（空間内の）一つの平面内にあるならば、上記（＊）式の左辺の行列式の値は0となる（線形代数学の教科書を参照）。いま考えている四辺形はある平面内の図形であるから

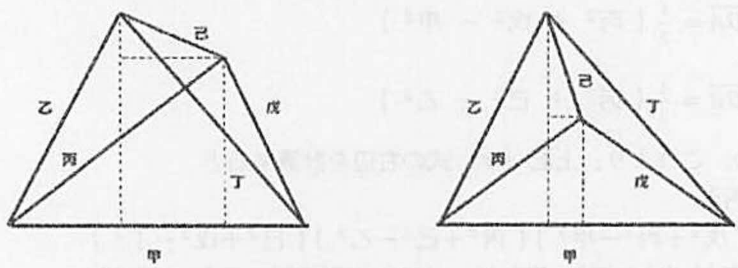
$$\begin{aligned}
(\#)\quad &\text{甲}^2\text{己}^2(\text{乙}^2+\text{丙}^2+\text{戊}^2+\text{丁}^2)-\text{甲}^4\text{己}^2-\text{甲}^2\text{己}^4\\
&+\text{乙}^2\text{戊}^2(\text{甲}^2+\text{丙}^2+\text{己}^2+\text{丁}^2)-\text{乙}^4\text{戊}^2-\text{乙}^2\text{戊}^4\\
&+\text{丁}^2\text{丙}^2(\text{甲}^2+\text{戊}^2+\text{己}^2+\text{乙}^2)-\text{丁}^4\text{丙}^2-\text{丁}^2\text{丙}^4\\
&-\text{甲}^2\text{乙}^2\text{丁}^2-\text{甲}^2\text{丙}^2\text{戊}^2-\text{乙}^2\text{丙}^2\text{己}^2-\text{丁}^2\text{己}^2\text{戊}^2\\
&=0
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。この等式（#）は平山（[3]）の243ページにある六斜に関する公式（1）である。以上の方法は平田（[1]）に従ったものである。

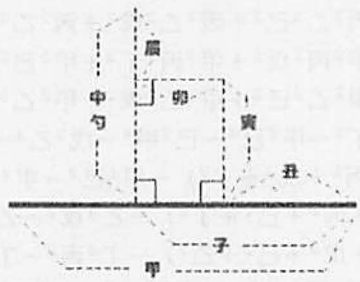
3　六斜術の公式：菅野元健の方法

菅野元健が「六斜術」（[7]）によって示した方法を、六斜の辺の名称を本論に合わせて、途中の式なども追加しながら多少丁寧に以下で紹介する。和算における図形問題の解決には三平方の定理（勾股弦の理）が強力な手法である。紹介する方法も三平方の定理（勾股弦の理）を用いたものである。

左右それぞれの図において、補助線（図の破線）を描く。



補助線について、各辺に下の図のように名付ける（補助線部分を取り出して示している）。



上図の左右の図において、右側の図において解法を説明する（左側の図の場合も同じ結果が得られるが、このことは菅野元健も指摘している）。

三平方の定理より

$$\text{丁}^2=(\text{中勾})^2+\text{子}^2 \quad \cdots ①$$

$$\text{乙}^2=(\text{中勾})^2+(\text{甲}-\text{子})^2 \quad \cdots ②$$

よって

$$\text{甲}^2+\text{丁}^2-\text{乙}^2=2\text{子甲} \quad \cdots ③$$

が成り立つ。4×①×甲^{2}より

$$4\text{甲}^2\text{丁}^2=4\text{甲}^2(\text{中勾})^2+4\text{子}^2\text{甲}^2 \quad \cdots ④$$

そして ③^{2}より

$$(\text{甲}^2+\text{丁}^2-\text{乙}^2)^2=4\text{子}^2\text{甲}^2 \quad \cdots ⑤$$

よって④−⑤より、式を整理して

$$-甲^4-乙^4-丁^4+2甲^2乙^2+2甲^2丁^2+2乙^2丁^2$$
$$=4(中勺)^2甲^2 \quad \cdots ⑥$$

が成り立つ。再び三平方の定理より

$$戊^2=寅^2+丑^2 \quad \cdots ⑦$$
$$丙^2=寅^2+(甲-丑)^2 \quad \cdots ⑧$$

が得られるから、⑦−⑧より

$$甲^2+戊^2-丙^2=2丑甲 \quad \cdots ⑨$$

が成り立つ。$4\times甲^2\times$⑦より

$$4甲^2戊^2=4甲^2寅^2+4甲^2丑^2 \quad \cdots ⑩$$

そして、⑩−⑨^{2}より

$$-甲^4-丙^4-戊^4+2甲^2丙^2+2甲^2戊^2+2丙^2戊^2$$
$$=4寅^2甲^2 \quad \cdots ⑪$$

③−⑨より、$丁^2-乙^2-戊^2+丙^2=2(子-丑)甲$ であるが、$子=卯-丑$ より

$$丁^2-乙^2-戊^2+丙^2=2卯甲 \quad \cdots ⑫$$

が成り立つ。

(注) 三線分 丙、戊、己の共有点が中勺の左側にあるならば、$子=丑-卯$であるから ⑫ 式は $丁^2-乙^2-戊^2+丙^2=-2卯甲$ となるが、⑫^2 を考えるときには符号の違いは影響しない。

三平方の定理より

$$己^2=辰^2+卯^2 \quad \cdots ⑬$$

が成り立ち、この両辺に $4甲^2$ を乗じると

$$4甲^2己^2=4甲^2辰^2+4甲^2卯^2 \quad \cdots ⑭$$

となる。⑭−⑫^2 より

$$4甲^2己^2-乙^4-2乙^2戊^2+2乙^2丙^2-丙^4$$
$$-丁^4+2丁^2乙^2+2丁^2戊^2-2丁^2丙^2$$
$$-戊^4+2戊^2丙^2=4辰^2甲^2 \quad \cdots ⑮$$

が得られる。

さて、⑥+⑪−⑮ より

$$-2甲^4+2甲^2乙^2+2甲^2丙^2+2甲^2丁^2+2甲^2戊^2$$
$$-2乙^2丙^2+2乙^2戊^2+2丁^2丙^2-2丁^2戊^2-4甲^2己^2$$
$$=4甲^2(中勺)^2+4寅^2甲^2-4辰^2甲^2 \quad \cdots ⑯$$

が成り立つ。ところで、$辰=中勺-寅$ より

$$辰^2=(中勺)^2-2(中勺)寅+寅^2$$

であるから、

$$4甲^2(中勺)^2+4寅^2甲^2-4辰^2甲^2=8(中勺)寅甲^2$$

となるから、⑯ は

$$-2甲^4+2甲^2乙^2+2甲^2丙^2+2甲^2丁^2+2甲^2戊^2$$
$$-2乙^2丙^2+2乙^2戊^2+2丁^2丙^2-2丁^2戊^2-4甲^2己^2$$
$$=8(中勺)寅甲^2$$

となり、両辺を２で割って

$$-甲^4+甲^2乙^2+甲^2丙^2+甲^2丁^2+甲^2戊^2$$
$$-乙^2丙^2+乙^2戊^2+丁^2丙^2-丁^2戊^2-甲^2己^2$$
$$=4(中勺)寅甲^2 \qquad \cdots ⑰$$

が成り立つ。

さて、$⑰^2$より項を整理して

$$甲^8+甲^4乙^4+甲^4丙^4+甲^4丁^4+甲^4戊^4$$
$$+乙^4丙^4+乙^4戊^4+丙^4丁^4+丁^4戊^4+4甲^4己^4$$
$$-2甲^6乙^2-2甲^6丙^2-2甲^6丁^2-2甲^6戊^2$$
$$+4甲^4乙^2丙^2+4甲^4丁^2戊^2+4甲^6己^2$$
$$+2甲^4乙^2丁^2-2甲^2乙^4丙^2+2甲^2乙^4戊^2-4甲^4乙^2己^2$$
$$+2甲^4丙^2戊^2-2甲^2乙^2丙^4+2甲^2丙^4丁^2-4甲^4丙^2己^2$$
$$+2甲^2丙^2丁^4-2甲^2丁^4戊^2-4甲^4丁^2己^2$$
$$+2甲^2乙^2戊^4-2甲^2丁^2戊^4-4甲^4戊^2己^2$$
$$-2乙^4丙^2戊^2-2乙^2丙^4丁^2+4乙^2丙^2丁^2戊^2+4甲^2乙^2丙^2己^2$$
$$-2乙^2丁^2戊^4-4甲^2乙^2戊^2己^2$$
$$-2丙^2丁^4戊^2-4甲^2丙^2丁^2己^2+4甲^2丁^2戊^2己^2$$
$$=16寅^2(中勺)^2甲^4 \qquad \cdots ⑱$$

さらに、⑥×⑪ より

$$(-甲^4-乙^4-丁^4+2甲^2乙^2+2甲^2丁^2+2乙^2丁^2)$$
$$\times(-甲^4-丙^4-戊^4+2甲^2丙^2+2甲^2戊^2+2丙^2戊^2)$$
$$=16(中勺)^2寅^2甲^4$$

すなわち

$$甲^8+甲^4丙^4+甲^4戊^4-2甲^6丙^2-2甲^6戊^2-2甲^4丙^2戊^2$$
$$+甲^4乙^4+乙^4丙^4+乙^4戊^4-2甲^2乙^4丙^2-2甲^2乙^4戊^2$$
$$-2乙^4丙^2戊^2$$
$$+甲^4丁^4+丙^4丁^4+丁^4戊^4-2甲^2丙^2丁^4-2甲^2丁^4戊^2$$
$$-2丙^2丁^4戊^2$$

$$-2甲^{6}乙^{2}-2甲^{2}乙^{2}丙^{4}-2甲^{2}乙^{2}戊^{4}+4甲^{4}乙^{2}丙^{2}$$
$$+4甲^{4}乙^{2}戊^{2}+4甲^{2}乙^{2}丙^{2}戊^{2}$$
$$-2甲^{6}丁^{2}-2甲^{2}丙^{4}丁^{2}-2甲^{2}丁^{2}戊^{4}+4甲^{4}丙^{2}丁^{2}$$
$$+4甲^{4}乙^{2}戊^{2}+4甲^{2}乙^{2}丙^{2}戊^{2}$$
$$-2甲^{4}乙^{2}丁^{2}-2乙^{2}丙^{4}丁^{2}-2乙^{2}丁^{2}戊^{4}+4甲^{2}乙^{2}丙^{2}丁^{2}$$
$$+4甲^{2}乙^{2}丁^{2}戊^{2}+4乙^{2}丙^{2}丁^{2}戊^{2}$$
$$=16寅^{2}(中勺)^{2}甲^{4} \qquad \cdots ⑲$$

が成り立つ。

よって、⑲−⑱ より

$$-4甲^{4}丙^{2}戊^{2}-4甲^{2}乙^{4}戊^{2}-4甲^{2}丙^{2}丁^{4}$$
$$-4甲^{2}乙^{2}戊^{4}-4甲^{2}丙^{4}丁^{2}-4甲^{4}乙^{2}丁^{2}$$
$$+4甲^{4}乙^{2}戊^{2}+4甲^{2}乙^{2}丙^{2}戊^{2}+4甲^{4}丙^{2}丁^{2}$$
$$+4甲^{2}丙^{2}丁^{2}戊^{2}+4甲^{2}乙^{2}丙^{2}丁^{2}+4甲^{2}乙^{2}丁^{2}戊^{2}$$
$$-4甲^{4}己^{4}-4甲^{6}己^{2}+4甲^{4}乙^{2}己^{2}+4甲^{4}丙^{2}己^{2}$$
$$+4甲^{4}丁^{2}己^{2}+4甲^{4}戊^{2}己^{2}-4甲^{2}乙^{2}丙^{2}己^{2}$$
$$+4甲^{2}乙^{2}戊^{2}己^{2}+4甲^{2}丙^{2}丁^{2}己^{2}-4甲^{2}丁^{2}戊^{2}己^{2}$$
$$=0$$

となり、共通因子の　$4甲^{2}$　を省略して整理すると

$$甲^{2}乙^{2}己^{2}+甲^{2}丙^{2}己^{2}+甲^{2}丁^{2}己^{2}+甲^{2}戊^{2}己^{2}-甲^{4}己^{2}-甲^{2}己^{4}$$
$$+甲^{2}乙^{2}戊^{2}+乙^{2}丙^{2}戊^{2}+乙^{2}戊^{2}己^{2}+乙^{2}丁^{2}戊^{2}-乙^{4}戊^{2}-乙^{2}戊^{4}$$
$$+甲^{2}丙^{2}丁^{2}+乙^{2}丙^{2}丁^{2}+丙^{2}丁^{2}戊^{2}+丙^{2}丁^{2}己^{2}-丙^{4}丁^{2}-丙^{2}丁^{4}$$
$$-甲^{2}乙^{2}丁^{2}-甲^{2}丙^{2}戊^{2}-乙^{2}丙^{2}己^{2}-丁^{2}戊^{2}己^{2}=0 \qquad \cdots ⑳$$

が得られる。

（注）菅野元健は式 ⑳ で終わりとしている。括弧を用いて式変形を行うと

$$甲^{2}己^{2}(乙^{2}+丙^{2}+丁^{2}+戊^{2})-甲^{4}己^{2}-甲^{2}己^{4}$$
$$+乙^{2}戊^{2}(甲^{2}+乙^{2}+丁^{2}+戊^{2})-乙^{4}戊^{2}-乙^{2}戊^{4}$$
$$+丙^{2}丁^{2}(甲^{2}+乙^{2}+戊^{2}+己^{2})-丙^{4}丁^{2}-丙^{2}丁^{4}$$
$$-甲^{2}乙^{2}丁^{2}-甲^{2}丙^{2}戊^{2}-乙^{2}丙^{2}己^{2}-丁^{2}戊^{2}己^{2}=0$$

となり、式（#）と一致していることが容易にわかる。

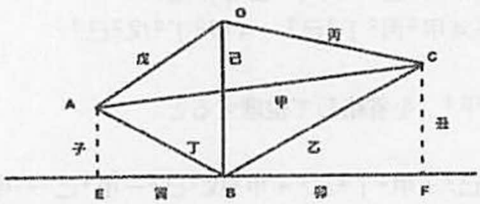
以上のようにして菅野元健は六斜の公式を得たのであるが、三平方の定理より得られた式の変形（変形は単純な方法であるが）は項数が多いので大変な努力を要すると思われる。したがって、上記のような式変形は高等学校（もちろ

ん、中学校）の授業として取り扱うことは適切でないように思われる。

4　六斜術の公式：三平方の定理を用いた別証明

以下、三平方の定理を用いた別証明を紹介する。

平面上の四辺形 OABC の四辺 OA、AB、BC、CO をそれぞれ戊、丁、乙、丙とし、それらの長さも同じ文字で表すことにする。そして、対角線 AC、OB をそれぞれ甲、己とし、それらの長さも同じ文字で表すことにする。四頂点の少なくとも一点では、その頂点でその点を通る対角線に直交する直線を描き、この直線に関して四辺形は一方の側にあることがわかる（もし、すべての頂点でこのようなことが生じないならば、四辺形の内角の大きさの和が二直角であることに矛盾する）。いま、頂点 B で対角線 OB（己）に直交する直線を描き、点 A、C それぞれからこの直線に垂線を描きそれぞれの交点を E、F とする。線分 AE、CF、EB、BF をそれぞれ子、丑、寅、卯とし、それらの長さも同じ文字で表すことにする（下の図を参照）。



［図 4］

さて、上図の∠AEB、∠OBF、∠CFB が直角であることに注目して、三平方の定理より次の式が成り立つ。

（1）　$乙^2=丑^2+卯^2$

（2）　$丁^2=子^2+寅^2$

（3）　$丙^2=(己-丑)^2+卯^2$

（4）　$戊^2=(己-子)^2+寅^2$

（5）　$甲^2=(丑-子)^2+(寅+卯)^2$

これらの式から子、丑、寅、卯を消去して、甲、乙、丙、丁、戊、己の関係式を求める。以下にその手順を示す。

（1）、（2）、（5）より

（6）　$甲^2=乙^2+丁^2-2子丑+2寅卯$

そして、（1）と（3）、（2）と（4）より

(7)　　$\text{丑己}=(1/2)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}$

(8)　　$\text{子己}=(1/2)\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}$

が成り立つ。よって

(9)　　$\text{丑}^2\text{己}^2=(1/4)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2$

(10)　　$\text{子}^2\text{己}^2=(1/4)\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$

が得られる。

そして、(1) × 己²と (9)、(2) × 己²と (10) より

(11)　　$\text{卯}^2\text{己}^2=\text{乙}^2\text{己}^2-(1/4)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2$

(12)　　$\text{寅}^2\text{己}^2=\text{丁}^2\text{己}^2-(1/4)\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$

を得る。次に、(6) × 己²と (7)、(8) より

$$\text{寅卯己}^2=(1/4)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}$$
$$-(1/2)\ \text{己}^2\ \{\text{乙}^2+\text{丁}^2-\text{甲}^2\}$$

が成り立ち、両辺それぞれの自乗を計算すると

(13)　　$\text{寅}^2\text{卯}^2\text{己}^4$

$$=(1/16)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$$
$$-(1/4)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}\{\text{乙}^2+\text{丁}^2-\text{甲}^2\}$$
$$+(1/4)\{\text{乙}^2+\text{丁}^2-\text{甲}^2\}^2$$

となる。一方、(11) と (12) の辺々同士を乗じると

(14)　　$\text{寅}^2\text{卯}^2\text{己}^4$

$$=\text{乙}^2\text{丁}^2\text{己}^4-(1/4)\ \text{乙}^2\text{己}^2\ \{\text{丁}2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$$
$$-(1/4)\ \text{丁}^2\text{己}^2\ \{\text{甲}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2$$
$$+(1/16)\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$$

よって、(13) と (14) より

(15)　　$4\text{乙}^2\text{丁}^2\text{己}^2$

$$+\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}\{\text{乙}^2+\text{丁}^2-\text{甲}^2\}$$
$$-\text{乙}^2\{\text{丁}^2+\text{己}^2-\text{戊}^2\}^2$$
$$-\text{丁}^2\{\text{乙}^2+\text{己}^2-\text{丙}^2\}^2$$
$$-\text{己}^2\{\text{乙}^2+\text{丁}^2-\text{甲}^2\}^2=0$$

が得られる。

この式の括弧を外して整理し、括り直すと前述の（#）が得られることがわかるが詳細は省略する。この方法は前述の菅野元健の式変形より数段単純化されたものになっている。これならば、中学校・高等学校の授業でも紹介できると思われる。

5　久留島義太の式表示

前述の式（１５）において

（１６）　　天＝乙^2＋己^2－丙^2

　　　　　　地＝丁^2＋己^2－戊^2

　　　　　　人＝乙^2＋丁^2－甲^2

と置き換えることは非常に自然なことだと思う。すると（１５）は

（１７）　｛４乙^{2}丁^2－人^2｝己^2＋天地人－地^{2}乙^2－天^{2}丁^2＝０

となる。久留島がどのようにして関係式を得たのかは不明であるが、上記の手順により得たと考えることは自然であると思う。下は、平山（[3]）の 243 ページにおいて久留島義太が括った式と記述している箇所である。

> 久留島義太は次のように括った.
>
> 乙^2＋己^2－戊^2＝天,　丁^2＋己^2－丙^2＝地,
> 乙^2＋丁^2－甲^2＝人
>
> とおけば,
>
> (4乙^{2}丁^2－人^2)己^2＋天地人－地^{2}乙^2－天^{2}丁^2＝0
>
> となる.
>
> 建部賢明の『大成算経』には次のように括ってある.

（注）平山（[2]）では同じ文面が 170 ページにある。

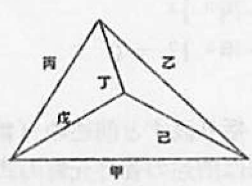
よって、この 243 ページの記述は訂正しなければならない。

さて、［図 2］で示されている図に甲の辺を下方になるよう回転し、その後に各辺の名称を

（☆）　　甲 ⇒ 甲、乙 ⇒ 丙、丙 ⇒ 戊、

　　　　　丁 ⇒ 乙、戊 ⇒ 己、己 ⇒ 丁

と変えると［図 2］は



［図 5］

となる。そして、(☆) により (#) の式は

$$(\#\#)\quad 甲^2丁^2(丙^2+戊^2+己^2+乙^2)-甲^4丁^2-甲^2丁^4$$
$$+丙^2己^2(甲^2+戊^2+丁^2+乙^2)-丙^4己^2-丙^2己^4$$
$$+乙^2戊^2(甲^2+己^2+丁^2+丙^2)-乙^4戊^2-乙^2戊^4$$
$$-甲^2丙^2乙^2-甲^2戊^2己^2-丙^2戊^2丁^2-乙^2丁^2己^2$$
$$=0$$

となる。この式の左辺を括り直し、整理して

$$\{丁^2(乙^2+丙^2+戊^2+己^2-甲^2-丁^2)-戊^2己^2\}甲^2$$
$$+\{戊^2(甲^2+丙^2+丁^2+己^2-乙^2-戊^2)-丁^2己^2\}乙^2$$
$$+\{己^2(甲^2+乙^2+丁^2+戊^2-丙^2-己^2)-戊^2丁^2\}丙^2$$
$$-甲^2乙^2丙^2$$

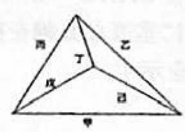
となる。この第一項を天、第二項を人、第三項を地と置くと (##) は

$$(\#\#\#)\quad 天+地+人-甲^2乙^2丙^2=0$$

となる。これは「久氏遺稿　地の巻」([4]) の「交臂術 (こうひじゅつ)」に「鼎足術三才術ト同意」として記述している内容と一致する。

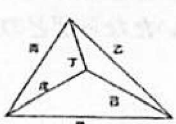
(注) 下の図版は、宮城教育大学附属図書館のご厚意により、「久氏遺稿　地の巻」の対応する箇所を筆記し、それを筆者が「Microsoft Word」により作成したものである (三角形の図は別に作成し貼り付けたものである)。

鼎足術三才術ト同意



乙巾丙巾戊巾己巾相併内
甲巾ト丁巾去余丁巾ヲ乗
内戊巾己巾相乗去余甲巾
乗天ト名ク甲巾丙巾丁巾
己巾相併内乙巾戊巾去余
戊巾乗シ丁巾己巾相乗去餘乙巾乗シ人ト名
甲巾乙巾丁巾戊巾和メ内内巾己巾去余三己
巾ヲ乗シ戊巾丁巾相乗余内巾以乗之地トス
天地人和メ左甲巾乙巾内巾相乗相消

三才術



乙巾丁巾和内減己巾余天
丙巾丁巾和内減戊巾余地乙
巾丙巾和メ内減甲巾余人乙
巾丙巾相乗四段内減人巾余
リ以丁巾乗之加天人地相乗
寄左天巾丙巾相乗地巾乙巾
相乗和メ相消

さらに、(☆) の置き換えによって式 (15) は、項の順序を変更して、

$$4乙^2丙^2丁^2$$
$$+\{乙^2+丁^2-己^2\}\{丙^2+丁^2-戊^2\}\{乙^2+丙^2-甲^2\}$$
$$-乙^2\{丙^2+丁^2-戊^2\}^2$$
$$-丙^2\{乙^2+丁^2-己^2\}^2$$
$$-丁^2\{乙^2+丙^2-甲^2\}^2=0$$

となり、（１６）と（１７）はそれぞれ

（１８）　$天=乙^2+丁^2-己^2$
$地=丙^2+丁^2-戊^2$
$人=乙^2+丙^2-甲^2$

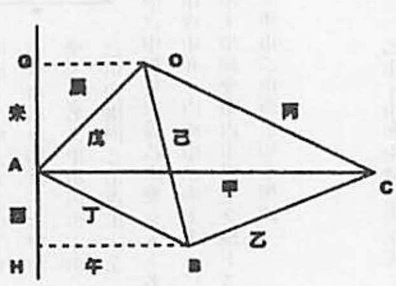
（１７）　$\{4乙^2丙^2-人^2\}丁^2+天地人-天^2丙^2-地^2乙^2=0$

となり、上記図版の「三才術」の記述と一致する。

平山（[3]）の243ページにおける久留島義太の括りをどこから引用したのかは記述されていない。東北大学デジタルコレクションの久氏遺稿の公開画像は平山蔵書の「天の巻」のみである。宮城教育大学附属図書館所蔵の「地の巻」（東北大学からの管理替図書）の対となる「天の巻」の所在は、東北大学附属図書館に調査していただいたが不明であった。訂正を要することになった理由として考えられる可能性は、「乙」、「丁」、「己」の手書きや刷りの状態を考慮するならば、これらの文字の読み違えか書き違いによる「天」と「地」の書き違いである。

6　もう一つの式表示

平面上の四辺形 OABC の頂点 B を通り辺己に垂直な直線を描く代わりに、点 A を通り辺甲に垂直な直線を描き、三平方の定理を用いたならばどのような式表示になるかを示す。



［図６］

上の図のように、点 A、B、C、D、G、H を定め、辺（および、その長さ）を

甲、乙、丙、丁、戊、己、辰、午、未、酉と定める。辰、甲、午の三つの辺は直線GHに垂直である。このとき、

（1'）　$丁^2=午^2+酉^2$

（2'）　$戊^2=辰^2+未^2$

（3'）　$乙^2=(甲-午)^2+酉^2$

（4'）　$丙^2=(甲-辰)^2+未^2$

（5'）　$己^2=(午-辰)^2+(未+酉)^2$

が成り立つ。これらの式から辰、午、未、酉を消去し甲、乙、丙、丁、戊、己の間の関係式を得るのである。その方法は、先の（6）～（14）と同様の式変形を行うことである。その結果として

（15'）
$$
\begin{aligned}
&4甲^2丁^2戊^2\\
&+\{甲^2+戊^2-丙^2\}\{甲^2+丁^2-乙^2\}\{丁^2+戊^2-己^2\}\\
&-戊^2\{甲^2+丁^2-乙^2\}^2\\
&-丁^2\{甲^2+戊^2-丙^2\}^2\\
&-甲^2\{丁^2+戊^2-己^2\}^2=0
\end{aligned}
$$

を得る。上記の式を展開・整理・括り直すと、詳細は省略するが、先の（15）と同様に（#）が得られることがわかる。

以上より、久留島義太が括ったという式表示は、どのようにして得たのかを考えるとき、先に述べた四辺形 OABC の頂点 B を通り辺己に垂直な直線を描く方法であったろうということがより強く思われる。

（注）三平方の定理より得られたいくつかの関係式から補助線として用いた線分の長さをどのようにして消去するのか、このための式変形が多少難しいところであろう。しかしながら、補助線の引きようによっては、この式変形は中学校第三学年と高等学校第一学年の生徒には充分に対応可能な内容であると考えられる。

（注）等式（#）は平山（[3]）の 243 ページにある六斜に関する公式（1）であり、この括り方は「菅野元健の著書によった。」と平山（[3]）の 243 ページに記述されているが、具体的な書名は明示されていない。辺の名称が異なるが、菅野元健「六斜術」（[7]）に同様の式表示があることは先に示した通りである。

謝辞：資料の閲覧にご協力をいただいた東北大学理学研究科　高木泉教授をはじめ、東北大学理学研究科数学専攻研究資料室、東北大学附属図書館、宮城教育大学附属図書館の職員の方々に感謝いたします。

参考・引用文献

[1] 平田浩一：六斜術とトレミーの定理の関係について、日本数学教育学会　高専・大学部会論文集　18(1)、2011 年、1－12.（愛媛大学　教育学部　数学教育講座　平田研究室ホームページより）
[2] 平山諦：学術を中心とした　和算史上の人々、東西数学シリーズ；9、富士短期大学出版部、1965 年（東北大学附属図書館所蔵）
[3] 平山諦：学術を中心とした　和算史上の人々、ちくま学芸文庫、筑摩書房、2008 年
[4] 久留島義太：久氏遺稿　地の巻、和算全集　第五篇一部三冊ノ内一、澤村写本堂、1934 年（宮城教育大学附属図書館所蔵、「宮城県立師範学校図書印」有り、「部類書号　数学、同書番号　132、一部冊数　3、昭和 10 年 3 月 10 日、宮城県女子師範学校」という小紙が表紙に添付）
[5] 関孝和　他編：大成算経、寛政 2 年、写本（狩野 7-31453)、（東北大学デジタルコレクションの画像、50 件の大成算経中 25 番目の資料、全 920 件中の 433 件目、434 件目などの画像）
[6] 関流和算書大成　関算四伝書影印　第四巻：後四十五　大成算経　十、東アジア数学史研究会　編、勉誠出版、2010 年、（東北大学理学研究科　数学専攻研究資料室所蔵）
[7] 菅野元健：六斜術、写本（岡本写 0494)、（東北大学デジタルコレクションの画像）

Notes on Rokusyajutsu

YOROZU　Shinsuke
(Professor Emeritus, Miyagi University of Education)

Abstract：We give a remark on Rokusyajutsu formula in the book [3, p.243] by HIRAYAMA　Akira. We show the Kurusima's formula of Rokusyajutsu by application of the Pytagorean theorem(We wish to adopt our calculation for mathematical activities in junior high schools). As a result, we must revise the Kurusima's formula in the book[3, p.243].

Keywords：Rokusyajutsu,　Gramian,　Pytagorean theorem,
HIRAYAMA　Akira,　KURUSIMA　Yoshihiro