東北数学教育学会　年報第46号　2015年3月31日

「欠落角の課題」の教材としての可能性

大 澤 弘 典
山形大学大学院教育実践研究科
hiro@e.yamagata-u.ac.jp

要　約

欠落角の二等分線を求める課題に係わって数学的な内容面から分析・考察し，中学校における数学の教材としての可能性を探究した。その結果，次のことが分かった。(1)欠落角の二等分線を求める課題の解決は多様であり，生徒が図形についての知識を深める教材になりうる。(2)また，欠落角の二等分線を求める課題の解決過程においてミスコンセプション（何らかの論理的な根拠に基づく誤りのある考え）が少なからず発生しやすく，生徒が論証力を高めるのに有効な教材になりうる。

キーワード：欠落角，二等分線，教材，活動傾向

1．研究の目的と方法

本研究の目的は，欠落角の二等分線を求める課題に係わって数学的な内容面から分析・考察し，中学校における数学の教材としての可能性を明らかにすることである。主な本研究課題としては，次のようなものを挙げることができる。

・欠落角の二等分線を求める課題の解決方法として，具体的にどのようなものが考えられるか。

・欠落角の二等分線を求める課題の解決過程で，生徒の活動傾向としてどのようなミスコンセプション等が生じうるか。

これらの研究課題に応じるために次の研究方法を採用した。山形大学大学院教育実践研究科における数学教育セミナー（2014年6月～12月まで毎月1回実施，筆者・大学院生4名・学部生2名の計7名構成）でのプレゼンテーションを利用する。具体的には，欠落角の二等分線を求める課題に係わって数学的な内容面から分析・考察した内容をプレゼンテーションで筆者が発表する。そこでの質疑を通して本研究の妥当性を図る作業を重ね，得られた知見を本稿にまとめる。

2．「欠落角」に係わる先行事例

本研究で取り上げる欠落角(missing angle)とは，次の図1左端のように角の頂点付近が欠けている角のことを指す。

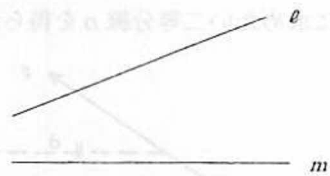


図１：欠落角の例

角の辺ℓ及びmをそのまま延長して角の頂点を求めることができない条件のもとで，欠落角の二等分線を定規及びコンパスのみで作図する課題（以下,「欠落角の課題」と略記する）は，これまでにも図形領域の指導に係って実施されている（内海他 1993；森川, 2006 など）。

例えば，内海ら(1993)は欠落角の課題を図形の移動における指導で採用している。そこでは生徒に欠落角の課題に対して解決方法を色々と考えさせ，多くの方法に共通する変換の考え（解決に都合のよい位置へ図形を移動させる等）を明確にし，移動の仕方の学習に発展させている。なお，次に掲げる図２は内海らの提示課題例である。黒板の端に書かれた欠落角の場面を意図的に提示することで，角の辺をそのまま延長して求めることができないという条件の必然性を生徒に感じさせている。課題提示における一つの工夫として参考になる。

【提示課題例】

下図のように角の頂点近くが欠けている。この角の二等分線を角の辺をこのまま延長して角の頂点を求めることができないとき，どのようにして作図すればよいか。

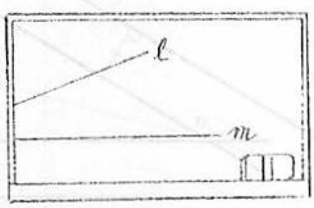


図２：欠落角の提示課題例（内海他, 1993, p. 10）

２．「欠落角の課題」の解決方法

欠落角の課題の解決方法として，具体的にどのようなものが考えられるか。想定しうる生徒の具体的な解決方法を数学的な内容面から分析・考察する。

（１）平行移動の利用

図形の平行移動を念頭に，角の辺の一方を解決のしやすい位置まで移動させれば，次図３のような作図方法が一つの解決となる。最初に，角の辺ℓを水平方向に右へ距離ｄ平行移動させたℓ'をひく。続いて，ℓ'ともう一方の角の辺mより作られる角を二等分する線n'をひく。このn'を水平方向に左へ距離ｄ平行移動した

線をひけば，最終的に求めたい二等分線 n を得られる。

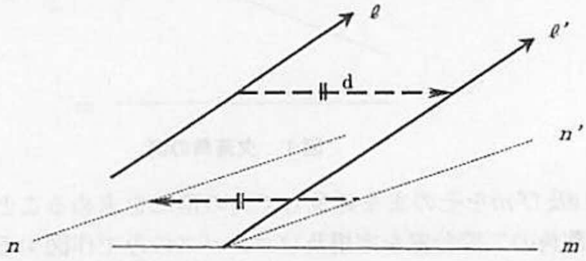


図３：平行移動による作図①

また，次図４のように角の辺ℓ及び m の両方を平行移動させる解決方法も考えられる。図４では角の辺ℓ及び m をそれぞれ適当に平行移動させてℓ'と m' の交点０を見出している。ただし，ℓとℓ'の幅（距離）と，m と m' の幅は等しい条件下での平行移動である。続いて，ℓ'と m' のなす角（頂点０）の二等分線をひけば，最終的に求めたいℓと m のなす角の二等分線 n を得られる。この作図が数学的に正しいことは，下図５のような直角三角形の合同（△0XY≡△0ZY）や円と接線の性質等を根拠に証明できる（図４のℓ'と m' の交点０を図５の円０の中心とも見なせることから円と接線の性質が利用できる）。

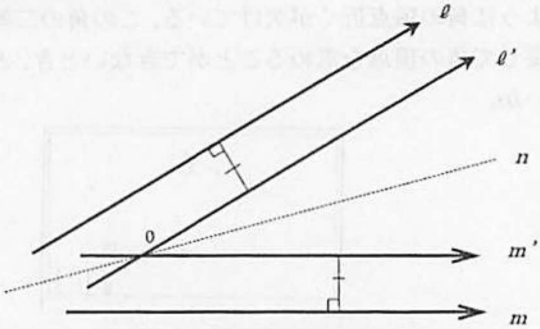
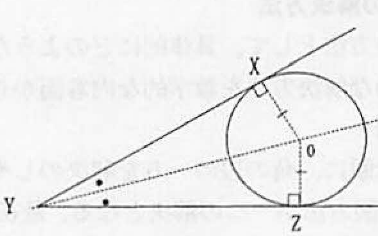


図４：平行移動による作図②



（点 X, Z は円０の接点，∠XY0＝∠ZY0，XY=ZY）

図５：円と接線に係わる性質

（2）対称移動の利用

前述２(1)のような平行移動ではなく，対称移動を拠り所に欠落角の課題を解決することも可能である。例えば，次図６のように角の辺m上の適当な点Hから垂線をひき，もう一方の角の辺ℓとの交点をＡとする。次に，垂線ＡＨを線対称の軸に見立て欠落角の頂点０の対称移動を考える。すなわち，∠OAH＝∠BAH となる点Ｂをm上に作図する。続いて，∠ABH の二等分線をひきＡＨとの交点Ｃを作図する。このとき，点Ｃは欠落角∠AOB の二等分線n上の点となる。同様に，点Ｃとは異なるn上の別な１点を作図し，点Ｃと結ぶなどにより最終的な解決となる。

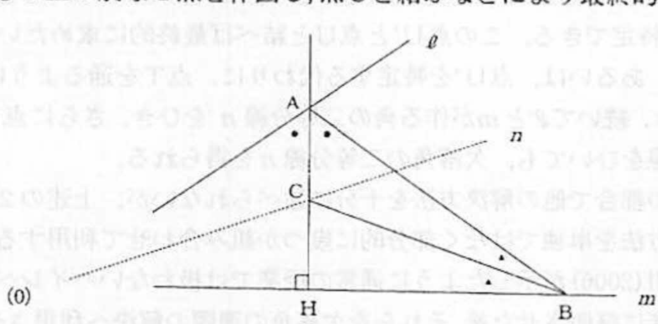


図６：対称移動による作図

（３）ひし形の性質等の利用

欠落角の課題に対して，図形の持つ固有な性質を利用することもできる。例えば，次図７のようにひし形の性質及び平行線の性質（錯角が等しい等）の利用によって作図可能である。具体的な作図の手順としては，最初に図７で角の辺m上に適当な点Ｐを取る。次に，点Ｐを通りℓに平行な直線ℓ'をひく。続いて，点Ｐを頂点としてmとℓ'のなす角（欠落角側）の二等分線をひき，角の辺ℓとの交点をＱとする。さらに，点Ｑを通ってmに平行な直線m'をひき，m'とℓ'の交点をＲとする。ここで，∠PRQ の二等分線をひけば，ℓとmのなす角の二等分線を得られる。なお，以上のひし形の性質による作図方法を前述２(1)(2)に照らして図形の移動の観点から俯瞰すれば，回転移動の利用とも解釈できる。

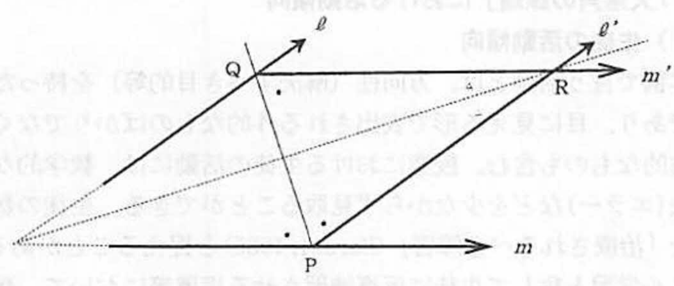


図７：ひし形の性質等による作図

（４）三角形の内心の利用

図形の性質に着目した別な解決方法として，三角形の内心に係わる定理（３つの内角の２等分線は１点で交わる）も利用できる。例えば，次図８のように角の辺ℓ, mにそれぞれ適当に点Ｓ, Ｔをとり，欠落角の頂点を０として三角形 SOT の内心を考える。このとき，欠落角∠SOT の二等分線を直接的に作図できないが，∠OST 及び∠OTS の二等分線をそれぞれ作図できる。これらの二等分線の交点Ｕは，上述の定理より欠落角∠SOT の二等分線上の点でもある。同様に，ℓ, m上に点Ｓ, Ｔと異なる点Ｓ', Ｔ'をそれぞれとり，三角形 S'OT'の内心を考えればn上の点Ｕ'を特定できる。この点Ｕ'と点Ｕと結べば最終的に求めたい二等分線nを得られる。あるいは，点Ｕ'を特定する代わりに，点Ｔを通るようにℓに平行な直線ℓ'をひき，続いてℓ'とmが作る角の二等分線n'をひき，さらに点Ｕを通ってn'に平行な線をひいても，欠落角の二等分線nを得られる。

紙面の都合で他の解決方法を十分に述べられないが，上述の２(1)～(4)で示した解決方法を単独ではなく部分的に幾つか組み合わせて利用することも考えられる。森川(2006)が示したように通常の授業では扱わないハイレベルな幾つかの定理を生徒に証明させた後，それらを欠落角の課題の解決へ利用させる方法もある。以上のように，欠落角の課題に対して既習の内容を駆使した解決方法が多様にあることがわかる。

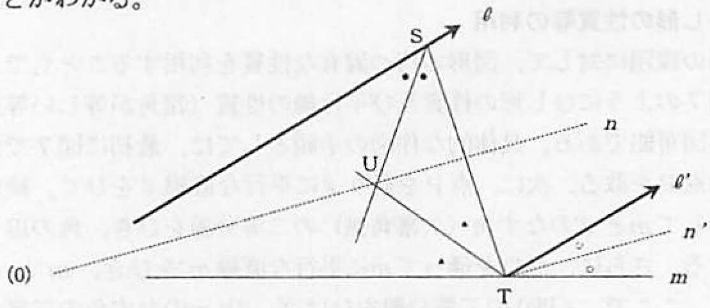


図８：三角形の内心による作図

３．「欠落角の課題」における活動傾向

（１）生徒の活動傾向

本稿で言う活動とは，方向性（解決すべき目的等）を持った操作や行為の集合体であり，目に見える形で表出される外的なものばかりでなく念頭での操作などの内的なものも含む。授業における生徒の活動には，数学的な誤りや不十分さや過失(エラー)などを少なからず見取ることができる。生徒の数学的な誤りや過失等を「治療されるべき障害」(Borasi, 1985)と捉えることがある。例えば，計算のドリル学習と称して生徒に反復練習させる指導等において，数学的な誤りを特定

し矯正する活動は，「治療されるべき障害」を取り除く立場からの一つの指導と言えよう。一方で，生徒の数学的な誤り等を「利用されるべき出発点」(Borasi, 1985)と積極的に捉えて，それらを教授・学習過程に活かす試みも行われている。例えば，原田(1991)は生徒のミスコンセプションに注目し，誤答を学習発展の契機として利用している。また，安達(2014) は生徒のつまずき（数学的な過失等）を題材として取り上げ，グループにおける協同的学習の有意義な展開を実現している。本研究はこれら後者の立場から，生徒の数学的な誤り等を活動傾向や特徴として肯定的に捉え教材へ反映させることで，生徒のより深い学びを実現させることを念頭に置いている。なお，ここでの生徒の活動傾向を授業に反映するとは，提示課題や主たる発問などの形で題材・学習材に用いることである。例えば，「生徒の活動傾向とそれとは反する新たな情報を提示課題に適切に組み入れる工夫が考えられる。両者の間に，ずれや葛藤，矛盾などを生徒が感じ認知すれば，それらの不均衡の解消を図るという活動が目的化され強化される」（大澤, 2014）ことになる。つまるところ，活動傾向の利用は生徒の数学的活動のきっかけや推進などの機能として期待できる。

（２）「欠落角の課題」の解決過程における具体的な活動傾向（誤答）

欠落角の課題に対して，具体的にどのような生徒の活動傾向(誤答)が想定されるのか。典型的な誤等例の一つとして，次図９のように線分の二等分線を利用した誤答が考える。図９では，角の辺ℓ及びm上にそれぞれ点L_1とM_1をとり，線分L_1M_1の中点N_1を作図する。同様に，線分L_1M_1に平行となる点L_2とM_2を角の辺ℓ及びm上にとり，線分L_2M_2の中点N_2を作図する。続いて点N_1とN_2を結び最終的に求める二等分線としている。

二等辺三角形のように，角の二等分線とその角の対辺の二等分線が一致する三角形もあるが，一般的に角の二等分線と線分の二等分線は一致しない。図９の数学的な正誤を探究する活動を経ることで，前掲の図４や図５などのアイデアの生成が期待できる。このように一見すれば似たような既習の知識を対比的に捉え直すことは，図形についての知識をより深めることから少なからず意義がある。

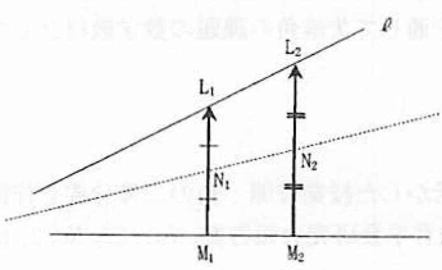
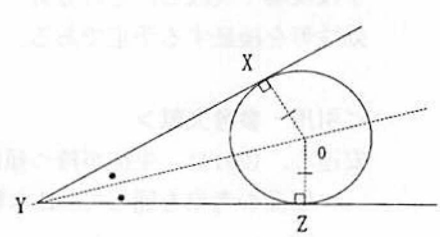


図９：線分の二等分線による作図（誤答）



<再掲> 図５：円と接線に係わる性質

また，欠落角の課題に対して平行四辺形を拠り所にした活動傾向も想定される。次図 10 左のように角の辺ℓ上の点L_0からもう一つの角の辺mに平行な線m'をひく。同様に，m上の点M_0からℓに平行な線ℓ'をひき，m'とℓ'の交点をN_0とする。ここで$\angle L_0N_0M_0$の二等分線をひけば，一見すると最終的に求めたいℓとmのなす角の二等分線を得られたかのようにも見える。しかし，例えば図 10 右のように極端な平行四辺形の場合を取り上げてみれば，図中の角の大きさ「●」と「×」が異なることを視覚的に認識できることから，このような平行四辺形による解決方法は誤答であると判断できる。ただ，平行四辺形の中でも特徴的な性質も持つひし形を作図できたならば，前述 2 (3) で確かめたように数学的に正しい解決となる。すなわち，図 10 に見られる生徒の活動傾向は，欠落角の課題を解決するための重要な突破口の一つとなりうる。

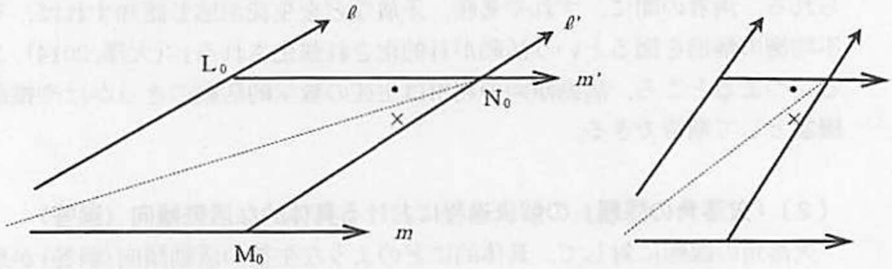


図 10：平行四辺形による作図例（誤答）

4．まとめと今後の課題

欠落角の課題に係わって数学的な内容面から分析・考察し，中学校における数学の教材としての可能性を探究した。その結果，次のことがわかった。（1）欠落角の課題の解決は多様であり，生徒が図形についての知識を深める教材になりうる。（2）欠落角の課題の解決過程においてミスコンセプション等が少なからず発生しやすく，これらの活動傾向を活かした授業の実施が可能であり，生徒が論証力を高めるのに有効な教材になりうる。

今後の研究課題としては，生徒の活動傾向を活かす視点から欠落角の課題を中学校現場で実践し，その分析・考察を通して欠落角の課題の数学教材としての有効性等を検証する予定である。

<引用・参考文献>

安達心．(2014)．生徒が持つ傾向を活かした授業展開：角の二等分線を作図する場面の考察を通して．日本科学教育学会研究会報告書，Vol. 29, No. 2, pp. 63-68.

内海淳，京極邦明，半田進．(1993)．図形領域の指導計画．東京学芸大学小金井中学校数学科資料，pp. 4-13．

大澤弘典．(2012)．数学的活動におけるインパルスとインパクト．教育科学数学教育 10 月号，pp. 16-17，明治図書．

大澤弘典．(2014)．教材開発を考える．山形県尾花沢市教育講演会資料（実施日：平成 26 年 11 月 14 日，尾花沢市）．

原田耕平．(1991)．学校数学における子どもの misconception の同定と克服：Balacheff の教授理論を手がかりとして．日本数学教育学会誌，数学教育学論究，第 55 巻，pp. 3-15．

Borasi, R. (1985). Using error as springboards for the learning of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *7*(3/4), 1-14.

森川幾太郎編著．(2006)．あなどるな数学：図形編． 教育ネット． pp. 129-133.

Potential as the teaching materials of "missing angle"

OSAWA, Hironori
Graduate School of Teacher Training Yamagata University

abstract

In this paper, I considered the potential in the junior high school as the teaching material of mathematics from the mathematical content side for "missing angle". As a result, the following suggestions emerged. The solution of problem of "missing angle" is various. Teaching materials related to "missing angle" will be able to become teaching materials which students deepen the knowledge of geometrical. Moreover, some teaching materials will be able to improve students' proof power in using the mistake of mathematics that happens by the problem-solving process of "missing angle".