

場合の数にみられる 2 つの指向性思考の考察 —教科書記述の分析—

佐藤 学

(秋田大学教育文化学部)

椎名 美穂子

(秋田県教育庁義務教育課)

要約

これまで実施した調査において、第 4 学年と第 5 学年の児童に、可能な手段として「先頭を固定する考え」と「ペアをつくる考え」を用いる傾向が顕著に見られた。この 2 つの考えが出現する背景を、教科書の記述分析から読み取る。その結果、「先頭を固定する考え」の場合は教科書の記述が多くあり、算数・数学の学習経験が強固な経験や知識を形成していると断定するに至った。一方、「ペアをつくる考え」の場合は教科書の記述が少いこと、また記述の現れ方が椎名の調査と合致していないことから、「ペアをつくる考え」の場合、算数・数学の学習経験が強固な経験や知識を形成しているとはいえないと結論づけた。

検索語：指向性思考，教科書，先頭を固定する考え，ペアをつくる考え

1. はじめに

小学校算数第 6 学年「場合の数」は、不確定事象に対する的確な判断の必要性や国際的通用性の見知により、中学校数学「資料の活用」領域と関連して、10 年ぶりに再登場した内容である。

「場合の数」を小学校第 6 学年で指導することはこれまでと同じだが、先に挙げた見知に立つとさらに早めることの可能性もあり得る。この可能性について、椎名 (2013) は、児童の実態調査に取り組み、第 4 学年と第 5 学年の児童にて「先頭を固定する考え」と「ペアをつくる考え」を用いる傾向が顕著に見られた。

本稿では、この顕著に見られた 2 つの考えが出現した理由を教科書の記述から読み取ることとした。

2. 2 つの指向性思考「先頭を固定する考え」と「ペアをつくる考え」の存在

椎名 (2013) は、図 1 の問題 (並べ方) を作成し、公立 3 小学校の第 1 学年から第 5 学年 (各学年 100 ~ 130 人の児童) を対象に調査を行っている。

正答率は、第3学年から70%を超えるという傾向がみられた。児童の解決過程の表現に着目すると、正答、誤答のいずれの場合でも、「ペアをつくる考え」、「先頭を固定する考え」が多いという興味深い傾向がみられた。

2. 研究の内容

(1) 2つの指向性思考「先頭を固定する考え」と「ペアをつくる考え」の存在

椎名(2013)は、図1の問題(並べ方)を作成し、公立3小学校の第1学年から第5学年(各学年100～130人の児童)を対象に調査を行っている。

まず、正答率は、第3学年から70%を超えるという傾向がみられた。児童の解決過程の表現に着目すると、正答、誤答のいずれの場合でも、「ペアをつくる考え」、「先頭を固定する考え」が多いという傾向がみられた。

「ペアをつくる考え」とは、図1の問題を例にすると、3枚から「1」と「2」を選んで「12」と「21」をつくる、「2」と「3」を選んで「23」と「32」をつくるというものである。2つの数字をペアにして、それぞれを入れ替えていけば全部の場合をつくることができるという考えがあるように解釈したものである。(図2参照)

一方、「先頭を固定する考え」だが、これも図1の問題を例にすると、3枚から1枚をまず選びこれを十の位(先頭)に固定し、残りの一の位を考えるというものである。初めに選ぶ1枚を「1」にした場合は、「12」と「13」をつくり、初めに選ぶ1枚を「2」にした場合は、「21」と「23」をつくるというものである。先頭を固定して、残りの部分を入れ替えていけば全部の場合をつくることができるという考えがあるように解釈したものである。(図3参照)

1から3までのカードがあります。

① ② ③

この3枚のカードから2枚を使って、2けたの数をつくります。

2けたの数を全部書きましょう。
また、全部でいくつありますか。

図1：並べ方の問題

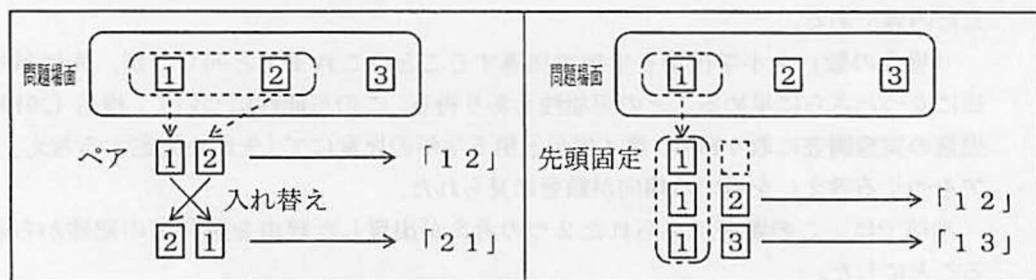


図2：ペアをつくる考え

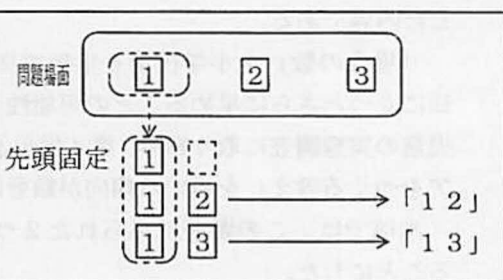


図3：先頭を固定する考え

低学年では他の考えも見られたが、学年が上がるにつれ、「ペアをつくる考え」と「先頭を固定する考え」に淘汰される傾向がみられた。また、「ペアをつくる考え」から「先頭を固定する考え」へ、「先頭を固定する考え」から「ペアをつくる考え」へと、途中で解決過程の表現が変わるという傾向がみられた。この傾向は、特に、誤答したものによく

みられた。「ペアをつくる考え」、「先頭を固定する考え」が必ずしも一貫して示されるということではない。今の状態から到達したい状態へと見通したとき、過去の経験や既存の知識の中から可能な手段を選び探索しているとも解釈し、「ペアをつくる考え」と「先頭を固定する考え」を指向性思考とよぶことにする。指向性思考は、多くの児童にみられる思考ではあることから、強固な過去の経験や既存の知識結果が背景に存在しているのではないかと考えられる。しかし、一貫してとり続けられる思考でないことから、経験的なものであって、論理的なものではないと考えることができる。

(2) 強固な過去の経験や既存の知識を探る

そこで、指向性思考を働かせる際の強固な過去の経験や既存の知識の背景を探るべく、本稿では教科書の記述分析から行うことにした。教科書とは「教育課程の構成に応じて組織排列された主たる教材」（文部科学省、下線は筆者による）とある。文中の「主たる教材」とある以上、学力の向上に直接的に働きかける有力なもの1つといえる。

教科書の記述分析については、

- ・ 「ペアをつくる考え」、「先頭を固定する考え」について、問題や活動、まとめなどの記述を抽出する。
- ・ 抽出する記述内容は、全ての児童が経験することを前提とし、活動や思考の深まりに期待するようなものは抽出しない。
- ・ 「ペアをつくる考え」、「先頭を固定する考え」を意図したものでなくとも、経験として潜在する可能性があるものは抽出する。

の3点に留意して行った。調査の対象とした教科書は、平成23年検定済の小学校算数教科用教科書6社である。

3. 教科書の記述分析と考察

(1) 「ペアをつくる考え」の記述

「ペアをつくる考え」の記述としては、2つの事柄を相違とみるもの、相等とみるものの2種類であった。そのうち、2つの事柄を相違とみるものとしては、例えば、

- ・ 「 $\square \times 4$ 」と「 $4 \times \square$ 」の式表現の違いと問題場面の違いを考える問題（第3学年／数量関係）
- ・ 長方形や平行四辺形を対角線で切り分けた2つの合同な図形を並び替え、いろいろな図形をつくる活動（第4学年／図形、図4参照）
- ・ 台形や平行四辺形、ひし形の対角線の引き方を考える問題（第5学年／図形）

がみられた。2つの事柄を相違とみるものは、全体で35点（6社合計）と数が少なく、低学年には記述がなく、第3学年以降で記述がみられるという傾向であった。領域は図形が多く、僅かに数と計算、数量関係がみられたという傾向である。

一方、2つの事柄を相等とみるものは123点（6社合計）と多くみられ、低学年の方に多くの記述がみられ、高学年の方に少ないという傾向であった。そのうち、2つの事柄

を相等とみるものとしては、例えば、

- ・ 具体物（絵）と数字，半具体物（ブロック，タイル）と数字，数図と数字を対応させる問題（第1学年／数と計算）
- ・ 5の合成・分解を調べる活動（第1学年／数と計算，図5参照）
- ・ 加法に関して成り立つ性質（第2学年／数と計算）
- ・ 数本ある直線の中から平行な2つの直線や垂直に交わる2つの直線を調べる活動（第4学年／図形）
- ・ 2つの図形を合同であるか調べる活動（第5学年／図形）

がみられた。領域は数と計算が多く，僅かに図形がみられたという傾向である。

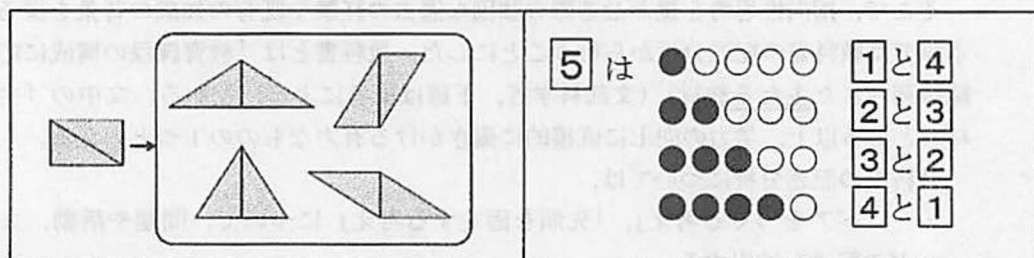


図4：対角線で切り分けた2つの合同な図形を並び替え

図5：5の合成・分解を調べる活動

(2)「先頭を固定する考え」の記述

「先頭を固定する考え」の記述としては，基点を左側にとることを明示しているもの，順序性を明示しているもの，位取りの3種類であった。そのうち，基点を左側にとることを明示しているものとしては，例えば，

- ・ 数直線の基点（第1学年～第4学年／数と計算）
- ・ 測定操作の基点（第1学年～第4学年／量と測定，図6参照）
- ・ テープ図に対応する数直線の図の基点（第3学年～第6学年／数と計算）
- ・ 変わり方の表の基点（第4学年～第6学年／数量関係）
- ・ グラフの基点（第3学年～第6学年／数量関係）

がみられた。基点を左側にとることを明示しているものは，全体で414点（6社合計）と数が多く，若干の偏りはあるものの全学年に記述がみられる。領域としては数と計算，量と測定，数量関係に多く，図形にはみられないという傾向である。

次に，順序性を明示しているものとしては，例えば，

- ・ 数系列（第1学年～第4学年／数と計算）
- ・ 数直線（第1学年～第4学年／数と計算）
- ・ 測定器の目盛り（第1学年～第3学年／量と測定）
- ・ 棒グラフの降順への並び替え（第3学年／数量関係，図7参照）

がみられた。順序性を明示しているものは，全体で96点（6社合計）であった。領域と

しては数と計算に多く、量と測定、数量関係にもみられた。

最後に、位取りを明示しているものについては、例えば、

- ・ 2位数の大小比較 (第1学年/数と計算)
- ・ 4桁の数づくり (第3学年/数と計算, 図8参照)
- ・ 10倍した数, 100倍した数, 1/10, 1/100した数 (第5学年/数と計算)

がみられた。位取りを明示しているものは、全体で88点(6社合計)であった。領域としては数と計算だけである。

結果として、「先頭を固定する考え」の明示は、「ペアをつくる考え」の明示に比べ、圧倒的な数で存在するという傾向であった。

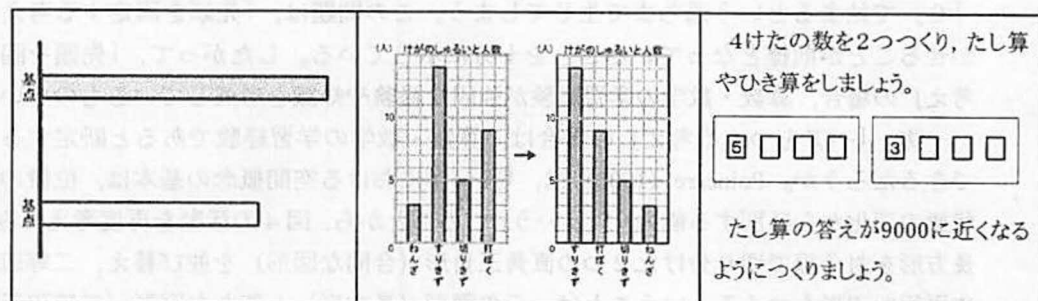


図6：基点を左側にとることの明示

図7：順序性の明示

図8：位取りの明示

(3) 教科書記述にみる「ペアをつくる考え」と「先頭を固定する考え」の現れ方の違い

指向性思考を働かせる際の強固な過去の経験や既有的知識の背景を教科書の記述分析に求めてみたが、「先頭を固定する考え」の記述と「ペアをつくる考え」の記述には、数量的な差違が大きくみられた。

「先頭を固定する考え」の記述が多いことは、算数・数学が明治の学制公布以来、和算を改め洋算を導入し、欧米の「横書き」という様式文化を受け入れてきたことに行き着くと考える。古代エジプトに起源があるこの「横書き」という様式文化の中で、数学は考えられ、数学は書き留められ、数学は受け継がれてきた。「横書き」の様式文化にも制約なり不備なりとあるが、この様式文化の中で数学は考えること、表現することを選び、それらを磨いてきたのである。

数を記述するとき、その始まりはその数の仕組みで一番大きな位の数字から記述していく。計算式の約束の最も基本は、「左側から計算していく」である。これらの例を挙げるまでもなく、教科書やノートなどの紙面におけるスペースの左端と右端には、始まりと終わりの関係がある。これを直接的に指導しているのは位取り記数法だけであるが、我々は、基点を左側にとること、順序よく並べることなども、隠れた数学文化として指導しているのである。このことが慣習化されていることを踏まえ、左端を先頭として固定する考えを働かせることを期待している記述として、図9の問題がある。

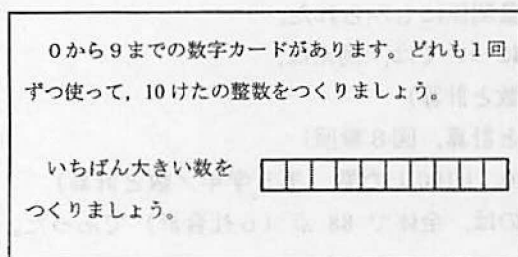


図9：先頭を固定する考えが働くことを意図した問題

「0」で始まるという過ちまで生じてしまう。この問題は、「先頭を固定する考え」を働かせることが前提となっていることを十分に示している。したがって、「先頭を固定する考え」の場合、算数・数学の学習経験が強固な経験や知識を形成しているものといえる。

一方、「ペアをつくる考え」の場合は、算数・数学の学習経験であると断定することができるだろうか。Poincare (1905) は、「幾何学における空間概念の基本は、位置の変化を状態の変化から区別する能力」だという。このことから、図4の活動を再度考えてみると、長方形を対角線で切り分けた2つの直角三角形（合同な図形）を並び替え、二等辺三角形や平行四辺形をつくるということは、元の図形（長方形）と新たな図形（二等辺三角形または平行四辺形）を別々の図形として区別することができるからである。その意味では、図4の活動は強固な経験や知識としてみることもできる。しかし、「先頭を固定する考え」の記述に比べると抽出した数は圧倒的に少ない。また、「ペアをつくる考え」のうち、「2つの事柄を相違とみる」ものが第3学年からしか明示されていない。これは、椎名の調査結果（第4学年で大幅に増え、第4学年と第5学年では有力な考えの1つとなるという実態）と合致しない。したがって、「ペアをつくる考え」の場合、算数・数学の学習経験が強固な経験や知識を形成しているものとは言い難い。今後は、日常生活や他教科の学習など、算数・数学以外の要因も検討していく必要がある。

4. 今後の課題

「ペアをつくる考え」という指向性思考を働かす強固な過去の経験や既存の知識の背景を探るべく、算数・数学の学習経験に加え、日常生活や他教科の学習などにもその要因を求めて検討していくことが必要である。

今回の分析調査と、「ペアをつくる考え」という指向性思考を働かす強固な過去の経験や既存の知識を踏まえ、調査問題を再度開発し、児童の指向性思考の実態を明らかにすることが、次の課題である。

本稿は、2名による共同研究である。総括と第2章から第4章は、佐藤が担当した。そして、第1章および第2章、第4章については椎名が担当した。

〈引用・参考文献等〉

椎名美穂子(2013),「場合の数における児童の試行的な思考操作からの考察」,日本数学教育学会誌第95回大会特集号, p.158

文部科学省,「1.教科書とは」,文部科学省ホームページ(www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kyoukasho/gaiyo/04060901/001.htm, 2014年5月確認。)

文部科学省検定済教科書小学校算数科用

- ・藤井斉亮・他(2011),「あたらしいさんすう1」～「新しい算数6下」,東京書籍
- ・橋本吉彦・他(2010),「たのしいさんすう1」～「たのしい算数6下」,大日本図書
- ・一松信・他(2010),「みんなとまなぶしょうがっこうさんすう1ねん」～「みんなと学ぶ小学校算数6年下」,学校図書
- ・小山正孝・他(2010),「しょうがくさんすう1ねん」～「小学算数6年下」,日本文教出版
- ・澤田利夫・他(2010),「しょうがくさんすう1」～「小学算数6下」,教育出版
- ・清水静海・他(2010),「わくわくさんすう1」～「わくわく算数6下」,新興出版社啓林館

Poincare,H. (1905), *La valeur de la science*.Flammarion. (田辺元訳,「科学の価値」,岩波文庫)

資料 (抜粋: A社)

		1年	2年	3年	4年	5年	6年
ペアをつくる 考え 位置関係の可 逆性	相等	<ul style="list-style-type: none"> ・具体物と数字、半具体物と数字、5以下(6) ・4と5の分解・合成(8) ・具体物と数字、半具体物と数字、6以上(10) ・6～7の分解・合成(22～28) ・具体物と半具体物の組み合わせ(32) ・式と問題(42、51) ・計算カードの加数・被加数(43) ・式と答えの組み合わせ(47) 	<ul style="list-style-type: none"> ・加数・被加数の入れ替え(上43) ・被減数の差し入れ替え(上47) ・問題文・図・式の対応(上99) ・図とかけ算の対応(下22、58) ・九九表における乗法に関してなり立つ性質(下52) 	<ul style="list-style-type: none"> ・等分除・包含除の式表示の統合(上20) ・式からの問題づくり(上23) 	<ul style="list-style-type: none"> ・長方形の面積公式(上86) ・垂直な直線や平行な直線の見分け(下22～25) ・いくつかある直線から垂直な直線や平行な直線の取出し(下28) ・平行四辺形の向かい合った辺や角について(下31) ・四角形の敷き詰め(下36、37) ・直方体、立方体の面の写し取りの対応関係(下85) ・展開図の対応関係(下88) ・面や辺の平行と垂直(下90～92) 	<ul style="list-style-type: none"> ・乗法の性質(乗数と被乗数の入れ替え)(上56) ・合同な図形をみつける問題(上62) ・対応する頂点、辺、角(上64) 	<ul style="list-style-type: none"> ・線対称な図形における対応する線、点(上9) ・点対称な図形における対応する線、点(上13) ・乗法の計算の決まり(上48) ・円の面積の公式の考え方(下7)
	相違		<ul style="list-style-type: none"> ・4×5、5×4の違い(下17) ・1mからの違い(下64) 	<ul style="list-style-type: none"> ・まとまりを考える問題(下52) 	<ul style="list-style-type: none"> ・かんの合計個数をおよそ100のまとまりをつけて見積もる(下14) 	<ul style="list-style-type: none"> ・台形を1つの対角線で分けた後の三角形について(上65) ・三角形の面積において底辺の位置によって高さが決まる性質(下6) 	<ul style="list-style-type: none"> ・逆数(上32) ・組み合わせ(下24) ・4つあるうち2つ使う場合の数(下28)
	2つの事柄		<ul style="list-style-type: none"> ・2の段と3の段の2つの事柄(下57) 			<ul style="list-style-type: none"> ・二つの物を比べる時の表の書き方(下77) 	<ul style="list-style-type: none"> ・偶数と奇数(上87) ・2つの数の公倍数、最小公倍数(上89) ・2つの数の約数と最大公約数(上94) ・棒グラフと円グラフを読み取って解く問題(下56)
先頭を固定する考え	基点の決定	<ul style="list-style-type: none"> ・順序数の基点(18) ・増加の基点(40) ・求差の基点(48) ・数直線の基点20以下(58) ・数系列の基点20以下 ・長さの直接比較の基点(66) ・数系列の基点100以下 	<ul style="list-style-type: none"> ・遊び調べの表の基点(上8) ・ものさしの基点の決定(上30) ・テープ図の基点(上32、36) 	<ul style="list-style-type: none"> ・2本のロープ図の基点(上24) ・数図と数直線の基点(上42、44) ・数直線の基点1億以下(上67) ・時計と数直線の基点(上81) ・テープ図の基点(上100) 	<ul style="list-style-type: none"> ・折れ線グラフの基点(上61) ・長さの違うテープを比べる時の基点(下66) ・テープ図に対応する数直線の基点(下70) ・変わり方の表(下78) ・変わり方の問題場面の基点(下79) 	<ul style="list-style-type: none"> ・体積と比例の表の基点(上25) ・リボン図と数直線の対応図の基点(上31) ・小数倍を考える図の基点(上40) ・小数÷小数を考える図の基点(上45) ・1Lあたりの重さを考え 	<ul style="list-style-type: none"> ・2本の数直線の基点(上27) ・面積図とそれに対応する数直線の基点(上28、29) ・2本のテープ図の基点(上34) ・問題解決の図の基点(上35)

	<ul style="list-style-type: none"> 数直線の基点120以下(121) 数直線の基点120以下(124) 数系列の基点120以下(125) 2つの数の大小を比べる時の基点(138) 	<ul style="list-style-type: none"> 1000以下の数直線の基点(上66) 増加の基点(上101~103) 倍の基点(下7) 乗数・被乗数の入れ替え(下17) 乗数が変わる乗法(下58) ものさしの基点(下63) 長さの基点(下65) 	<ul style="list-style-type: none"> 下39~41) 分数の数直線(下43~45) 棒グラフの基点(下60、86) 表の基点(下65) テープ図に対応するものさしの基点(下70) 少数の数直線(下71) 少数と分数の数直線(下72) 	<ul style="list-style-type: none"> 位置の表し方(下94) 	<ul style="list-style-type: none"> 図の基点(上47) 偶数と奇数を考える数直線の基点(上87) 倍数を考える数直線の基点(上88) 2つの数の公倍数を比べる数直線の基点(上92) 分数の数直線の基点(上101) 3地点の距離を比べる問題(上109) 分数、小数を数直線に表す基点(上110) 面積図の基点(上111) 高さや面積の対応表の基点(下15) 割合を表す数直線の基点(下42) 百分率の数直線の基点(下46) 小数と百分率、歩合の対応表(下47) 帯グラフ、円グラフのかき方の基点(下53) 直径と円周の対応表の基点(下71) 	<ul style="list-style-type: none"> 面積図とそれに対応する数直線の基点(上42) xとyの値の対応表の基点(上54、55) 2本のテープ図の基点(上62) 場合の数の対応表の基点(上88) 速さ、道のり、時間の関係を考える数直線の基点(上98) 変わり方の表(上104) 比例の関係を調べる表の基点(上108) 反比例の関係を調べる表の基点(上123) 変わり方の表の基点(下22) 組み合わせの表の基点(下26) リレーの走順の考え方の基点(下27) 資料を数直線に表す時の基点(下39) ちらばりのようすを示す表の基点(下40) 柱状グラフ(下41) 2つの項目を同時に表すグラフ(下44) 量の単位の仕組みを示す表(下52)
順序性	<ul style="list-style-type: none"> 数直線の読み20以下(58) 数系列の完成20以下(58) 数系列の完成100以下(119) 数直線の読み120以下(124) 数系列の完成120以下(125) 	<ul style="list-style-type: none"> ものさしによる測定(上30) 数直線の読み(上66) 計算の順序(上104) 	<ul style="list-style-type: none"> 巻尺による測定(上86) 計算の順序(上102) 	<ul style="list-style-type: none"> 計算の順序(上51) 棒グラフの並び方(下7) 表に多い順に並べようという問題(下59) 見取り図の書き方(下87) 		

位取り	<ul style="list-style-type: none"> ・くり上がりのある足し算 (78) ・くり下がりのある引き算 (94) 	<ul style="list-style-type: none"> ・100の位の数 (上63) ・数の大小 (上68) ・L・DL・MLの関係 (上77) ・2位数同士のくり上がりのある足し算 (上89) ・3位数と2位数のくり下がりのある引き算 (上94) ・10のまとまりが10個以上ある (下77) 	<ul style="list-style-type: none"> ・3位数同士の足し算のくり上がり (上49) ・3位数同士の引き算のくり下がり (上54) ・1の位から1億の位までの関係 (上66) ・数の大小 (上67) ・10倍した数 (上69) ・100倍した数 (上70) ・10で割った数 (上71) ・くり上がりの計算 (下17~19) ・単位の関係 (下37) ・はしたの大きさと小数 (下69) ・1Lと0.2Lの配置 (下70) 	<ul style="list-style-type: none"> ・一の位から兆の位までの数 (上40.41) ・10倍した数、10でわった数 (上43) ・100~1億倍を用いた計算の工夫 (上45) ・1と0.1, 0.01, 0.001の関係 (上73) ・少数の筆算 (上77) ・概数における四捨五入 (下5) ・整数の計算のまとめ (下18~21) ・わり進む筆算 (下51) 	<ul style="list-style-type: none"> ・整数と小数の小数点の位置の変化 (上6~9) ・小数×小数の計算の考え方 (上32) ・小数÷小数の筆算の仕方 (上48) 	
数づくり				<ul style="list-style-type: none"> ・13ケタの数づくり (上43) ・1~6の数を用い、概数にしたときに130000になる整数づくり (下12) 	<ul style="list-style-type: none"> ・小数点以下がある数の一番大きい数、小さい数 (上10) 	<ul style="list-style-type: none"> ・3ケタの整数づくり (下27) ・「0」を含む整数づくり (下28)

Two directed thinking seen in the Permutation

— Analysis of elementary school mathematics textbooks —

Faculty of education and human studies, Akita University

SATO, Manabu

Akita Prefectural Government, Department of Education

SHIINA, Mihoko

Key Words : directed thinking, elementary school mathematics textbooks, idea of determine the first, idea of make a pair

In past surveys, 4th grade & 5th grade children was seen significantly tend to use idea of determine the first & idea of make a pair. The occurrence reason of two ideas I analyze from elementary school mathematics textbooks.

There was much to textbook of idea of determine the first. I thought that mathematics learning experience is to form an idea of determine the first. Idea of make a pair was less in textbooks. This analysis and Shiina survey (2013) did not matching. Idea of make a pair were considered not to have been formed by the mathematics of learning experience.