生徒が数学をつくることを意図した教材の研究 :「数学第一類」の数学化の視点からの分析

（2019 年 2 月 28 日　受理）

宮城教育大学教育学研究科修士　今野　省吾

要約

本研究では，生徒が活動の中で数学的な性質や考え方を見出すことを意図して編纂された教科書である「数学第一類」に着目した。微分積分を学ぶ上で生徒が数学をつくることに着目し，数学第一類の問の構成や活動の系列を明らかにすることを目的とする。そのために，一類において微分積分に至る過程である「区分求積」「数列」「極限」「等比数列」「無限小数」の問を分析する。その系統から想定される生徒が数学をつくっていくと考えられる過程を考察し，その考察から生徒が数学をつくるプロセスとしての数学第一類の価値を考察した。その結果，そこに至る中で想定されていたと考えられる数学的な活動を明らかにし，「数学化」が起こると考えられる構成となっていることが明らかになった。また，図形的表現からの導入により数値計算による計算の意味の理解が図れるよう意図して配列された教材であることがわかった。これらのことは今日求められている高等学校における数学の学習の姿や，微分積分概念の進展に資するものである。

キーワード :「数学第一類」　微分積分　数学的活動　数学化

1．序

（1）研究の背景と目的

微分積分は小学校における乗除法や割合の学習に端を発し，中学校の関数の学習を経て，高等学校において数学Ⅱ，数学Ⅲで学ばれることとなっている。微分積分は高校段階までの関数の学習のゴール地点であるといえよう。

だが，その現状を見るとそれまで積み上げてきた関数の学習のゴール地点であるにもかかわらず，微分積分の学習の実態は生徒にとって「公式に基づく計算処理」に重きが置かれたものとなってしまっているのではないか。筆者はその点に問題意識を持っている。

生徒の実態に目を向けてみる。Z 会の発表による過去のセンター試験（2015）の結果によれば，公式に基づいて微分する問題については 90%以上の生徒が正答できているのに対し，定義に基づいて微分するよう問われると正答率が 20 ポイント程度下がっている。公式に基づいて求めることができているのであれば，本来は定義に基づき求めることもできるべきであるのに，その正答率は必ずしもそうなってはいない。微分積分の計算処理はできているが，理解が公式に基づく方法知にとどまっている生徒の存在がここに見える。定義が抜けた方法知では、導関数、接線の傾き、グラフの概形という学びが微分による一貫したものではなく、微分を用いたそれぞれに対する方法となり、つながりの見えない学習となる。

本来，算数・数学とは既知の物事から演繹的に積みあげられ，つくられていく教科である。杉山（2012）も「数学をつくりだすときに頼りにできるものは何であろうか。～中略～その一つとして，既知の知識の中に認められた法則，形式をあげておこう。」と述べており，数学を発展させる精神として，既知をもとにして演繹的につくり上げるという精神があることを述べている。先の微分の話に戻ると，定義が抜けた，公式による方法知にとどまった理解では，つながりの中で微分を発展させていくことはできない。

同様に，平成30年度7月告示の学習指導要領解

説に目を向けると「高等学校における数学教育においては，数学的な知識や技能の「量」だけでなく，どのようにしてそれらの知識や技能を身に付けたのかなど学習の『質』を問う必要がある。それは，様々な場面で身に付けた知識や技能を活用しようとするとき，それらを身に付けたときの学習の『質』が影響するからである。高等学校数学科では，数学の学習を単に知識や技能などの内容の習得にとどめるのではなく，数学的活動を重視して創造性の基礎を養い，すべての高校生の人間形成に資する数学教育を意図している。」と述べられており，単に結果のみを教えるのではなく，その結果にたどり着く過程をも含み，学ぶことが重要であることが述べられている。杉山も述べていたように，このことは数学における普遍的なテーマであるといえる。

これらのことから，結果としての公式や計算技能を教えるのではなく，微分積分の問題解決を通した知識の構成の過程を大切にした指導が重要であるといえる。過程を構成することができなければ，得た知識は限られた場面のみでしか用いることができないものとなる。よりよい過程を構成することを通して，学ばれるはずの定理やその証明などといった数学的な結論を知るとともに，そのつくり出し方や発展のさせ方など生徒自身で考察できるようになっていく。これは統合的・発展的に考えるという数学的な見方・考え方を育成することにもつながる。しかし，高等学校では数学的事実を教え，それを適用する問を解く学習展開が多いという実情も聞く。つまり，過程よりも結果として得られる知識が重視される傾向にある。

その過程において，既知のことをもとに考え，そこから見える課題を既知のものと関連付けるなど，創造的に考えていく過程を体験することができれば結果としての計算手続きだけでなく，その着想や考え方など手続きにとどまらない部分まで学ぶことができる。

こうした問題意識から，微分積分の学習において，活動をもとに生徒が微分積分に関する知識をつくりだす過程をつくれるようにすることで，微分積分概念の進展や今日の高等学校数学科に求められる生徒の学習の姿へ近づけられるのではないかと考えた。

その，手がかりとして，数学を生徒がつくることを意図して編纂された [1] 教科書である「数学第一類」に着目した。数学第一類は構成として問が並べられているだけであり、紙面をみるだけではその意図は読み取れない。この教科書の問の系統や活動の系列を明らかにできれば，つくりだすプロセスを構成することに寄与するはずである。

以上のことから，本研究では微分積分を学ぶ上で生徒が数学をつくることを目指し，生徒が数学をつくりだすプロセスを構成するために，数学第一類の問の構成や活動の系列を明らかにすることを目的とする。

2．「数学第一類」について

「数学第一類」は昭和 18 年，19 年に発行され，使用された一種検定教科書である。しかし，2 年しか使用されず当時が戦時中であったということから，一類（以下「数学第一類」のことを一類と述べることとする。）による教育の実態は明らかになっていない。しかし，数学をつくる意図で編纂されており，数学的活動の視点や，先に述べた生徒が数学をつくるという視点で合致する教科書であると考えている。

当時（昭和 17 年）の中学校数学及理科要目改正の趣旨においては，

> 「（３）～前略～具体的操作を学習のもと礎として知行一体の修練をなさしむるとともに発見創造の能力を養うに力めたること。（４）直観を重視するとともに抽象し分析し統合する働きを錬磨するに力めたること。」（下線部は筆者が新字体に修正）

の様に述べられており，要目からも当時の，事象の分析をとおして，技能としての処理手続きだけでなく結論を見いだす能力も重要であるという数

学教育観が見て取れる。

こうした背景からつくられた教科書である一類の内容について筆者の一人である田中良運（1963）は「考えていくきっかけを飛び石的に並べ，結果も生徒の力で～後略～」と述べており，一類の意図としてベースを活動においていることがわかる。

しかし，当時の声としては「ツッパナシ教科書」（中谷　2002）のような声が上がっており，田中らの意図した，活動から生徒が数理的な概念を見いだすことは実践上必ずしもうまくいっていなかったことがわかる。このことについて小倉（1958）は「かような教科書によって苦学してこそ，最もよく『合理創造の精神を涵養』し得るものと，考えたのかもしれないがそれは無謀の挙であった。完全な失敗に終わった。」と指摘している。一連の問の中から生徒が活動しつつ定理，性質を見いだしていく意図で作成された教科書であったが，「飛び石」の間にあるはずの，生徒が考えると想定された問は考察されず，紙面にある結果のみが重要視され，数学における結果主義を加速させたとされている。つまり昭和17年改正要目において目指された教育が，編纂者の意図と現場の実践が意図されたようにはつながらず，うまく教科書として機能していなかったのではないかと推測される。

田中（1963）は教師の「何を教えていいのかわからない」という批判について当時の編纂の意図は若気の至りであったとしつつも「わからぬのはそちらの不勉強」と，一類の批判に対して述べている。つまり，問と問の間を教師が読み，そこから想定される活動を構成することが，一類において教師に求められていたということである。そのため，一類における問の研究を行うことが一類の価値を生み出す研究課題になるといえる。

ここで，先に述べた平成30年7月告示の学習指導要領に目を向けると，今日の教育では，「主体的・対話的で深い学び」が求められており，数学学習の過程として「算数・数学の問題発見・解決のプロセス」の図が示されている。生徒が一連の問題解決の中で解を導き出し，数学的活動のサイクルを回る。これは一類編纂当時目指された教育の姿である「発見創造の能力の育成」に合致するものであると考える。当時，必ずしもうまく機能しなかったと考えられる「数学第一類」ではあるが，現在目指されている数学教育の姿から見直すことで一類の価値がより明確になると考える。そしてそこで想定される活動にもとづいて学習を進めることにより，高等学校で目指される「創造性の基礎」も養われると考える。

以上のことから，「数学第一類」の問の構成や活動の系列を考察することなしには，一類編纂時に意図された機能は発揮できないものとなる。そのため，問の分析から活動を構成し，その価値を再評価することは意義のある研究であるといえる。

（２）「数学第一類」における微分積分の扱い

「数学第一類」は，それまでの分科主義的な教科書から脱し，関数観念の養成[2]を目指し初めて中等学校段階に微分積分が登場した教科書である。その際，微分積分導入について「微分積分を無反省に中等教育に導入するときは，（中略）極端な形式主義に走る危険性が十分にある。」[3]との指摘があったことから，微分積分の学びが形式的に計算処理をするような教材にならぬよう配慮がなされているものと考えられる。

まず，以下に大まかな微分積分に関する第４学年（現代の高校１年生に相当）における単元の配列を示す。

1.系列の考察
- §１　区分求積【１】
- §２　区分求積【２】
- §３　数列
- §４　極限
- §５　等比数列
- §６　無限小数
- §７　種々の問題

2.連続的変化
- §１　速さと距離

§2　速さと距離の図表
§3　微分
§4　積分
§5　増加率・和の極限
§6　放物線による近似
§7　近似式・誤差
§8　種々の関数の微分と積分
§9　種々の問題

これらの単元に扱われている問から活動の系列を見てみると，島の土をならすためにどのようにすればよいかという具体事象から，面積や体積を求めるための数学的な方法の考察が問の対象とされ，問を解き進める中で徐々に問が焦点化されていき，最終的に微分積分という数学的に洗練された方法へと高められていく。こうして具体事象から数学的な事象へと対象化をはかり思考を深めていく。微分積分に対しても具体事象をもとに考察をはじめ，活用する題材が配列されていることから，一類では事象を数学化し数学的活動を行っていると考えられる。細かい分析は後述の５章において行う。

３．筆者の「数学化」の捉え

本章では，生徒が数学をつくるということを精緻に考察するために数学化に着目する。数学化の語は様々解釈があり，人によりその使い方が異なる。そのためここでは本稿で定める数学化について述べる。

まず，学習指導要領から考察すると，現行の高等学校学習指導要領においては生徒が事象から数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成することが求められており，次期学習指導要領においてはその考えが，数学化としてより一層強調されている。その具体例としては，数学的活動のプロセスが示されている。その図を見てみると，A1,A2 のプロセスにおいて，事象を数学的に表現する段階を数学化として捉えている。そして，一類においてもその編纂趣意書において，数学化の語が目標の中に使用されており [4], その文言から上記のプロセスと同義に使われているのではないかと推測できる。つまり学習指導要領や一類の編纂趣意書においては，具体事象を数学化し，それを処理したり，形式化したりすることが一類における数学的活動として捉えられていると考える [5]。

しかし，筆者は H.Freudenthal の「数学化」の捉えから数学的活動を定義したい。Fruedenthal（1968）は「数学は実在を数学化したものであるということである。～中略～人間が学ばなければならないのは，閉じた系としての数学ではなく，むしろ活動としての数学，実在を数学化する過程や，できるならば数学を数学化する過程である」(p.7)と述べている。つまり，人間が学ぶ数学は具体を取り出して，数学として捉えたものであるから，数学は出来上がった体系を学ぶのではなく，数学化の中から学ぶのが自然な学びであることを述べている。

この捉えから Fruedenthal は数学を２つの過程として認識するものとしている。「活動としての数学」が大きな柱として述べられ，その中で「現実場面」と「数学」の 2 つが数学化され，数学が学ばれると述べている。Fruedenthal は「数学化」数学者に対して起こることとしているが，現実場面の数学化と数学自身の数学化が「水平的な数学化」と「垂直的な数学化」として Treffers により教育の文脈で細分化された。Treffers によると２つの数学化について，問題場面を数学の文脈へと転換すること（水平的な数学化）と数学的体系の中での体系化（垂直的な数学化）として数学化を捉えている。

そして，Fruedenthal（1973）は次のように「数学化」を定義する。(p.44)

Freudenthal による数学化の定義
　数学化とは経験の蓄積を対象として，数学的方法により組織することである。

つまり，これまでの経験（既知）を考察の対象として高め，その経験（既知）を考察することで，よ

り優れた数学的性質や方法が見出されるというのである。この定義からすると，水平的数学化と垂直的数学化の両方のサイクルを回ることが「数学化」として捉えていると考えることができよう。経験として持っている事柄から数学の文脈として転換し，数学の体系の中で既知の事柄を根拠に体系化していくことがFreudenthalの「数学化」である。

この視点で一類を見てみると先述の様に，１つの場面の考察のために，既知の事項を用いてその段階でできる一応の問題解決をし，そこで生まれた疑問や着想から，学んだ方法を対象として振り返ることで，精緻化された段階へと生徒が進めるように意図された問の系統になっていることが想定される。そしてFruedenthalの言うように現実（具体事象）の「数学化」を通して，数学を数学化し最終的に高められたレベルへ到達するものとなっている。

以上の理由から筆者は「数学化」6（以下本稿では「数学化」とした場合はFruedenthalの定義する数学化の捉えで議論を行う。）をFruedenthalの定義にもとづき考察を行う。このことは一類の構造が「数学化」に基づく構造になっていると解釈できると想定されることから，一類を考察する際に有効であるといえる。

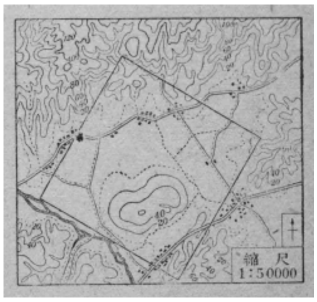
また，この「数学化」を行っている姿が生徒が数学をつくることであると捉える。

４．分析方法

「数学第一類」の問の分析や考察をもとに，微分に至るまでに柱になると考えられる，問を抽出しその問を分析する。その分析をもとに問の意図を考察するとともに，想定される数学的活動を筆者の問題解決にもとづき構成することで，生徒が学ぶであろう数学的な事実や考え方を明らかにする。一類を「数学化」の視点から見直すことで，当時の意図に加えて，現代求められている数学学習の姿へと近づく糸口を探る。そこから活動により微分の概念が進展すると考えられる点を数学化の視点から明らかにすることによって，一類に直接は記されていない価値を見いだしていきたい。

５．各問の分析

ここから問の分析を行う。紙面の都合上，問題すべてを掲載することができないため，解決の根本になると考えられる問を柱に考察を行う。

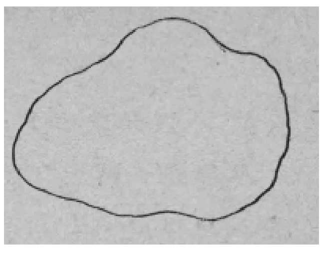


（図１　§１導入題）

§１「区分求積」においては，以下の問題(数学　中学校用４　第一類 p.1)から導入される。

> 不規則な図形の面積や体積の求め方を考究しよう。飛行場の設営などで，凹凸のある土地の地均しをしようとする場合には土の過不足が問題になる。右のような地図のうち，正方形で示した部分をある高さに均して，土の過不足をなるべく少なくしたいというとき，どのようにしてその高さを算出したらよいであろうか。

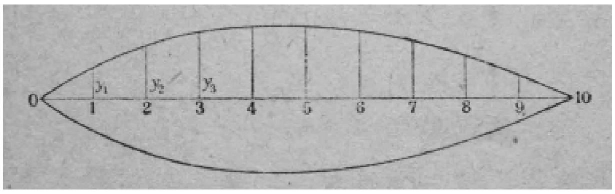
島の土をならす場面において，平らにならすためには土の過不足を考える。そのとき，過不足を知るために土がどれだけあるかが知りたいという問が生まれる。しかし，曲線により定まった形の体積は求めることができない。そこで等高線に着目し，等高線ごとに切ることで，同じ高さの図形の体積を求めることが次の問となる。高さを一定にしたことで体積を面積へ変数の変換が可能なため，体積を求めるために面積の考察が必要であるという必要感を持ち，問の考察が始まる。


（図 1.2　断面積の考察）

断面積を考察する場面（数学　中学校用４　第一類　p.2）（図 1.2）では，単位

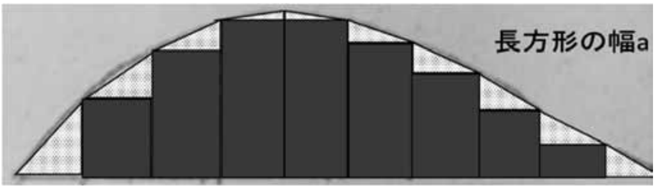
正方形で区切ったり，形の似た図形による敷き詰めを行ったりと様々な解決方法がなされ面積を考察する。この後，面積を長方形に区切った図が提示され，前問で行った方法の中から，長方形による近似へと方向づけがなされていく。その方法から「より詳しく考究するためにどうしたらよいか」を検討する。図によると誤差となる部分が外側と内側で同じ程度の大きさになっていることから，長方形により曲線で囲まれた面積が近似できたという気づきにもつながる問であると考えられる。その中でより細かく区切ることで求めたい面積に近づきそうだという感覚を持つ。

次に船の喫水線の断面積の考察（数学　中学校用４　第一類　p.2)（図 1.3）を行い，曲線を長方



（図 1.3　喫水線の考察）

形により近似できるという経験をする，先ほどまでの様に長方形だけで近似すると，外側まで含むようにやった場合（上からの評価）と内側のみを含むように近似した場合（下からの評価）が出てくるものと想定される。ここで誤差の部分を三角形に近似し，長方形と三角形により敷き詰めると，そこで出てくる式を読むことで曲線下の面積が長方形により近似できたということの式的表現まで経験することができる。(下記図 1.4)



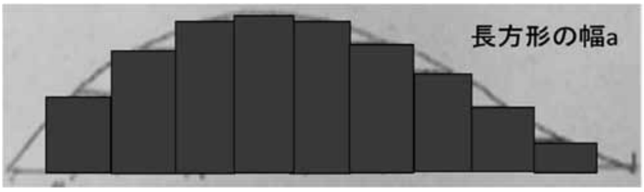
（図 1.4 内側の長方形と三角形による近似の和）

・$a(y_1+y_2+y_3+y_5+\dots+y_9)$

・$\frac{1}{2}a(y_1+(y_2-y_1)+\cdots+(y_4-y_3)+(y_4-y_5)+$
$(y_5-y_6)+\cdots+(y_8-y_9)+y_9$

$=\frac{1}{2}\times 2ay_4=ay_4$

2 つの和　a$(y_1+y_2+\cdots+y_9)$



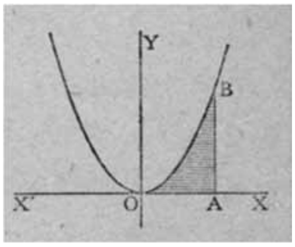
（図 1.4　上記の式を読んだ図）

このことは今後の面積の考察に対して曲線に囲まれた面積は長方形で表せるという方向性を持たせる意図があるものと推測する。

§２「区分求積２」においては

> 放物線$y=ax^2$と x 軸上の点 A を通って y 軸に平行な直線との交点を B とする。このときにできる図形 OAB の面積はどのような式で表されるかを調べよう。まず，前章で考えた不規則な曲線で囲まれた図形の面積を求める方法を適用してみよう。

という課題(数学　中学校用４　第一類 p.5）のもと§１で考察した面積をグラフ上で考察する。同じ面積であるから，長方形に近似して考えられるはずだという推論から同様に考察が始まる。このとき以下の問（数学　中学校用４　第一類　p.5）により「誤差の限界」を考察する。

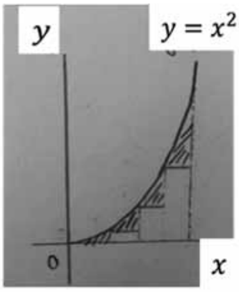


（図２　§２導入題）

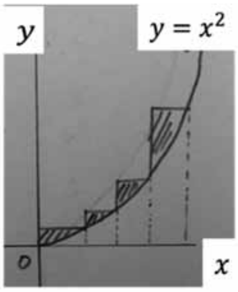
> 前問で OAB の面積を表す近似式として$\frac{a}{10}(y_1,y_2\dots y_9,y_{10})$を用いると，その誤差はどれほどであるかを図の上で調べ，かつその限界を図上に表す方法を工夫せよ。次に，OA の等分数を多くすると，その誤差の値はどのように変わるかを調べよ。

この問において「誤差」は何を表すのかというところは記述されていないため，誤差とは何かを考えるところから問が始まる。そこで，図形による敷き詰めを行った際に，細かく分けることでより詳しく考究することができるという経験から，実際に求めたい値と近似した値とでは差があるこ

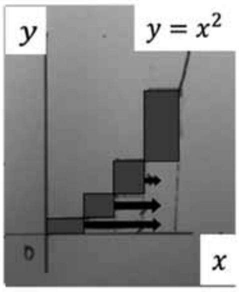
とに気付くことができると考える。その考えにもとづくと「誤差の限界」を「近似した長方形と真の値との差」として捉えると考えられる。上からの評価と下からの評価の両方を書き並べると，誤差が各区間で小さな長方形として図に現れているところから，その差を集めると端の長方形の面積に帰着されることをもって，細かい等分により，より詳しく考察することができるということを保証する。その図による表示において，端の長方形分誤差が残るというところから，細かく分けていっても誤差が小さくなるものの，なくなることはないということに気付くことが意図されていると考える。これは極限の 1 側面である「近づくが決してその値にはならない」ということの経験となる。以下に「誤差の限界において想定される図を記す。



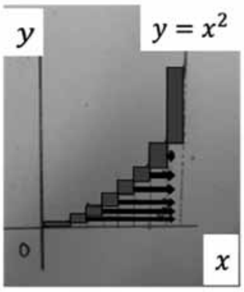
（図2.1 内側の誤差）



（図2.2 外側の誤差）

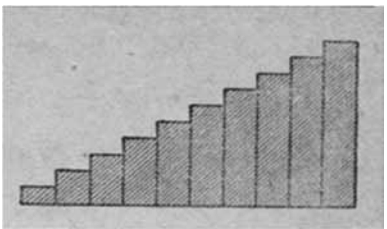


（図2.3 誤差の限界）



（図2.4 誤差の限界の減少）

§ 3 「数列」（数学　中学校用 4　第一類 p.9）においては右記の図をもとに整数の和を考察する。先ほどの問までで，「長方形を細かくして近似を行えば面積を考察できた。その数値はどのようにしたら求められるか」という問からこの図の和を考えることで，グラフ下の長方形により近似した面積を考察できるようにしたいという問題に対して考察が始まる。その解決を進める中で整数和や数列が導入される。



（図3 § 3導入題）

§4「極限」（数学　中学校用 4　第一類　p.13）においては

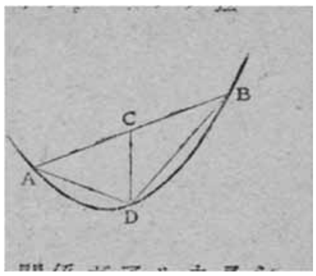
問 1．前章問 9 で求めた近似式で，n を増やしていくと，その値はどのように変わっていくかを調べよ。次にその結果から図形 OAB の面積を求める式をかけ。

の様にして，これまで行ってきた面積の考察が等分数を増やせば値が真に近づいていくところから，値を増やすと面積はどう変わっていくかという問を持たせ，極限の導入を行う。ここでは，極限を変化の中で考察させることで，直観的に「ある値に限りなく近づいていく」という感覚を身に付ける。

§ 5「等比数列」（数学　中学校用 4　第一類 p.17）においては

曲線$y = x^2$の上に一点 P を取り，P から両軸におろした垂線を PM，PN とする。ここにできた図形 OMP の面積は数列の極限の和として求めることができた。ここでは，それと異なった方法でこれを求めてみよう。

と導入される。前セクションまでで考えていたことが本当に正しいのか，他の方法でも面積を考えることができないかという問からこのような問につながる。そこからグラフの上側の面積を求め，三角形から引いてやることで，グラフ下の面積が求まるということから考察に入る。ここでは，等比数列を導入するとともに，どんなに区切っても隙間ができてしまうことなどから「近づくがその値にはならない」という感覚を身に付ける。そして，先



（図 4　曲線上側の面積）

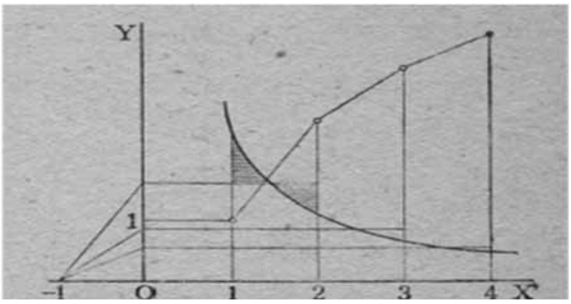
に長方形の近似により求めた面積の値と一致することをもって，どちらも有効な手立てであることを経験する。

§6「無限小数」（数学　中学校用４　第一類　p.24）では，§5 で学んだ無限等比数列の和をもとに無限小数を分数に直す活動を行う。方程式を使った解決方法なども考えられるが，数列の和として無限数列を捉えさせることで,「無限」という捉えにくい概念を直観的に考えられるようにしている意図があると考える。

第２章§１速さと距離（数学　中学校用４　第一類　p.31），§２速さと距離の図表（数学　中学校用４　第一類　p.36）においてはこれまで考察していたことが実際に考えられるかという問から，具体事象の考察から速さ，距離，時間の相互関係を考えさせ，微分積分を生活に関連付けようとしている。そこでは「距離がグラフにおいてどのように現れるか」という問から考察を行い，距離が曲線下の面積に現れることを学ぶ。その際「関数が決まれば, 原始関数は確定するか」や「関数の図表から原始関数の図表を作る一つの方法を示す。どのような方法であるか。」といった微分積分の意味を問うような問題が問われている。

これらの問題の捉えについて，編纂の背景でも述べたが「従来の数学の体系にとらわれず，小学校教育と一貫したものにする」よう動きが起こり，数学教育学者が教科書を編纂した。それまでの知識詰め込みの教育からの変換のために実験（操作）をもとに教育を行おうとしていた。このことから実用場面から問を引き出し，考察している側面もあると考えられる。

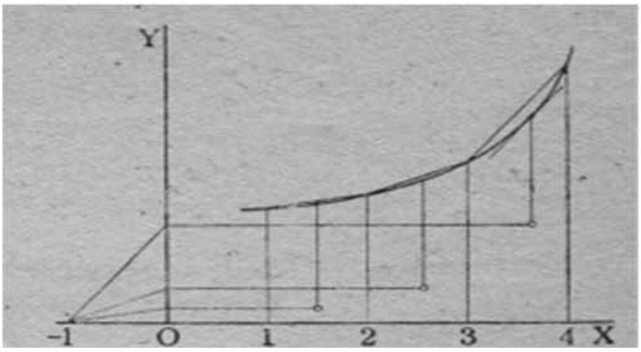
以下に原始関数を求めることの図的な意味を考



(図 5.1 原始関数を求めることの幾何的な意味を問う問題)

察させる問を載せる。（数学　中学校用４　第一類　p.39）

この図を解釈するためには, 1 つ前の問である，導関数を求める方法を問うた問題が重要となる。（数学　中学校用４　第一類　p.39）



(図 5.2　導関数を求めることの幾何的な意味を問う問題)

導関数を求めることにおいて, 図を解釈すると，まず，２点の割線であった線分と等しい傾きの接線を考える。接線の傾きの大きさが導関数の値(微分係数)であることは学んでいるので，その大きさをいかにして求めるかが次なる問となる。ここで,割線をとった幅を考えると，幅１でとっているため，同様の傾きを x＝－1 から x＝0 の間にとることで y 軸との交点が傾きの大きさとして現れる。接点と，この y 軸に現れた点とを座標として，プロットすることで，各接点の x 座標における接線の傾きの大きさ，つまり微分係数が図上に表現できる。このようにして求めた点を結ぶことで導関数が求められる。

この問題から原始関数の問題を考えると，原始関数は「導関数に対して元の関数は原始関数という」として定義されている（数学　中学校用４　第一類　p.38）ため，生徒は導関数を求めた操作と反対の操作をすれば求めることができると考えると想定される。導関数を求めた操作を逆から考え，導関数から各点の傾きの大きさが x＝－1 から x＝0 の区間に移されていると気付くことができる。この傾きは接線の傾きであり，割線の傾きであることから，各傾きを割線としてつなげることで原始関数を求めることができる。（変化の累

積）このときｘ座標は定まるが，ｙ座標については定まらないため，ｙ座標を定めることはできないのかという問が生まれる。しかし，その前に考察した問「関数が決まれば，原始関数は確定するか」（数学　中学校用４　第一類　p.38）において１つの関数から無数の原始関数が求められることを学んでいる。（不定積分の考え）そこから，おおよその形はわかるが，y 座標が定まらないことが，無数の原始関数が求められるという図形的表現になる。このことは§４積分において「ある関数の原始関数は無数に多くあるがそのうち１つがわかれば，他のものはこれに定数を加えて得られる。」として不定積分を代数的に導入することに繋がる。

また，図上の塗りつぶされている面積について考察すると，「曲線の下の面積が原始関数」ということを学んでいることから，これまでの長方形による近似により求められる面積と，実際の曲線下の面積を考察していると考えられる。塗りつぶしてある２つの部分の面積の差は等分数を増やすことで，少なくなっていく。そのため，細かく分けることで面積が求めたい真の値に近づいていくということをもとに，原始関数が和の極限であるという積分の導入につながる問であると考えられる。すなわち，図としては微分の逆演算として考察してその方法を考えるが，その方法を振り返り，妥当性を判断するために和の極限として考察をし直すことが意図されていると考えられる。
そして§４「積分」（数学　中学校用４　第一類　p.44）において

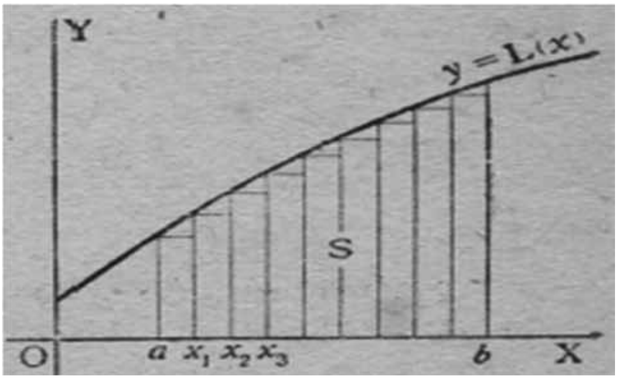
曲線ｙ＝L(x)がある。ｘ軸上でｘ＝a からｘ＝b までの部分を細かく等分し，各部の長さをΔｘで表し，その各分点をｘ１，ｘ２…で表すとして次の和を考える。

$$S' = L(a)\Delta x + L(x_1)\Delta x + L(x_2)\Delta x + \cdots\cdots L(x_{n-1})\Delta x$$

この和Ｓは，曲線が上の図に示すようにｘ軸上方にある場合には，曲線下の面積を近似的に表す。Δｘを限りなく０に近づけるときの上の和Ｓの極限を$\int_a^b L(x)dx$で表し，これを求めることを L(x)を a から b まで積分するという。前ページの場合は

S=$\int_a^b L(x)dx$である。また上のＳのような和の極限を求める積分を定積分と言い，原始関数を求める演算を不定積分という。

としてこれまで行っていた，和の極限としての求積は積分ということを行っていたとして，積分を導入し，積分計算を学ぶことで，敷き詰めだった求積を積分へと高めていく。



（図６　積分を極限の和として導入したもの）

６．考察

上記のように筆者の行った問題解決にもとづき，想定される数学的な活動を分析した。その分析から「数学化」の視点から一類の考察を行う。

まず，問の構成について考察する。章を通じて，島の土積の考察を柱として，問題解決が進められていることがわかる。次ページ図７は問を進めることでどのように解決が進み，積分へ必要とされる力が身に付くかを表した図である。図７のように$y = x^2$のグラフ下の面積という同様の課題の中で，その時点における解決や解釈を行い，その解決をより確かなものにしたり，解決を進展させたりできるように考えることで次なる問が生まれる。生まれた問の考察をもって解決が進展し数学的に高まった方法へと変容することが意図されていると考えられる。後述の図７をもとに問と問の間を

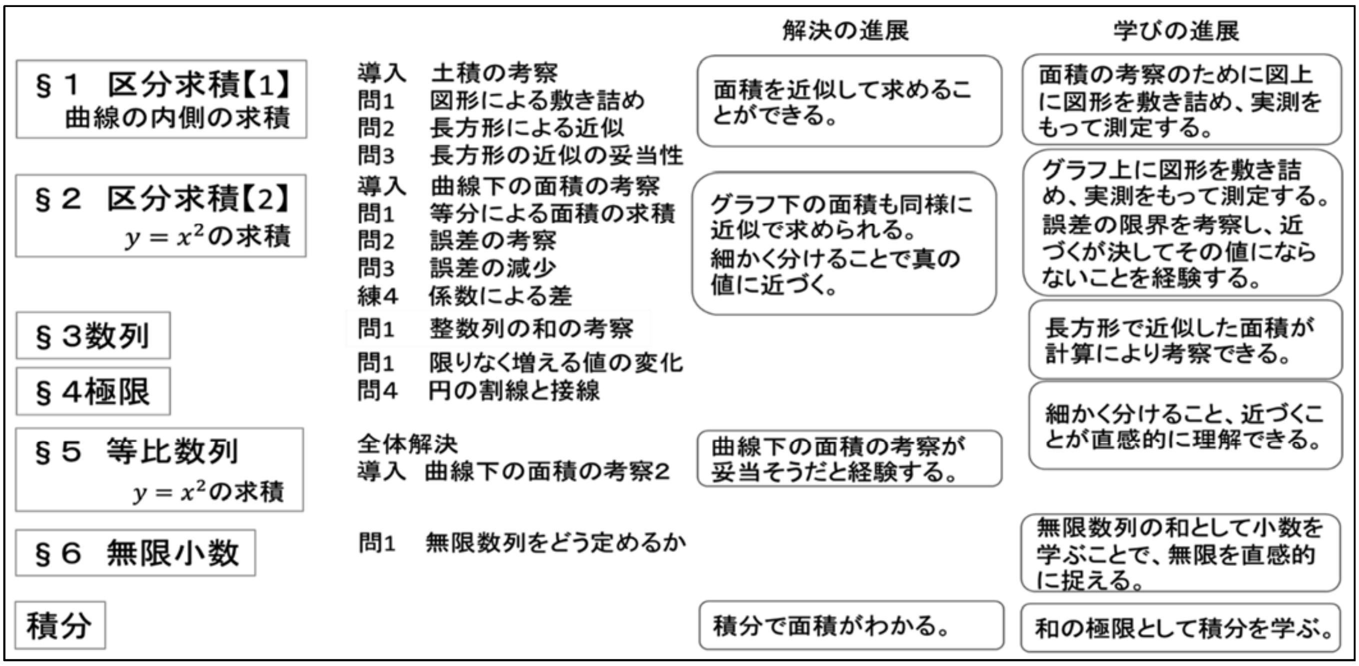
考察すると，その問いの解決へ向けた着想がなされる疑問が生まれる。ここでこの着想について考察するとその問は，それまでに考察していた解決の方法を振り返り，その方法自体を考察の対象として思考したものになっている。積分に直接関係していないように見えるセクションについても問と問の間を読むことによってそのつながりが明確に見えてくる。

具体的に問を見ると，§2 では，曲線下の面積が長方形により近似されることを学んだ。そこで，今までは 1 つ一つの長方形の面積を求めそれを足し合わせていたが，それをまとめて計算することはできないかという問をもとにすれば，一見つながりのない§3 数列も求積の意図で整数列の和から導入していることがわかる。つまり問の構成が，行間の問に着目することで「数学化」が起こるものとなっていると考えられる。つまり，数学を学んでいく過程で生まれた疑問や，発見から知識を深化させていく構造となっている。

ここで，現行の検定教科書に目を向けると，積分は，微分の逆演算として数学Ⅱにおいて導入される。区分求積については数学Ⅲにおいて求積の一つの方法として学ばれることになっており，現行のカリキュラムでは積分の原理はⅢまで学習しなければ学ばれないこととなっている。その中でも筆者の調べた 2 社 5 種中では 1 種のみが数学Ⅲにおいて「この考えが積分の考えのもととなっている。」として区分求積を導入している。つまりほとんどの教科書において積分は，導関数を求める計算の逆の演算が存在し，それを「積分する」として導入がなされる。そのため，なぜその演算を行うことで面積が求まるのかという議論は行われず，教師から与えられた計算方法として積分を行い，面積を捉えるのである。

このことから一類と比較すると，現行の教科書では体系化されたものを演繹的に体系化した順序で学習しているものが多いのに対し，一類における問の構成は教師から与えられた知識ではなく，既知のものから発展させて数学的な知識を作り上げていくという精神で作られたことがより明確に見える。

また，その導入の方法としては，現行の教科書においては微分の逆演算として，一類においては和の極限として導入されており，その 2 つには立場の違いがあると考えられる。そこで，数学史を見てみると，微分積分はギリシャ数学における求

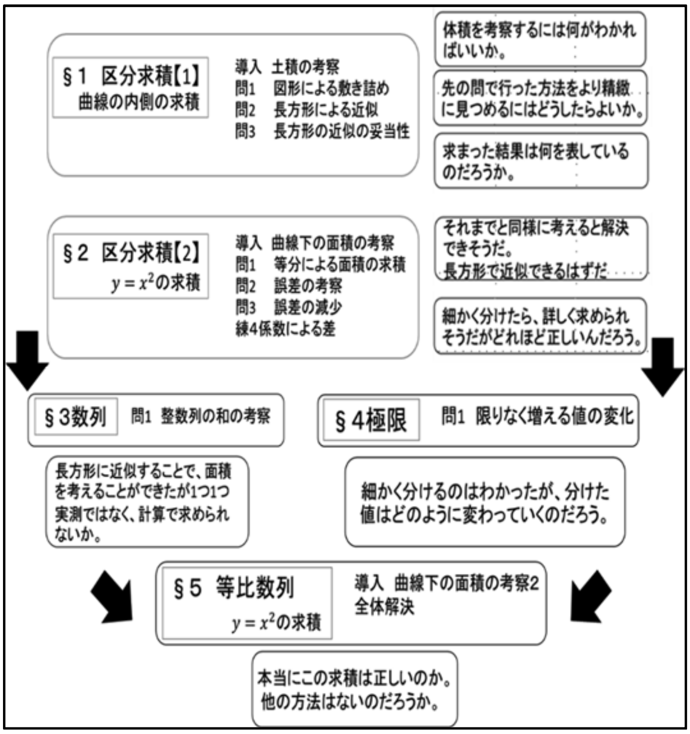


（図 7　問の解決と学びの進展の関連）

積法として積分法がつくられたことから始まり，無限小の幾何により，真の値への微小な近似による計算へと高められた。そこから，中世ヨーロッパで微分積分にまつわる 4 つの問題が考察され微分と積分の 2 つがつなげられていった。

この経緯を鑑みると，一類は人間が数学を思考してきた自然の流れに従って，問が形成されており，これまでに発展してきた数学を追体験するように微分積分が学ばれる問の配列になっているのである。人間が数学を見いだすことを追体験する中で数学を学ぶことはまさに Fruedenthal のいう「数学化」を体験することに他ならない。

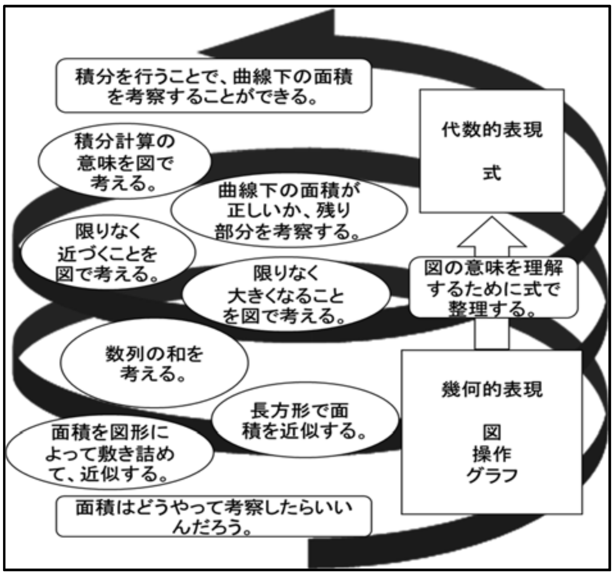
しかし，一類の紙面を見ると解決に伴って生まれた問や，その問の着想は書かれておらず問題としての問が示されているだけである。そのため，問と問の活動を生み出すことが上記の問の構成を意味のあるものにする。



（図８　問を着想する疑問）

続いて，学習から想定される活動を考察する。先の図７，８で見た問題解決と考察した問の構成からそこに想定される活動をまとめると次の図９になる。

ここから活動のプロセスに着目して，考察を行うと，図９に示したように活動がなされる。図８に示した着想から一類の紙面にある図をもとに考察が始まり，図を操作したり，図を読んだりする中で，既知の知識をもとに学びを深めていく。考察の中で幾何的な表現をもとに考察することで，直観的に状況を考え，そこから数学的な構造を取り出して考察し，代数的な式による表現へと進展していく。



（図９　活動の高まり）

本研究では，それまでに経験した問や方法自体を考察して，新たな問を生み出し，解決を進めていくサイクルを「数学化」として捉えた。この視点で具体的に問を考えてみると，§2 において曲線下の面積を考察する際，長方形により§１と同じく近似することで面積が求まるはずだという考えから考察が始まる。そこで，長方形の敷き詰めにより「細かく分けた方が求めたい真の値に近くなった」という経験（§１）や敷き詰めの際に「隙間が空いていた」という経験（§１）から長方形に近似したときの誤差が考察の対象となる。

つまり，長方形による面積の近似の方法を対象として考察し次の問が生まれている。その解決のために，図を任意に等分してどれだけ誤差があるかを，操作から視覚的に表現する。視覚的に見え

た誤差を，図を読み直すことで誤差は端の長方形にうつるということをもって，課題を解決していく。ここで解決された誤差の問題から，面積の考察に戻り，解決が進んでいく。

このように一類では，数学をつくっていくプロセスを生徒がたどり，微分積分の概念を形成していく。

７．結語

本研究では微分積分を学ぶ上で生徒が数学をつくるプロセスに着目し問の構成や活動の系列を明らかにすることを目的とした。

２章では一類の編纂時の編纂者の精神や，意図をもとに一類の精神を述べた。編纂者の意図と現場の実践がうまく機能していなかったと想定されることから，３章において Fruedenthal の「数学化」をもとに一類を見直すことで，問の構成や活動の系列が明らかになるのではないかと考えた。

４章ではその分析方法を述べ，５章において問を詳しく分析した。

そして，筆者の想定する活動やそこから考察される問の構成は6 章において述べている。その考察の結果，筆者の考える「数学化」にあたる活動が行われることが想定された。

一類では最終的に高まった方法である積分に至るまで，1 つの大きな柱となる問である「$y = x^2$の曲線下の面積の求積」をもとに，生徒が既知の用いることのできる数学的な知識を用いて具体的な場面から考察が始まる。その中で解決方法を探り，長方形により近似したり，その面積を計算により考察したりと，その時点で行うことのできる解決をする。そこで解決された事実に対して，より精緻に考察することや，解決を進展させるために問が生まれる。そこで生まれた問の解決のためにそれまでに行っていた方法を思考の対象として再び解決するという流れで，思考を繰り返していくことで数学的な知識を深化させている構造になっているということが明らかになった。

また，現行の教科書と比較したことから，一類では体系化された数学が演繹的に教えられていくのではなく，問題解決の際に生まれる問をもとに生徒が構成していくものであるということが考察された。その進展の中で図をもとに考察が進んでいる。一類における活動を想定する中でその活動のもととなるのは図であった。提示された図を操作したり，読んだりすることで，その意味を理解することから，解決の進展の中で形式化をし，代数的な表現へと理解を深める。こうした解決は演繹的な順序ではなく，ある事象から生徒の既知の知識をもとに思考して，数学を高めていく構造となっていることを表しており，一類と現行の教科書の構造の違いが見えた。

これらのことから，一類では生徒が「数学化」をしていく中で微分積分の概念が進展していく構造となっていることが明らかとなった。

問を具体事象からはじめ，行間の問を教師が想定することで，数学をつくる過程を生徒に体験させる。その中で，微分積分の意味理解における難しさである無限や極限を活動によって直観的に理解させ，図的表現と活動を結びつけ代数的表現へと高めていくプロセスが「数学第一類」における「数学化」である。これは活動の中で生徒が数学を見いだし数学をつくっていく姿であるといえる。

このような活動を想定し，授業を行うことが，現在高等学校数学科において求められている数学学習の姿へと近づけるものであり，微分積分をできるけどわからない題材から改善をはかることにつながる一助となる。

〈註〉

1．数学編纂趣意書 p.1「既成の数学の注入を排し，事象に即して生徒自ら数理を発見するように導くこと。」

２．中学校高等女学校数学及理科教授要目解説要綱とその趣旨 p.119「（前略）一方関数という語を非常に狭い意味に限って，解析的な式に表されたもののみを関数とみて，図形の変化や量の変動等

到るところに現れる関数関係をとりあげなかった傾きがある。」

３．中学校高等女学校数学及理科教授要目解説要綱とその趣旨 p.119「もしも，微分積分を無反省に中等教育に導入するときは，この方面に於て中等教育が極端な形式主義に走る危険性が十分にある。」

４．数学編纂趣意書 p.7「具体事象の考察では，問題の核心を捉え，これを数学化する過程が重要である。」

５．数学編纂趣意書 p.1「2.問題には具体的素材を多くとり，事象を数学化し，且つこれを処理するの修練を重んずること。」

「3.具体に即して数理を十分に習得せしめ，然る後にその抽象化，形式化を図り，似って以てこれを具体的事象に自在に応用し得るよう修練すること。」

６．このように定義した「数学化」は「数学化」＝数学的活動として捉える。活動としたときに言語活動等の生徒が動く活動も考えられるが，ここでの活動は「数学する」プロセスを指しており，思考の様相を示すものと捉えている。つまり，必ずしも生徒が行動を伴って活動することではない。

なお，本文における「数学第一類」等の紙面は筆者が現代仮名遣いに直したものである。

８．引用・参考文献

１）杉山吉茂(2012).『確かな算数・数学教育を求めて』，東洋館出版社

２）小倉金之助（1958）.『数学教育論集』

３）佐藤良一郎先生・塩野直道先生記念誌出版編集委員会（1963）.『数学教育の発展』,大日本図書

４）塩野直道（1970）.『数学教育論』,河出書房

５）田中義久（2003）.『「数學第一類」における関数教材についての考察：問題の解決方法に焦点をあてて』,日本数学教育学会誌 85(11),pp.15-24

６）田中義久（2008）.『「数学　第一類』における問題場面が共通な教材に関する事象の数学化の視点からの分析』,日本数学教育学会誌,90(1)pp.12-25

７）中谷太郎（2002）.『日本近代数学教育史』，亀書房

８）成田慎之介（2012）.『「尋常小学算術」における極限概念の教材に要に関する考察』,日本数学教育学会誌,94(4),pp.12-19

９）文部省(1942).『中學校高等女學校數學及理科教授要目解説要綱とその趣旨』,日本放送出版協会

１０）中等学校教科書株式会社（1944）.『数学編纂趣意書４・５第一類　中学校用』,中等学校教科書株式会社

１１）中等学校教科書株式会社（1944）.『数学　中学校用４　第一類』,中等学校教科書株式会社

１２）大矢雅則他（H29 検定済）.『新編数学Ⅱ』,数研出版

１３）大矢雅則他（H28 検定済）.『高等学校数学Ⅱ』,数研出版

１４）大島利雄他（H29 検定済）.『数学Ⅱ』,数研出版

１５）河野俊丈他（H28 検定済）.『新編数学Ⅱ』,東京書籍

１６）河野俊丈他（H29 検定済）.『数学Ⅱ』,東京書籍

１７）岡本和夫他（H19 検定済）.『新版数学Ⅱ』,実教出版

１８）大矢雅則他（H28 検定済）.『高等学校数学Ⅲ』,数研出版

１９）河野俊丈他（H29 検定済）.『数学Ⅲ』,東京書籍

２０）河野俊丈他（H28 検定済）.『新数編学Ⅲ』,東京書籍

２１）大矢雅則他（H29 検定済）.『新編数学Ⅲ』,数研出版

２２）大矢雅則他（H28 検定済）.『高等学校数学Ⅲ』,数研出版
２３）藤井斉亮（2015)『算数・数学科教育』　一藝社
２４）中谷太郎（2010)「日本数学教育史」亀書房
２５） H.Fruedenthal （1968）『Why to teach mathematics so as to be useful』,Educational Studies in Mathematics,vol1,pp.3-8
２６）H.Fruedenthal (1973)『Mathematics as an Educational Task』,D.Reidel Public Company
２７）文部科学省　『平成 30 年度告示　高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』
２８）Z 会　センター試験設問別正答率　数学 https://www20.atwiki.jp/zwiki/?cmd=word&word=%E8%A8%AD%E5%95%8F%E5%88%A5%20%E6%95%B0%E5%AD%A6&type=&pageid=1474
最終閲覧日（2019 年 4 月 15 日）

The study of material with intention of creating mathematics by students
:The analysis from a viewpoint of mathematization for ”sugaku daiitirui”

KONNO,Shogo

Key Word:「sugaku daiitirui, differential and integral, mathmetical activity, mathematization

abstract

In this study, I focused on the "sugaku daiitirui", which is a textbook edited with the intention of students finding mathematical properties and ideas in their activities. The purpose of this study is to clarify the structure of "sugaku daiitirui" questions and the sequence of activities, focusing on the fact that the students create mathematics in learning differential and integral. For that purpose, I analyze the questions of "division quadrature", "sequence", "limit", " geometric progression ", and "infinite decimal", which are the processes leading to differential integration in itirui. I considered the process in which the students supposed from this line are considered to be "mathematization", and from the consideration, we considered the value of the "sugaku daiitirui" as the process of "mathematization" by students. As a result, they clarified the mathematical activities that were supposed to have been assumed there, and it became clear that the composition was considered to be where "mathematization" would occur. Also, it was found that the teaching materials were arranged with the intention of understanding the meaning by numerical calculation by introducing from the graphical expression. These things contribute to the form of learning of mathematics in high school that is required today, and to the development of the concept of differential and integral.