算数・数学科の学習に関わる数学観についての一考察

ー数学観の表出・形成・変容過程のモデル構築の試みー

(2018 年 2 月 28 日　受理)

秋田大学教育文化学部学生　　武田　太久実

キーワード：数学観，モデル，過程

要約

本稿の目的は，算数・数学科の学習に関わる数学観の特徴を整理し，個人の数学観を捉えることのできる明示的なモデルの構築を行うことである。そのために，主として数学教育学研究における数学観に関する先行研究から，数学観の特徴について考察する。その結果から，数学観の表出過程，形成過程，変容過程という特徴に着目した。哲学，情報工学を参考に，数学観の表出過程，形成過程，変容過程についてのモデルの構築を試みた。実際の算数・数学科の学習についてのエピソードを，これらのモデルに適用させ，本稿におけるモデルが個人の数学観を捉えることに貢献する可能性について検討を行った。

1．はじめに

算数・数学教育において，数学教師の数学観の転換が求められている。そこには，学校教育において，学習者の主体的な学びが年々，強調されてきているという背景がある。

Plato 主義的数学観に代表される外在的数学観は，学習者の主体的な学びを保証しないということは，湊・濱田(1994)から明らかにされている。そこで，湊(2016)によると，外在的数学観から主体的な学びと整合的な社会構成主義に立脚した数学観に転換することが必要であることが述べられている。そして，この数学観の転換の要求に応じた研究として橋本・渡邊(2017)などが，数学教育学研究において見られるようになった。

しかしながら，湊(2017a)によると，氏はかつて数学の哲学や数学観に関する研究は算数・数学の授業に関係がないとの批判を受けたという。この話からもあるように，数学の哲学や数学観というものが，算数・数学の授業には関係ないと考える者は依然として少なくはないと考える。また，筆者のように，自らが何らかの数学観をもち，その影響を受けて算数・数学の授業を考えていること，そして，数学観は単一のものではなく複数のものが存在するということについて，自覚，認識できていないという現状がある。これは，数学観というものが，暗黙的なものとなっていることが，数学観を捉えることの困難性を生んでいると考える。

この現状を踏まえ，算数・数学教育関係者など広く一般に，数学観と算数・数学教育の関係を捉えることの機会を提供するために，数学観を捉えることのできるモデル構築を試みる。こうして数学観を捉えることは，算数・数学科の学習活動に新たな観点を提示するなどして，その充実，発展に貢献できると考える。

本稿では，算数・数学科の学習に関わる数学観の特徴について考察し，明示的なモデルの構築を試みる。

2．研究の目的と方法

本稿では，数学観の定義を定め，数学観の学習に関わる数学観の特徴を明らかにし，明示的なモデルを構築することを目的とする。

この目的を達成するために，本稿では主として文献研究，調査研究の方法をとる。

まず，数学教育学研究における数学観に関わる先行研究(湊・濱田, 1994, 湊, 1996, 2002, 髙橋, 2010 et al.)を基に数学観の定義を定め，文献研究を通して数学観の特徴の分析を試みる。この過程から抽出された数学観の特徴を基に，より簡潔に数学観を捉えることができるようなモデルの構築を試みる。本稿で構築したモデルを，調査研究で得た実際の算数・数学教育の学習活動の事象に適用させて検討を行い，これらのモデルが数学観を捉えることに貢献し得る可能性を有することを示していく。

３．数学観について

本稿における数学観の定義とその補足を行う。
本稿では，数学教育学研究における数学観に関する先行研究（湊・濱田, 1994，湊, 1996, 2002，髙橋, 2010 et al.）から，数学観を次のように定義する。

数学観とは，
数学の本性(本来もつとされる性質)に
対する見方である。

この定義における「数学の本性」について補足する。アーネスト(2015)によれば，数学の本性を説明することは数学の哲学の主たる課題となっている。数学の哲学において，数学の本性として語られるものには，主に「数学的知識」，「数学的対象」，「数学の応用」，「数学の実践」，「数学的真理」などが挙げられている。数学という学問の世界において，この数学の本性に対する見方は,その時代ごとに大きく異なっている。また，学問の数学における数学観の数学史的変化を記したものとして，ガスティ（1999)などがある。

一方，表現される数学観が哲学的妥当性をもつものであるかという議論がある。自身が立脚する哲学的立場によって，その数学観は異なってくる。それが哲学的な妥当性を帯びているかということの判断を行うときの規準として，アーネスト(2015)は，次の判断規準をあげている。氏は，特に哲応用可能性が説明できない哲学は哲学としては失格である(湊, 2017，p. 11)という考えのもと，次の適切性規準を設定している。これらの諸条件は，数学観の特徴を捉える際に，有用なものとなると考える。

表１に示されているこれらの数学の哲学の適切性規準の項目から数学の本性を捉えることで，個人の数学観が如何なるものであるかが，明確なものとなってくる。それは，これら６つの条件から数学について思考するとき，必然的に自身の数学観，つまり自身が行っている数学の本性に対する見方に基づいた思考となるものと考える。例えば，表１の①数学の知識に観点を設定して数学の本性について思考する。このときに，数学的知識はどのように正当化されるのかということを考える。これに対して「数学的知識は，絶対不変的なものだ」と答えるなど，自身が数学の本性として，絶対性を考えていることの可能性を見出すことができる。これは，｢数学の本性はどのようなものか」という問いように，直接的に数学の本性を考えるよりも自身の数学観がより容易に明らかなものとなる。その点で，表１の諸条件は数学観を捉えることに有用である。

表 1．数学の哲学の適切性規準

① 数学の知識
その本性，正当化，発生，及び証明の役割について
② 数学の構成的，構造的な理論
その性格と展開，良さの査定と評価について
③ 数学の対象
それらの本性と起源，数学的言語との関係について
④ 数学の応用
科学，科学技術，その他の分野における効果について より一般的には数学と他分野の知識や価値との関係について
⑤ 数学の実践
現在と過去における数学者の数学的活動について
⑥ 数学の学習
その性格，数学的知識の次世代への伝達と数学者個人の創造に果たす役割について

（アーネスト, 2015，湊, 2017b を参考に作成）

４．数学観の特徴

本稿では，先行研究における算数・数学科の学習に関わる数学観の特徴として，次の 3 点を整理した。1 点目は，数学の哲学に基づいた外在的数学観と内在的数学観の二極対立的な数学観の構造である。2 点目は，授業の型との関連である。3 点目は，数学観の表出過程，形成過程，変容過程である。

まず，数学観の二極対立的な数学観の構造について述べる。この外在的数学観と内在的数学観の二極対立的な数学観の構造は，多くの先行研究においても語られている。

髙橋(2010)はこの対立的な数学観として，Plato 主義的数学観と Aristoteles 的数学観とをあげている。氏があげている 2 つの数学観は，外在的数学観と内在的数学観の代表的な数学観である。外在的数学観は，哲学者 Plato に起源をもち，内在的数学観は，哲学者 Aristoteles に起源をもつ。この対立的な数学観は，数学と我々人間との関係や, 数学的知識･真理の絶対性, 可謬性といった観点で述べられる。これは，前節における表１の①や③の条件を中心的な観点として，数学を捉えると考えやすい。これら 2 つの数学観の性質をまとめると，表 2 のようになる。また，湊･濱田(1994) などにより，外在的数学観の特徴を帯びた数学観は主体的学習と非整合的であり，内在的数学観の特徴を帯びた数学観が主体的学習と整合的であることが明らかにされている。

表 2. 二極対立的な数学観からみた数学的内容をみなすことを捉える枠組み

	外在的数学観	内在的数学観
数学的内容	人間の外にある. 事象に真理として埋め込まれる.	人間の中にある. 事象から合理としてつくられる.
事象	偶然性や不確実性があるので，理想化して扱う.	偶然性や不確実性があっても，なるべくありのまま扱う.
みなす	事象は真の数学的内容でないことを前提に，一意の理想的な数学的内容を発見する.	構成する数学的内容は事象に最適かわからないことを前提に，任意の合理的な数学的内容を構成する.
正当化	形式的に定められた言語のみを使い，ただ 1 つの数学的内容に収束させる.	共同体で受け入れられた言語を使い，他の数学的内容の可能性を検討する.

（橋本&渡邊, 2017 を参考に作成）

次に，2 つ目の特徴である数学観と授業の型との関係について述べる。

数学教師がもつ数学観と授業の型には，一体の関係があるということをまとめたものとして，授業三型論(湊,1996,2002)がある。氏の授業三型論を外在的数学観と内在的数学観の二極対立的な数学観の構造と関連させたものが，図 1 である

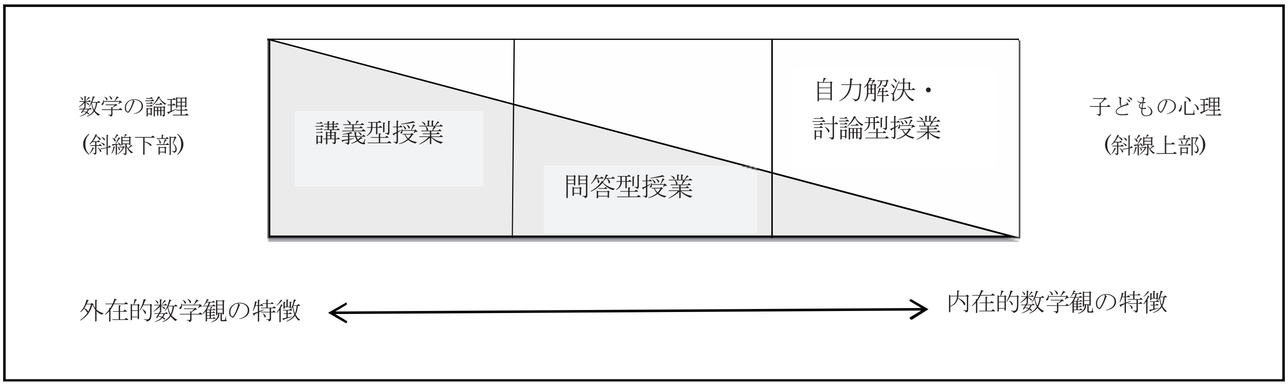

図 1. 授業三型論と二極対立的な数学観（湊,1996,2002 を参考に作成）

図 1 の各々の授業型は，次のようなものを指す。

・講義型授業：
　教師の説明を中心とし，教具の操作も教師により行われる講演会的授業。

・問答型授業（または講義・問答型）：
　講義式の中に発問・応答が組み入れられ，必然的に子どもの心理(例えば誤り，意欲)が入り込み，これが無視できない授業。

・自力解決・討論型：
　課題学習が与えられ，子どもの取り組み，その後の討論による深化や一般化を図る授業。

講義型授業は，原理的には子どもが不在でも実施可能な授業であり，子どもとの対応がない一方向的な，説明や解法の注入授業である。この授業は，唯一・絶対の真理としての数学を授けることをねらいとしており，授業内容・方法はともに数学に従うという特徴をもつ。学習者は，ここで得たものを簡単に崩すことは許されない。つまり，獲得した知識は「先生が言った」ということに正当性をもち，試験では先生が解いた通りに解かなくてはならないという暗記的性格を有している。

この講義型授業の短所である学習者の心理の反映の少なさと数学的知識が学習者のものとならないという点を，反省から発問・応答が取り入れられた授業が，

問答型授業である。この型は，発問・応答のために学習者の存在は不可欠で，応答では学習者自身や学習者の考えが授業に介入し影響を受ける。このことが授業に対し，効果・効率の観念が入るため，教師は講義型授業のように意図的教育では成立しない。しかし，この型も講義型授業と同様に教師主導であり，数学を絶対的な存在として捉えていると，湊(2002)はいう。教師がこの立場であるならば，学習者は様々な試行錯誤を行ったとしても，その結論の正当性は予め絶対的に定まっており，学習者の数学学習に対する絶対的な成功を保証することはできないのである。湊(2002)の表現を用いれば,「よく考えたね, でも間違いなのです。」という教師の言葉にその特徴が代表される授業の型である。つまり，講義型授業と比較すれば，数学を考えること，学習することの方法には自由度が与えられたものの，数学そのものは唯一・絶対の真理であるという見方をしているのである。

そして，自力解決・討論型の授業は，子どもが各自課題の解決に迫り，討論で深化・発展を行う授業である。子どもの既有の知識を基にして概念等を構築し，学級全体での討論で深化･発展させる方法であるから，教師は教材研究や授業準備で力を発揮することとなるが，授業自体は子どもを主体として動くこととなる。授業においては，学習者が正当な目標に向かってどれほど学習をしたか，それがどれだけ成功したかが評価の対象となる。つまり，形成的アセスメント評価が重要となってくる。近年では，よく見られるようになった授業形態であるが，この授業型は内在的数学観を有しなければならず，外在的数学観では，この授業型の特徴と数学観が非整合的であり，形式的に真似ただけの授業実践となり，発問や振る舞いの節々に非整合的なものが見られるようになる。

以上のように，数学観は授業の型との関連した特徴を有している。

最後に，数学観の表出過程，形成過程，変容過程について述べていく。数学観には，表 3 のような過程を捉えることができる。これらの過程は，先述の二極対立的な数学観の間で発生するものと考える。

表出過程(Expression process)とは, 個人が有している数学観が外的に表出する過程と定義する。

数学観という概念そのものを知覚することはできない。しかし，個人が有している数学観は，行動や発言といったことから読み取ることができる。算数・数学科の学習に関わる数学観が外的に表れることの論拠は，先述の授業三型論である。授業三型論は，教師が有している数学観が授業の型に表れることを説明していることから，この理論に基づけば，数学観には「表出過程」という特徴を捉えることができる。

表 3. 数学観の過程に注目した特徴

1. 表出過程（Expression process）
2. 変化の過程
   - 2-1. 形成過程（Formative process）
   - 2-2. 変容過程
     - 2-2-1. 全面的変容過程（Change process）
     - 2-2-2. 部分修正的変容過程（Modification process）

次に，変化の過程を定義する。変化の過程は，個人が有している数学観に何らかの変化が生じる過程と定義する。この過程は，大きく 2 つの過程に分けて捉えることができる。

1 つは，形成過程(Formative process)である。この過程は，個人の数学観がある枠組みで判別可能な状態として形づくられる，つまり，表 1 の適切性規準の諸条件を観点として考察することのできる哲学的妥当性を有する数学観となるまでの過程である。この過程には，ある時間において個人が有していた数学観が，より強固なもの，明確なものへと成長的変化する過程も含めて考える。この過程の特徴は，数学観という概念が個々人に存在するという事実から認められる。

もう 1 つは，変容過程(Change / Modification process)である。変容過程は, ある時間において個人が有する数学観が，その後続する時間において異なる特徴の数学観となるまでの変化の過程である。この過程には，英訳からも分かるように，2 種類の変容を捉えられると考えられる。“Change process”と表現される変容過程を「全面的変容過程」と名付ける。この過程は，ある時間において個人が有していた数学観が，後続する時間において特徴・性質が大きく異なる数学観へと変化する過程を表現する。これは，湊(2016)らが述べるような数学観の「転換」という言葉で表現される数学観の変容である。例えば，外在的数学観の特徴をもつ数学観が，内在的数学観の特徴をもつ数学観へと変容することは，この 2 つの数学観が相容れない数学観であることから，全面的変容として捉えることができる。

また，“Modification process”と表現される変容過程は「部分修正的変容過程」と名付ける。この過程は, ある時間において個人が有している数学観に不都合,

非整合性を感じ，その後続する時間において，不都合部分を補う，修正する形で変容する過程である。この変容では，数学観は変化をするものの，その哲学的な立場は大きく変化していない。この変容は，日本語では「部分修正」ともいえるため,「転換」の言葉で表される変容の仕方は，これに相応しくない。つまり，数学観の主な特徴は変わることなく，その数学観の特徴を拡張したり，強固なものとしたりするような変容を部分修正的変容と捉える。

こうした数学観の変容過程という特徴は，教員養成課程に所属する大学生を対象とした数学観の変容を目的とした研究である伊達(2010)の試みからも確認できる。氏は，学生に初等的な数学の知識を自ら構成したり，確かめたりといった数学的経験（例えば，古代エジプトの分数表や，フランスやロシアの農民間で行われていた指計算などの解釈や説明を行う）をさせ，その後のレポートから学生の数学観の変容について考察している。このレポートでは，上記の数学的経験をする前後での自身の数学観についての記述がなされており，本稿における「全面的変容過程」や「部分修正的変容過程」に相当する変容過程があったと考えられる数学観の変容が見られる。

例えば，数学的経験以前の部分では，数学の問題には予め定まった解き方が存在し，その方法をおさえることが数学であると考えていたという学生の記述がある。その学生は，数学的経験以後の部分において，その数学の解き方は先人の試行錯誤の上に成立しており，各地域によってもその解き方は異なっているものであるという記述となっていた。これは，特に，表 1 の①数学の知識の観点から，数学的知識の本性や発生の点で，数学的知識は予め定まっている絶対的なものであるという外在的数学観から，人間の思考によって生まれ，唯一に定まるものではない知識であると考える内在的数学観へと，この学生の数学観は全面的変容が行われたと捉えることができる。勿論，表 1 の他の観点から，この学生の数学観の変容を異なった解釈で捉えることも可能である。

一方，数学的経験以前の記述で，数学は公式を覚えるものであるとする学生がおり，その学生の数学的経験以後の記述では，数学の公式で簡単に答えが求められるのは, 先人の苦労のおかげであると表現している。これは，表 1 の②数学の構成的，構造的理論の観点から，この学生は，数学的経験以前から数学は「公式」によって構成されていると捉えている。そして数学的経験を通した後も,「公式」が数学の構成の中心にあり，その「公式」は先人の苦労によって形成されたものであると捉えていると考えられる。このように，数学の構成について大きな変容が見られないことに加えて，①数学の知識の観点から「公式」という数学的知識の正当性を考察すると，この「公式」は人間の手によって形成されたものの，その「公式」の正当性は，揺るぎない絶対的な真理のように捉えているように読み取れる。よって，この数学観は，外在的数学観の立場から大きくは変容していないと考え，部分修正的変容であると捉えることができる。このように，氏の研究からは，数学観には 2 種類の変容が存在することが確認できる。

5．数学観の過程のモデル

本稿では，表 3 における 1.「表出過程」と 2.「変化の過程」に対して，それぞれ仮説を設定し，モデル構築を試みた。また，変化の過程については，全面的変容過程と部分修正的変容過程の 2 つの過程に共通する変容の仕方に注目している。

(1) 写像仮説モデル

表出過程について設定した仮説は,「写像仮説」である。この仮説は，前期 Wittgenstein 哲学の著書「論理哲学論考(Logisch-Philosophische Abhandlung)」について記した奥(1975)にある「写像理論」の枠組みを利用したものである。この仮説は，人間の数学観が，外的に表出する過程を捉えるための仮説である。この仮説を基としたモデルが図 2 に示す「写像仮説モデル」である。

$$m \xrightarrow{\mathrm{V}} \mathrm{V}(m)$$

m : mathematics 数学(数学的概念，数学的知識など)
V : View of mathematics　数学観
V(m) : Sense of mathematics　数学観の現れ

図 2. 数学観の表出過程を表す写像仮説モデル

この写像関係では，数学観が写像に相当し，数学が個人の数学観という写像により，数学が個人ごとの現れとなって表出する過程を意味している。ここでの「数学 mathematics」は，数学の本性として語られる数学的概念や数学的知識といった「数学」を構成している構成要素を表す。

また, 本稿は, 数学観を「数学の本性に対する見方」と定義していることから，数学観の英訳は，“View of mathematics”とする。数学観は,「数学」という像を「数学観の現れ」という像に写す写像として捉える。前期 Wittgenstein 哲学における写像は,「論理形式」であることから,この論理形式の枠組みに数学観の概念を対応させていくことで,数学観の概念自体を明示的なものとするための示唆が得られるのではないかと考える。但し,数学観の現れは,前期 Wittgenstein 哲学の像のように「言語」のみではなく,行動等の幅広い方法で現れることから,現れについては,前期 Wittgenstein 哲学よりも広義的に考えていく。

そして,「数学観の現れ」に対して“Sense”の訳語を与えているのは,前期 Wittgenstein 哲学において,写像されて現れた像である「命題の意味」の訳語“Sense”に対応させている。本稿では,「数学観の現れ」を前期 Wittgenstein 哲学の主要命題の第三命題にある「思想」として捉えることを試みている。この主要命題 3 は,「事実の論理像が思想である」であるとしており,命題 2.181 によると,写像の形式が論理形式のときの像を論理像という。つまり,これに対応させると,「数学」という事実を「数学観」という写像の形式によって写像して現れる像が「数学観の現れ」ということとなる。このことから,数学観の現れがもつ性質や特徴は,前期 Wittgenstein 哲学の主要命題の第三命題に対する補足命題などから,その性質の示唆を得られると考える。

以上のように,哲学的な特徴からこのモデルの基となっている前期 Wittgenstein 哲学について更なる考察を行うことで,数学観をより明示的に捉えることができる示唆が得られると考える。

(2) クラウド仮説モデル

本稿では,写像仮説モデルと並行して,変化の過程を捉えるための仮説として,「クラウド仮説」を設定している。これは,変化の過程が様々な要因によって生じる複雑な動きであると考え,その複雑性の高さを捉えるために,Cloud computing のモデルを基に構築したものである。つまり,変化の過程には,様々な要因の影響と,それに伴う複雑で種類の多い経路が存在すると考える仮説である。本稿では,この構造を「プロセス ネットワーク クラウド(Process Network Cloud ;以下 PNC)」と呼ぶ。

図 3 のモデルでは,PNC に対する入力が 2 つ,出力が 1 つのみであるが,これは本稿で立てた後述する仮説に基づくものであり,この過程は先述したように複雑性が高いことから,多くの入出力が行われていると考えることが妥当である。

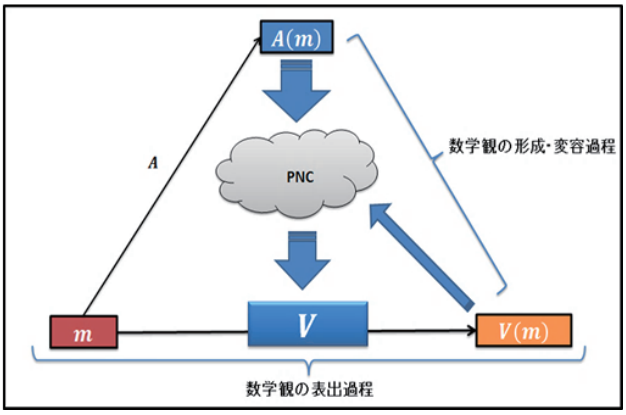

図 3. 数学観の表出・形成・変容過程のモデル

① 数学的作用

このモデルの PNC 内の 1 つの過程として,本稿では「弁証法的過程 Dialectic process」を構築した。

この過程モデルは,本稿で新たに規定する「数学的作用 Action of mathematics」が必要となる。「数学的作用」とは,「数学(数学的概念や対象など)が人間に与える思考,理念の変化の可能性」と定義する概念であり,生態心理学の Affordance という概念を基に規定したものである。

Affordance とは,「特定の有機体(群)が特定の環境内に生息しているとき,その環境の中で特定の対象(群),事象(群)が,その特定の対象(群),事象(群)との関係で特定の有機体(群)に対して提供する『行為の可能性(opportunities)』」(佐々木・三嶋・松野,1997)のことである。例えば,コップの取手が主体に対して,「持つ」という動作を明示的にアフォードしている(与えている)と解釈する概念である。

これと類似的な視点で数学を捉えてみようという試みが,数学的作用の概念である。つまり,数学的対象(ex.命題)が,数学観(ex.数学は論理によって表現される性質をもつ)に暗黙的に作用していると捉える概念である。

この数学的作用の概念が Affordance の概念との相違点は 2 点ある。1 点は,Affordance は人間の「行為」に対する可能性であるのに対し,数学的作用は,人間の「理念」に対する可能性であるということである。また,Affordance は明示的に示しているのに対し,数学的作用は暗黙的であるということである。

この数学的作用の概念によって,次の弁証法的過程を説明していく。

② 弁証法的過程

この過程は，変化の過程の中でも変容過程に着目したものである。この弁証法的過程は，Hegel 哲学における弁証法の考え方を参考に，自己が有する数学観と異なる数学観の認識を通して自覚し，変化させていく過程をモデルにしたものである。

Hegel 哲学における弁証法とは，否定・矛盾をはらんだ運動とその原理であり，固定的な規定の流動化，逆のものへの反転を経て，綜合・まとまりへと発展していく過程である。

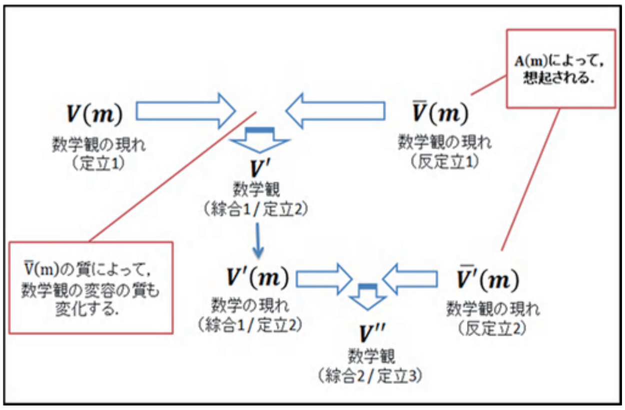

図 4. PNC における弁証法的過程

さらに，この弁証法の構図について補足する。

ある A は非 A となる(自己は他者となる)。しかし，その非 A が再び否定されて A' となる。A と A'とは異なっており，A は A' において廃棄される(新しいところへ行くために古いものを廃棄する)。しかし，両者はある意味で同じであり，A と A' の中に保存される(高い状態に保たれる)。しかも，直接的な A から媒介的な A' へと向上する(新しい状態へとなること)。このような構図となっている。

表 4. J.G. Fichte の知識学の三原則

第 1 原則（自我の定立，定立 Thesis）
自我は根源的に端的に自己自身の存在を定立する。
第 2 原則（非我の反定立，反定立 Antithesis）
自我に対して非我が端的に反定立される。
第 3 原則（自我と非我の相互制約，総合 Synthesis）
自我は自我のうちで，ある可分的非我を可分的自我に対して反定立する。

（クンツマン,2010 を参考に作成）

また，この構図は，J.G. Fichte の知識学が基礎となっている。Fichte は，表 4 の原則を構築しており，これが Hegel 哲学の弁証法の構図を形づくっている。

本稿では，これら哲学的な枠組みを参考にしながら，変容過程のモデル構築(図 4)を試みた。

図 4 の弁証法的過程を通して，数学観の変容過程を捉えていく。

変容過程では，主体はある数学観 V を既に形成していることを前提条件とする。このとき，数学観 V により写像された数学観の現れV(m)が現れる。この現れと異なる数学観の現れ$\bar{V}$(m)とが接触したときに数学観の変容が起こると考えている。異なる数学観$\bar{V}$(m)との接触が起こると，既有の数学観 V との矛盾を自覚し，定立の状態(肯定的な判断を立てること)が困難となり，数学観 V に対して別のもの，情報を結び合わせて，1 つの全体的統一を構成する必要が生まれる。この過程を経て，新たな数学観 V'が定立する。この一連の過程を変容過程と考える。そして，この変容過程では，同様の過程を繰り返し起こしていくという性質をもつ。

このとき，自身の数学観に依存していない異なる数学観の現れ$\bar{V}$(m)は，前節の数学的作用によって想起，認識されるといえるのではないかと考える。また，この異なる数学観の現れ$\bar{V}$(m)との接触による変容には，これら 2 項間のみに依拠するものではなく，何等かの要因，解釈の枠組みなどが存在し，それらによって同様の異なる数学観の現れ$\bar{V}$(m)に接触したとしても，V の定立状態の矛盾さに質的な違いが生まれ，数学観の変容の質も変化すると考える。この質的な違いが，先述した全面的変容過程(Change process)と部分修正的変容過程(Modification process)の違いに相当する。

このモデルには，次の 2 つの課題がある。1 つは，この弁証法的過程が起こり得る場合とそうではない場合の相違が不明確であることである。また，この$\bar{V}$(m)の質的な違いという点が不明確であることである。今後，この 2 点について考察が求められる。

(3) モデルの適用例とその考察

本稿では，教員養成課程に所属し数学教師を志望する学生 10 名から抽出した算数・数学教育における学習活動に関する記憶に残っているエピソードについて，写像仮説のモデル（図 2），PNC における弁証法的過程の変容過程モデル（図 4）の枠組みを適用し，エピソードを通して被験者の数学観を捉えることを試みた。

抽出されたエピソードの中から次のものについての考察を記す。次のエピソードは，2017 年 10 月 13 日に，国立 A 大学において教員養成課程 4 年生(男性)から抽出されたものである。

抽出された場面は，小学校5年生の算数科の授業で，円周率の導入と思われる学習である。学級を各4人程度のグループに分けて，コンパスを用いて円を描き，それを切り取って，その円周の長さを定規で測定した活動であったと，被験者は述べている。その実測した円周の長さと描いた円の直径の比を計算して，円周率を求めるという活動の中で，数学観の表出と捉えられる場面が見られた。当時の被験者は，「算数(数学)は，きれいな数が答えになるもの，きれいな数で表されるもの」と捉えていたという。ここでの「きれいな数」とは，有理数のことであると考えられる。そこで，その学習活動当時，被験者は円周を実測したことから得られた円周率が，小数点以下に続くことは実測時の誤差の影響であるとみなし，円周率の値を“3”と結論づけたという。

このエピソード当時の被験者の数学観を捉えるために，写像仮説モデルをエピソードの内容に適用させると，次の表5のようになる。

表5. 写像仮説とエピソードの対応

m：実測した直径に対する実測した円周の比.
V：算数の答えは，きれいな数(有理数)で表される.
V(m)：小数点以下の数値を測定の誤差とみなし，円周率の値は3であると導出.

ここでの被験者のエピソードでは，数学観Vが初めから意識的になっているように伺えるが，エピソード当時は無意識的なものであり，後述する変容過程で自覚的になってきたと被験者は述べている。つまり，被験者自身は実測した直径と円周の比から，その値“3”を導出したことの根拠は，無自覚であったのである。それが，この写像仮説のモデルにエピソードを適用させていくことによって，被験者の学習活動当時の数学観Vが明らかとなってきた。

この明らかとなった被験者の当時の数学観は，次のような解釈ができる。表1の適切性規準における③数学の知識に観点を置くと，被験者の数学観V「算数は，きれいな数(有理数)で表される」は，数学の知識の本性に関する記述であると考えられる。この被験者は，数学の知識は「きれいな数(有理数)で表される」という本性をもっていると考えており，自らが学習活動を通して導出した円周率の値の正当性の根拠を「きれいな数(有理数)」であるかとうかということにしている。また，正当化の根拠にしているということから，「きれいな数(有理数)」で表現される数学的知識は，自身の思考や活動とは独立して，予め定まっているものであるという見方をしていることが伺える。このことから，先述の外在的数学観の立場の数学観を有しているのではないかという解釈ができる。

以上のように写像仮説のモデルは，個人の数学観の表出から，その個人の数学観が如何なるものであるのかということを捉えることができ得るという可能性を有しているといえる。

また，このエピソードには続きがある。被験者が円周率を“3”と結論づけた後に，他のグループと活動から得られた結果を共有する時間が設けられたという。その際，多くのグループは求めた円周率を“3.2”や“3.14”，“3.142”などと小数点以下まで求めた値を発表していたと述べている。そして，授業の終末では，教師がこれらグループの結果を基に「円周率は3.1415…と続く」とまとめており，被験者もそれに従って，当時は，算数の中には円周率という特殊な数で表されるものもあると結論づけていたと述べていた。この活動の過程から数学観の変容過程が読み取れる。被験者のエピソードをクラウド仮説における弁証法的過程の変容過程モデルを適用させると，次の表6のように被験者の数学観の変容を捉えることができる。

表6. エピソードの弁証法的過程への適用

V：算数の答えは，きれいな数(有理数)で表される.
V(m)：測定誤差を考え，円周率は“3”である.
$\overline{\mathrm{V}}$(m)：円周率が小数点以下に続くことは，誤差ではなく，円周率は3.1415…である.
V'：算数は，きれいな数で表されることが多いが，特別な数(無理数)で表されるものも存在する.

ここでの数学観の現れ$\overline{\mathrm{V}}$(m)は，被験者に対して起こった数学的作用により，被験者の思考に現れると考えるものである。このエピソードにおける数学的作用の数学的対象mは，「円周率は3.1415…である」となる。この数学的対象(円周率は3.1415…である)によって，$\overline{\mathrm{V}}$(m)が被験者に想起される。ここで，この現れ$\overline{\mathrm{V}}$(m)と自身の数学観の現れV(m)との非整合性が現れ，その整合性をとるために，被験者の思考の中で弁証法的過程(図4)が行われる。この被験者の場合は，その弁証法的過程の結論として，新たな数学観V'「算数は，きれいな数で表されることが多いが，特別な数(無理数)で表されるものも存在する」となったことが分かる。また，この新たな数学観V'は，表1の適切性規準の③数学の知識に観点を置くと，円周率が小数点以下に続く数であっ

ても正当化されるものであるというのは，算数の特別な場合である。そして，算数の答えとなるものは，基本的に「きれいな数(有理数)」であることが，その正当性を保証するのであるという本性を数学の知識はもっている。という外在的数学観の立場に立った見方がなされていると解釈することができる。このことから，エピソード当時の被験者の数学観の変容は，部分修正的変容であったと捉えることができる。

表 5，表 6 のように，個人がどのような数学観の立場に立脚し，学習活動等を経てどのように数学観が変容したのかを捉えることに，写像仮説モデル，弁証法的過程モデルは，1 つの貢献をするのではないかと考える。これらのモデルは実証的な検証が十分ではない。その運用には今後も検討が必要であるが，先述のように数学観を捉えることができれば，日々の教材研究，授業づくりにも貢献するものと考える。

６．おわりに

本稿では, 数学観に関する先行研究の考察を通して，数学観がもつ特徴を整理し，数学観の二極対立的な構造，数学観と授業型との関係，数学観の表出過程，形成過程，変容過程という特徴を明らかにしていくことができた。そして，明らかとなった数学観の特徴である表出過程，形成過程，変容過程に着目して，数学観を捉えるために，それぞれの過程についてのモデルの構築を試みた。表出過程は写像仮説，形成過程と変容過程はクラウド仮説と 2 つの仮説を設定し，数学観を捉えるためのモデルの構築を試みた。さらに，変容過程についてはその変容の仕方について弁証法的過程というモデルを構築した。そして，実際にあった算数科の学習活動に写像仮説モデル，弁証法的過程の変容過程モデルを適用させ，無自覚であり，捉えることが難しい数学観を，これらモデルを用いることによって比較的容易に捉えていくことができ得るという可能性を見出すことができたことが，本稿の成果である。

しかし，本稿が表した数学観の特徴やその捉え方の仮説については，哲学的にも実証的にも検討の余地が多く残されている。例えば，数学観が如何なるものであるかという哲学的な分析や，本稿で提示したモデルの解釈についての実証的な検証があげられる。これらの点が本稿の今後の課題となる。

主な参考・引用文献

1）湊三郎・濱田眞(1994).「プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか：数学観と数学カリキュラム論との接点の存在」,『日本数学教育学会誌』, 76(3), pp.58-64.
2）湊三郎(2016).「数学観の転換を要求するアクティブ・ラーニング」,『日本数学教育学会誌』, 98(11), pp.1.
3）橋本善貴・渡邊光(2017).「学校数学における関数とみなすことに関する一考察」.『日本数学教育学会誌 第 50 回秋期研究大会発表集録』, pp.305-308.
4) 湊三郎(2017a).「近似の数学観の動向に応える数学教師の資質と責務」,『日本数学教育学会誌』, 99(１),pp.10-17.
5) 湊三郎(2017b).「数学の哲学と数学的文化化論に基づき算数観念を同定する試み」,『日本数学教育学会誌数学教育学論究』, 99(109).
6）湊三郎(1996).「算数・数学における授業三型論」,『日本数学教育学会 第 29 回数学教育論文発表会論文集』, pp.699-700.
7）湊三郎(2002).「授業三型論に基づく教師の数学的資質」.『上越数学教育研究』, 17, pp.1-20.
8）髙橋等(2010).「アリストテレス的数学観に立つ数学教育学研究の幾つかの方向性」,『上越数学教育研究』, 25, pp.11-18.
9) アーネスト,P. (1991)・長崎栄三，重松敬一，瀬沼花子(監訳).『数学教育の哲学(原題：The philosophy of mathematics education)』. 東洋館出版社.
10）ガスティ，E.（1999）・斎藤憲(訳).『数はどこから来たのか：数学の対象の本性に関する仮説』, 共立出版.
11) 伊達文治(2010).「学生にみる文化的数学観への変容」,『上越数学教育研究』, 25, pp.19-26.
12）奥雅博(1975).『ウィトゲンシュタイン全集 1 論理哲学論考他』. 大修館書店.
13）佐々木正人(1994).『新版 アフォーダンス』, 岩波書店.
14）佐々木正人・三嶋博之・松野孝一郎(1997).『アフォーダンス』, 青土社.
15）P.クンツマン・F.-P.ブルカート・F.ヴィートマン (2002) 忽那敬三(訳).『カラー図解 哲学辞典(原題：dtv-Atlas Philosophie)』, 共立出版.

A Study on the View of Mathematics pertaining to Mathematics Education : An Attempt to Construct Models of Expression Process, Formative Process, and Change / Modification Process of View of Mathematics

TAKEDA, Takumi

Key Words : View of Mathematics, Model, Process.

Abstract

The purpose this study is, to organize the characteristics of view of mathematics pertaining to mathematics education, and to construct explicit models to grasp individual view of mathematics.

For that purpose, I consider the characteristics of view of mathematics mainly from prior studies on view of mathematics in mathematics education research. From the results, I focused on features such as expression process, formative process and change / modification process of view of mathematics. Based on philosophy and information engineering, I attempt to construct models on the expression process, formative process, and change / modification process of view of mathematics.I apply an episode on actual mathematics education to these models and examine the possibility that models in this study to grasp individual view of mathematics.