

数学的問題解決における思考過程の可視化に関する研究

(2019 年 2 月 27 日 受理)

奈良教育大学名誉教授 重松 敬一

秋田県総合教育センター 椎名 美穂子

要約

本研究の目的は、中等教育の数学における主体的な取り組みに向けた教師による学習者への支援の在り方を検討することである。

多くの場合、学習者の反応が見られなくなると教師主導の認知的支援を行ってしまうことが見受けられる。しかし、このような状況では、今後、類題等に取り組む場面でも自力で解決することは難しい。従って、教師は認知的支援だけでなく、学習者の思考過程を重視したメタ認知的支援を視野に入れて取り組む必要があると考える。

本研究では、学習者の認知とメタ認知的活動の思考過程を可視化した「認知とメタ認知のマルチサイクルモデル」を開発して提案する。

キーワード：数学的問題解決、思考過程、可視化、認知的支援、メタ認知的支援

1. はじめに

中央教育審議会答申（2016）で、資質・能力の育成に向けた「主体的・対話的で深い学びの実現にむけた授業改善の取組」は、小学校、中学校を中心に多くの実践が積み重ねられているものの、高等学校においては更なる授業改善に向けた取組を図る必要があるとの指摘がある。数学を専門としている教師による指導であれば、その専門性が深い学びと結び付いて生かされることが望ましい。

高等学校数学科の学習指導案では多くの場合、スムーズに思考できない学習者を予想する等の学習者主体の視点が少ないという実態^{註1}がある。また、実際の授業でも、学習者からの反応が得られない局面については、「発問しても生徒の反応がないことに不安がある」「沈黙したときは分かりやすく説明してあげた方がよい」と判断し、学習者の表面的な反応に左右されて授業を進めてしまう実態^{註2}がある。そして、学習者もそういった教師の支援に頼る傾向がある。このようなことについて、佐藤他（2017）は学習者が自立して学び続けるための思考や態度、学習内容について教師の理解不足を挙げている。

2. 研究の目的と方法

本研究では、メタ認知を働かせるサイクルの理

想化したモデルを基に、学習者の思考過程について理解を促すことや、学習者への支援の在り方について検討することを目的とする。その際、高等学校数学「図形と方程式」の授業を基に、表4（後記）の32'00"のような認知的支援を行っている局面に注目し、認知的活動とメタ認知的活動を構造的に捉えて可視化し、考察する。

3. 認知とメタ認知のマルチサイクルモデル

(1) メタ認知に関する先行研究

学習者の思考過程を可視化することは容易でないが、重松他はメタ認知の立場から様々な分析を行っている。認知とメタ認知による思考の流れを明らかにした研究では、モニター、評価、コントロールのサイクルで捉える認知と、メタ認知の機能的関連を表した図がある。（図1。重松他，2001）。

また、小学生のメタ認知的知識の変化を長期的に分析した研究では、児童のメタ認知的知識の変化が学習状況の変容の大きな要因になっていることを明らかにしている。（図2。重松他，2004）。

これらの研究から、学習者は認知活動だけでなく、メタ認知活動も働かせていることが分かり、困難な局面でもメタ認知的活動を働かせることによって問題解決力に結び付いていることが分かる。

中学校・高等学校の数学の場合は、小学校算数と比べて高度な数学的知識や思考が要求され、単一の認知で解決できることは少なくなる。例えば、高等学校数学における式から円と直線の位置関係を考える問題では、「直線の式を円の式に代入して二次方程式にする」「二次方程式の解から位置関係を調べる」等といった複数の認知を働かせる必要がある。問題解決においてこのような困難が考え

られることから、学習者が反応を示さない局面では、必要な複数の認知が働いていないと教師が考えることもある。そこで、このような局面では、必要な複数の認知を考えて、認知とメタ認知的活動の関連を捉えていく必要があると考える。

(2) 認知とメタ認知のマルチサイクルモデルの開発

認知とメタ認知的活動の関連を捉えるためのモデルを開発するにあたり、問題を解決するために働く認知とメタ認知的活動を表すことを考えた。このことについては、重松他のメタ認知の関連図(図1)を参考にする。

重松他(前記, 2004)が長期的変容で明らかにしているように、学習者の一連の思考の流れの中には必要な複数の認知的活動があり、それに対応してメタ認知的活動も複数あると考える。これは一つの数学的問題解決においても同様で、一つの認知的活動とメタ認知的活動と捉えられるものが、細かな複数の認知的活動とそれをモニターしたり、コントロールするメタ認知的活動が連鎖したりしているものとする。従って、一まとまりに認知的活動を捉えるのではなく、一まとまりの中にある複数の細かな認知的活動とメタ認知的活動を捉えていくことが大切である。また、そのための新

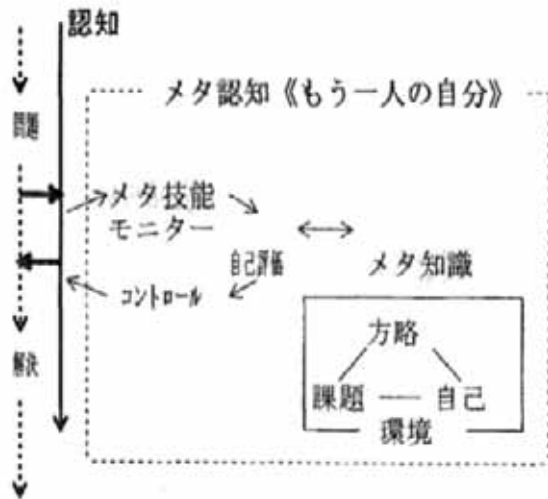


図1 認知とメタ認知の関連図
(重松他, 2001)

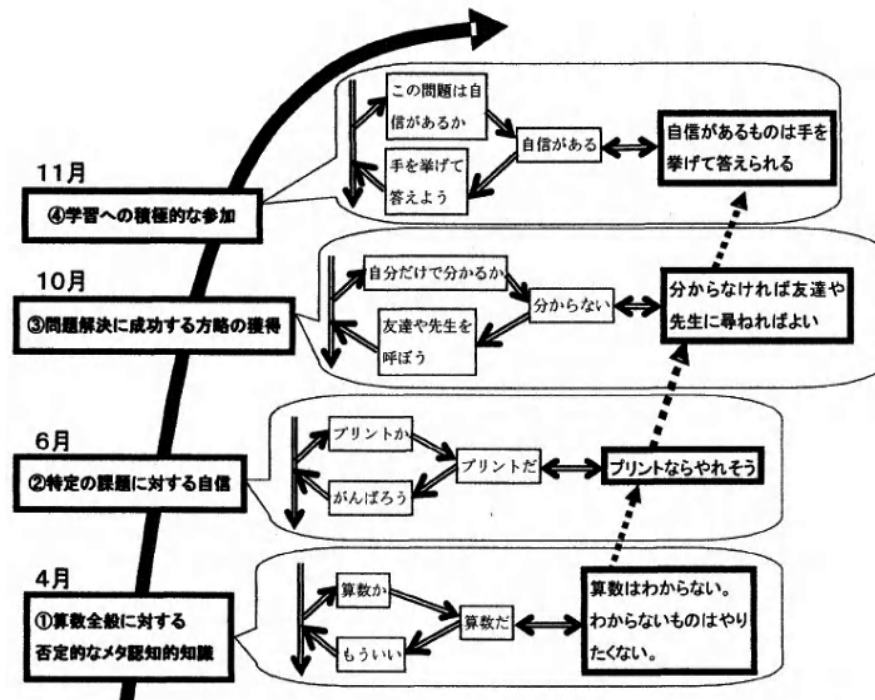


図2 A子のメタ認知的知識の変容(重松他, 2004)

たなモデルが必要と考え、「認知とメタ認知のマルチサイクルモデル（図3）を開発した（以下、マルチサイクルモデルとする）。例えば「一まとまりの認知的活動」とは、「A 式から円をかこう」であり、「その一まとまりの中にある複数の細かな認知的活動」とは「A' 円の中心を考える」であり、「A'' 半径の長さを考える」といったものである。

4. 授業の分析と考察

(1) 分析の対象とする授業

筆者らが、これまでに参観した高等学校数学の授業で、基本的な内容にも関わらず、教師主導の場面が多く見受けられるものを取り上げた（表1）。

本授業のビデオからプロトコルを作成し、マルチサイクルモデルに当てはめて分析を行った。また、必要に応じて授業者にインタビューを行い、事実の補完を行った。

表1 分析と対象とする授業

授業日時	2018年7月18日
対象生徒	P県高等学校第3学年（計6名）
単元名	図形と方程式 円の方程式
目標	二次方程式の判別式などを用いて、円と直線の位置関係について考察する。

(2) 授業の分析

実施された授業においては、考えてもらいたい数学の内容を適切に絞り、生徒同士で考え合う時間を保障していた。また、答えだけではなく、理由を考える場面も設定していた。しかし、生徒同士で考え合う時間以外は、生徒の積極的な反応がないために、教師主導となる場面が多く見られた。（局面Ⅰ・Ⅱ）。

<局面Ⅰ>

「式から円をかく」という局面（授業導入場面

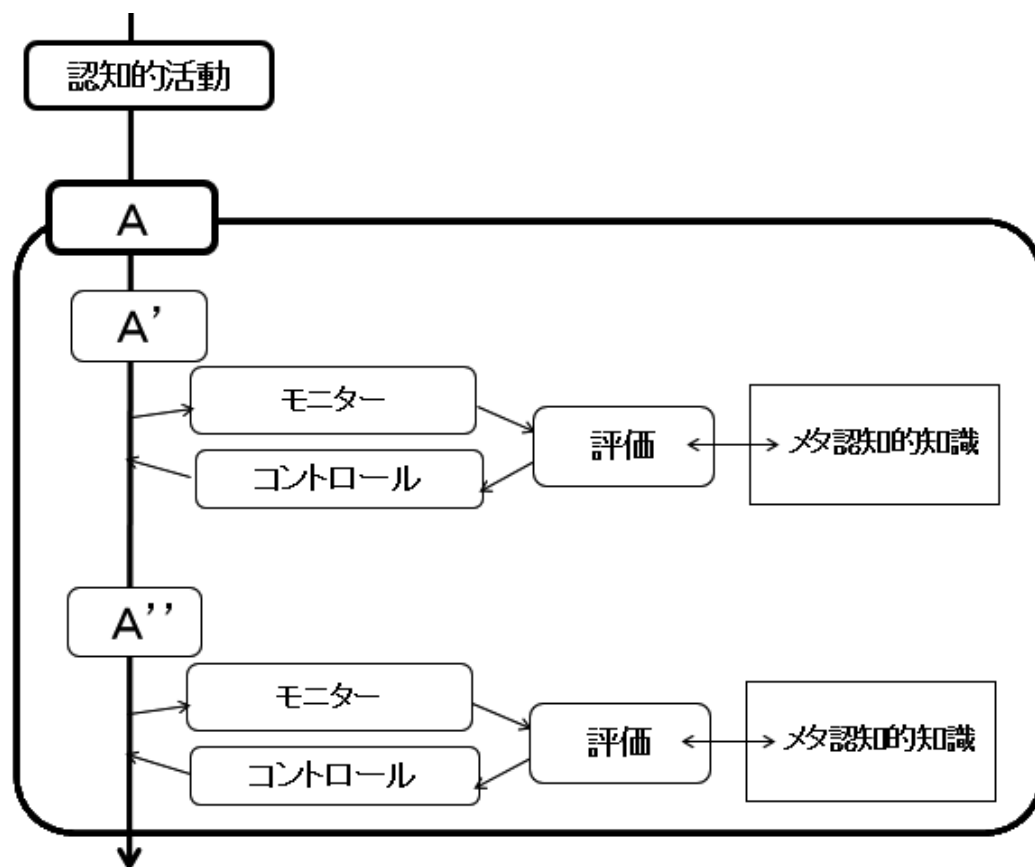


図3 認知とメタ認知のマルチサイクルモデル

の一部) のプロトコールは表 2 の通りであった。

この局面で必要とされる知識や技能は、比較的簡単な既習の内容であり、本来、活用できる状態のはずである。しかし、教師の活動に対する生徒の反応は、既習の内容を思い出せず、鉛筆をとめて教師の説明を待ったり、教師の説明通りにノートに書いていったりする姿であった。その教師主導となった場面についてインタビューしたところ、「生徒が円の書き方を忘れていた」「教室が静かに

なることに抵抗がある」「説明した方が学習は進むと考えた」と答えた。しかし、生徒同士で考え合った後の教師と生徒のやりとり(表 3)をみると、全ての知識や技能の支援を行わないと、生徒が思考できなかったと考えるのは難しい。

＜局面Ⅱ＞

連立方程式を基に、円と直線の位置を考える局面（授業の終末場面の一部）は表 4 の通りであった。

表 2 局面Ⅰのプロトコール

教師の活動	生徒の反応
<p>＜0'00＞</p> <ul style="list-style-type: none"> 問題を書き板に書く。 (問題) 円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = x + 6$ の図をかきなさい。 生徒に図形をかく時間を与える。(3 分間) 円の式について説明しながら、教師が半径 $\sqrt{8}$ 円を書き板に書く。(2 分間) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \div 2 \times 1.414 \div 2.8$ を確認する。 直線の式の傾きや切片について、言葉で確かめる。 	<ul style="list-style-type: none"> 全員が問題をノートに書く。 図形をノートに書き始めるが、何人かは鉛筆がとまり、考え込む。 全員が説明を聞きながら、ノートをとる。 全員が説明を聞く。 全員が説明を聞く。

表 3 生徒同士で考え合った後の局面

教師の活動	生徒の反応
<p>＜26'30＞</p> <ul style="list-style-type: none"> グループで話し合ったこと共有するために、教師が発言を促す。 <p>T: 直線と直線の交点、或いは円と直線の交点を出すときに、連立を使えばいいとあります。一つの考え方として、連立方程式を作るとするのはいい方法だと思います。(式を書き板にかく) 共有点を調べるのにいい方法だと思います。(書き板に式をかく)</p> <p>T: 他にはどんな方法がありますか。</p> <p>T: なるほどね。連立させてできた式。こういう式だね。(書き板に教師がかく) $x^2 + 6x + 14 = 0$ を因数分解できるといいね。あるいはくっついていてと重解だと分かる。でも、この場合どうでしたか。(少し待つ) かけて、たして因数分解はできない。</p>	<p>C1: 連立方程式を考えてみました。</p> <p>C2: 因数分解できる方法があります。式をくっつけたりして。</p>

表4 局面Ⅱのプロトコール

教師の活動	生徒の反応
<p><32'00"></p> <ul style="list-style-type: none"> ・教師が連立させて書いた式を基に説明を始める。 <p>T: この式$x^2 + 6x + 14 = 0$は因数分解ができません。</p> <p>因数分解ができると接したり、交わったり。これまでは解の公式に当てはめていました。では、解の公式に入れて計算をしてみましょう。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・黒板に書きながら説明し、解の公式に数を全て代入して式を作り、生徒に計算をさせた。机間指導をしながら様子をみる。 ・黒板で計算をし、$\sqrt{\quad}$の中が-20になることを示す。 <p>T: $\sqrt{\quad}$の中がマイナスになりました。このとき、どんな答え方していましたか。数学Ⅰだったら？</p> <p>T: 解無し。数学Ⅱなら？</p> <p>T: 虚数解だね。そうするとどういうことかという、並行だと交わらないから解無し、因数分解できるとこうなります。答えが一つだとこうなります。(図をかきながら説明する)</p> <p>T: つまり、$\sqrt{\quad}$の中がプラスであれば、2点で交わります。(式と図を対応させながら)$\sqrt{\quad}$の中が0なら±が消えるので解が1つ。$\sqrt{\quad}$の中がマイナスなら虚数解だから、実数解がないので離れる。つながりましたか。教科書で確認してください。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・全員が説明を聞く。 <ul style="list-style-type: none"> ・全員が教師の手続きに従ってノートに書き始める。 ・全員が黒板で確かめる。 <p>C1: 数学Ⅰだったら、実数がない。</p> <p>C1: $\pm\sqrt{20i}$</p> <ul style="list-style-type: none"> ・全員が説明を聞く。 <ul style="list-style-type: none"> ・何人かが教科書を開く。

この局面で必要とされる知識や技能は、「直線と円の連立から得られる二次方程式の解を求める」「因数分解ができない場合は解の公式を用いる」「虚数解である場合の位置関係を考える」といった比較的高度な既習内容である。教師の活動に対する生徒の反応は、ほとんどが指示に従って黒板を見ながらノートに書く姿であり、質問に答えているのは同じ生徒であった。その場面について教師にインタビューしたところ、「待っていても授業は進まないし、解法は決まっているから、他の生徒にも分かり易く進めた方がよいと思った」と答えた。しかし、本来、生徒が行うはずの思考を教師が進めてしまっただけで、後に類題等を解くにあたって自力で解決していくことは難しいと考える。

(3) 思考過程の可視化による分析と考察

教師主導となった局面Ⅱを取り上げてマルチサイクルモデルにより考察を行う。

図4が局面Ⅱをマルチサイクルモデルに反映したものである。一まとまりの認知的活動「2つの

式から位置関係を考える」には、「直線と円の2つの式をどうしたらよいのか」「式を因数分解できないときはどうしたらよいのか」「解が虚数解の場合、位置はどうなるのか」といった細かな3つの認知的活動が含まれる。しかし、教師が一まとまりの認知的活動に反応がないことへの対応として、解法の一つ一つを生徒が理解できるように説明しているものであり、主体的な学びを促すために計画的に用意された対応とは考えられない。

表4の教師「 $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになりました。このとき、どんな答え方していましたか。数学Ⅰだったら？」という質問に対して生徒は「数学Ⅰだったら、実数がない」と答えている。これは認知的活動であり、同時に「モニター：数学Ⅰの学習を思い出せるか」「評価：思い出せる」「コントロール：数学Ⅰの学習を思い出そう」というメタ認知的活動も働いていると考える。このことを基にすると、その前の教師の説明「式 $x^2 + 6x + 14 = 0$ は因数分解ができません。(中略)解の公式に入れて計算をしてみましょう」を、発問「式を

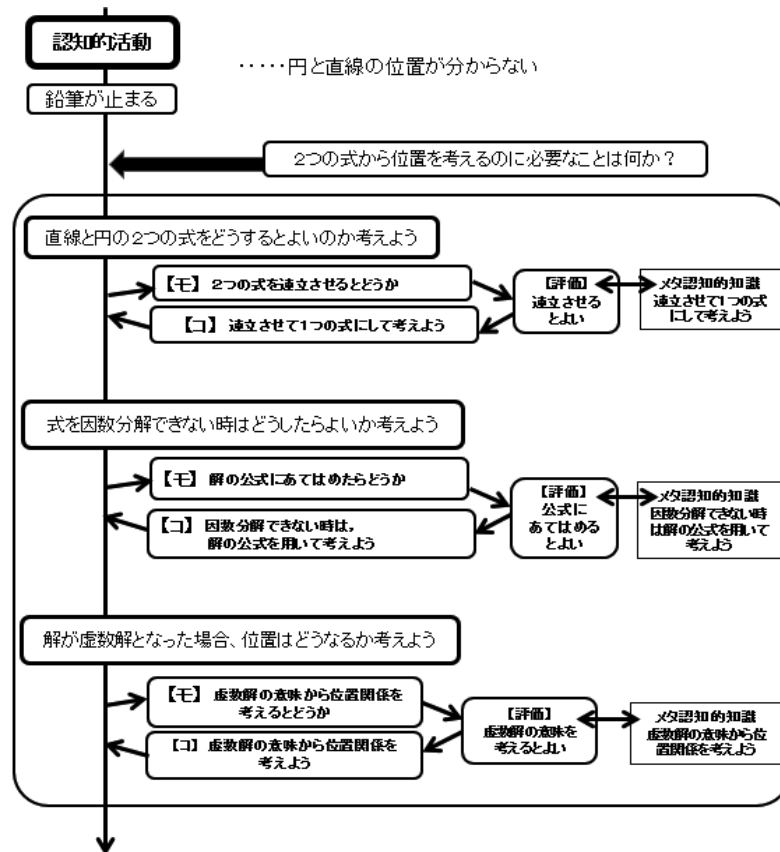


図4 局面Ⅱのマルチサイクルモデル

因数分解できない時はどうしたらよいのか考えよう」に変えて、メタ認知を働かせる必要がある。同じように、教師の説明「 $\sqrt{\quad}$ の中がプラスであれば、2点で交わります。(中略) $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスなら虚数解だから、実数解がないので離れる」も、発問「解が虚数解となった場合、位置はどうなるか考えよう」に変えることが望ましい。

「直線と円の2つの式をどうしたらよいのか考えよう」「式を因数分解できない時はどうしたらよいのか考えよう」「解が虚数解となった場合、位置はどうなるか考えよう」の3つの発問により、認知的活動とメタ認知的活動が連鎖して機能し、代数の世界を幾何の世界で考えて解決していくことが可能となる。つまり、図4にあるマルチなメタ認知を働かせるようにすれば、教師主導の場面は今回の授業よりも少なくなり、学習者主体の問題解決になっていたのではないかと考える。

4. 研究のまとめと今後の課題

マルチサイクルモデルを用いた分析により、一まとまりの認知的活動を形成する細かな認知的活動とメタ認知的活動を、教師が考えて指導を行う

必要性が見えた。その際には、細かな認知的活動が働くように教師が一問一答を行うのではなく、学習者のメタ認知的活動を促すために、「どうしたらよいのか考えよう」「前にはどうやったか考えよう」といった学習者自身が考える発問に改善していく必要がある。

清水(2006)は、メタ認知的活動を教科内容から独立させずに、数学の内容と関連させて捉えていく必要があると指摘している。本研究において、マルチサイクルモデルに表された活動から、メタ認知的活動と教科内容を関連させた具体的な支援の在り方が見えた。今後は、学習者の問題解決が停滞する場面に焦点を当て、学習者側から見たメタ認知的支援の在り方について明らかにしていく。



本稿は、共同研究である。総括を重松が行い、第1章から第4章を椎名が担当した。

註

- 1 新潟県立教育センターWeb サイト
(https://www.nipec.nein.ed.jp/sc/sansuu_

suugaku/index.html, 2018 年 12 月 4 日確認。)に掲載の「指導案&実践記録集」を分析。

- 2) P 県高等学校数学教師が行ったDVD授業について高等学校教師 7 名でやり取りした会話の記録メモ。

引用・参考文献

- 1) 重松敬一・勝美芳雄・勝井ひろみ・生駒有喜子 (2001), 数学教育におけるメタ認知の研究 (16), 第 34 回数学教育論文発表会論文集, pp. 373-378
- 2) 重松敬一・勝美芳雄・細田智子 (1995). 「数学教育におけるメタ認知の研究」, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 第 1 号, pp.55-63
- 3) 重松敬一・勝美芳雄・高澤茂樹・上田喜彦・高井吾朗 (2013), 「算数の授業で『メタ認知』を育てよう」, 日本文教出版
- 4) 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子 (2017), 「学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証」, 数学教育学論究, 99 巻, 臨時増刊号, pp.9-16
- 5) 清水美憲 (2006). 「数学学習における『メタ思考』の顕在化とその促進に関する研究」, 数学教育学論究, 86, pp.6-11

Visualization of Thinking Processes in Mathematical Problem Solving

SHIGEMATSU, Keiichi

SHIINA, Mihoko

Abstract

In this paper, we are discussing about teaching/learning processes of mathematics in senior high school. Usually, there are many senior high school teachers who teach mathematics directly to students cognitively. In this situation, students will not be able to solve mathematics problem later by themselves even if they can solve the similar problem.

In conclusion, we point out that teacher must take count not only students' cognitive processes and also metacognitive processes.

Lastly, we propose the multi cognitive-metacognitive processes visually.

Key Words : Mathematical problem solving, Thinking process, Visualization,

Cognitive Supporting, Metacognitive Supporting