関数史と我が国の中学校数学教科書における関数の定義の変遷
－学校数学での関数の定義の扱い方への提案－

（2018 年 2 月 25 日　受理）

上越教育大学　　　　　　　　髙橋　等

キーワード：関数史，関数の定義，中学校数学教科書

要約

この研究の目的は，数学史的観点から関数という知識の実際を明らかとし，その実際が我が国中学校数学教科書に掲載されてきた関数の定義の変遷に及ぼした影響を議論し，教科書での関数の定義の扱いに係る視座を提出することであった。研究目的を達成するために，学術的な知識としての関数の歴史を定義の変遷という観点から概観し，更に学術的な関数の定義の変遷からの我が国の中学校数学教科書に掲載されてきた関数の定義への影響を考察し，最後に教科書での関数の定義の望ましい扱い方について論じた。研究の結果，学術的な知識としての関数の歴史からは関数の知識が完全なものとして現れたことは一度もなく，完成された関数の定義が出現したこともないことから，関数史という点からもプラトン的数学観が否定されること，我が国の中学校数学教科書では関数の解析学的定義と集合論的定義とが二重に掲載された時期があること，教科書での定義の望ましい扱い方として，学術的な知識を反映した定義の掲載を常識化するのではなく，寧ろ現実的な問題の導入場面のみの記述をした教科書があってよいことが明らかとなった。

1．はじめに

数学教育改良運動において，実用主義的数学がそれまでの純粋主義的数学(Ernest, 2015)に替わる学校数学の内容として普及した。当時の，実用主義的数学の主たる内容は関数であり，改良運動の主唱者であるペリー，クライン等が関数グラフの扱いなどを奨励したことは，ペリーの実用数学を重んじた経歴やクラインの数学者としての研究内容を鑑みれば当然のことであった。実用主義的数学の教材化は，原論を読むことによって人間から離れた数学に接するそれまでのプラトン的数学観に基づくエリート主義の学校数学(Ernest, 2015)に対する強力な挑戦であったろう。

他方で，関数の数学的定義は現代においても未だ不確定であり，それ故に我が国の教科書に記載されている関数の定義にも変遷がある。この変遷の一つには，数学の内容の完全なる体系化を目指した New Math 期の動向―その動向はブルバキの作業に代表される―からの影響がある。

勿論，学校で扱う数学の内容が数学者や数学と他科学との境界領域に係る研究者が探究する数学的知識の影響ばかりを受けている訳ではない。学校で扱う数学は数学教育学において議論されなければならず，時々の社会状況，教育学や心理学などの近接領域の研究成果などとも密接に関連する。とは言え，学校数学が文化としての数学の発展を無視していいというものでもない。数学の発展に応じて学校数学の内容を検討し続けるのも数学教育学の役割であろう。

この研究の目的は，数学史的観点から関数という知識の実際を明らかとし，その実際が我が国中学校数学教科書に掲載されてきた関数の定義の変遷に及ぼした影響を議論し，教科書での関数の定義の扱いに係る視座を提出することである。

以下の手順により研究を展開する。第一に，関数史を関数の定義に着目して概観する。第二に，我が国の戦後中学校数学教科書に掲載されている関数の定義を，関数の定義の歴史と対比して論ずる。最後に，第一，第二の議論をもとに教科書での関数の定義の望ましい扱い方について論ずる。

この研究で最終的に教科書での関数の定義の扱いを論ずる理由は，我が国においては，教科書が数学的知識のどの様な水準(Bishop, 1988)を扱うかを教育制度的に反映するからであり，教科書を使うか使わないかという教師の選択権を超えて教科書検定制のもと，その使用について法的威力をもつからである。それは我が国の教育文化の特長ともなっている。勿論，Bishop (1988)が指摘するように教科書の使用が非人間的学習乃至非人間的教授を引き起こし得ることを考慮すれば，算数数学授業は教科書に依存しない教師の力量の豊かさ―それは人間的にでもあり数学的にでもある―によってなされるべきである。何れにしても我が国にお

ける教科書使用については教育制度に係る議論を避けられず，また現行の授業では普及した教科書からの影響を免れ得ない。そうした中では，数学教育の改革という点ではやや消極的ながらも，関数の定義の教科書での扱いに対して議論をすることが第一歩となる。

２．関数の定義の史的発展

(1)　ベルヌイによる関数の定義

関数の知識の発展は 4000 年を遡るものの, 数学という学術的知識としてヨーロッパに起源をおくものはこの 300 年で発展した(Kleiner, 1989)。ヨーロッパにおける関数の知識には二つのイメージ―所謂捉え方―の間の綱引きがあり，一方は幾何的イメージで，他方は代数的イメージである(Kleiner, 1989)。この二者のイメージ，捉え方に対し，現代になって第三の視点である対応が加わることになる。

幾何的なイメージにおいて関数の知識を考察した代表は, ニュートンとライプニッツとである。しかし, 彼らの扱った微分積分学は現代的な定義による関数ではない。ニュートンとライプニッツとが活躍した 17 世紀の微分積分学の研究対象は，曲線の接線，曲線の下の面積，曲線の長さなどであった。関数に相当する functiones という語を最初に使用したのはライプニッツであるけれども，それは”接線は曲線の関数である”(Iacobacci, 1965, 大矢&片野, 1978)という用い方であった。ニュートンの微分学である，所謂，流率の方法は，時間に関する変数を扱ったものであり，これも曲線に沿って移動する点をイメージとした(Kleiner, 1989)。

学術的数学を扱うヨーロッパの共同体で最初に関数を定義したのはベルヌイである。Bottazzini(1986)によると，ベルヌイは，1718 年にパリのアカデミーの研究報告書に掲載された，等周問題の研究論文において次のように関数を定義した：

I call a function of a variable magnitude a quantity composed any manner whatsoever from this variable magnitude and from constants. (p.9)

この定義はボタチニによるベルヌイの全集からの引用であるけれども，好田順治による邦訳(Bottazzini,　好田訳，1990)がある：

私は，この変量と定数からどんな方法であろうと，組み立てられた量を変量の関数と呼ぶ。 (p.10)

”どんな方法であろうと，組み立てられた量”の意味することをベルヌイは説明しなかった(Kleiner, 1989)けれども，この定義から出発し，学術的数学を扱う共同体で関数の定義が，更に幾つか登場することになる。

(2)　オイラーによる関数の定義

17 世紀に関数が幾何的イメージにおいて議論された一方で，18 世紀には関数の代数的側面が扱われる。Bottazzini(1986)によるとオイラーは関数を次のように定義する：

A function of a variable quantity is an analytic expression composed in any way from this variable quantity and from numbers or constant quantities.　(p. 9)

この定義もボタチニによるオイラーの全集からの引用であるけれども，好田順治による邦訳(Bottazzini, 好田訳，1990)がある：

変量の関数は，この変量といくつかの定数量からある方法で合成された解析的表現である。(p. 10)

ベルヌイが明示しなかった解析的表現という語をオイラーが定義に用いることによって，代数的に表現された数学的言語記号によって関数が明示化されるのである。

ところで，Kleiner(1989)はベルヌイが”組み立てられた量”が何ものかを示さなかったことにより, ベルヌイの関数の定義とオイラーの解析的表現としての関数の定義とを明確に区別しているものの, 他方で Bottazzini (1986)はこれら二つの定義を同等のものと見做している。オイラーが著書，無限解析入門において，解析的表現という語を用いて関数を定義したことは，しかしながらベルヌイの定義とは同等のものとは見做されないだろう。当時，暗黙的に関数が解析的表現だという了解のもとで学術的数学が議論されていたとしても, 関数を解析的表現としたオイラーの定義は画期的なものである。とは言っても，オイラーのこの定義は関数の定義の発展の中で踏み越えられていくことになる。

(3)　振動弦論争とオイラーによる更なる関数の定義

振動弦論争とは振動弦問題に対するダランベールとオイラーとを中心とし，それに数名の数学者が加わった関数の意味に係る論争である。振動弦問題とは，”(0 と a とする)固定点をもつ弾性の弦が初期の形状に変

形され振動するように放されるとき，時間 t での弦の形状を記述する関数を決定すること”(Kleiner, 1989, p.285)である。

ダランベールは連続関数を仮定し，18 世紀の信仰箇条である”もし二つの解析学的な式が或る区間で一致するならば，それらはどこでも一致する”(Kleiner, 1989, p.285)に則り，一意的な解析的表現，即ち，解析式によって関数が表されるときに解が正当であると見做した(Bottazzini, 1986)。他方，オイラーは初期の形状として不連続曲線である任意の多角形を考えていた(Bottazzini, 1986)。オイラーの識見は 18 世紀の信仰箇条を砕くものであるし，実際，y＝(π－x)/2 と y=$\sum_{n-1}^{\infty}(\sin nx)/n$とは，信仰箇条に対する反例である。ただし，オイラーが当時の信仰箇条に全くに反意をもっていたかどうかは疑わしく(Kleiner, 1989)，この信仰箇条は強力であった。

Bottazzini(1986)によると，この論争を経て，オイラーは次の関数の定義を提示する：

If some quantities so depend on other quantities that if the latter are changed the former undergo change, then the former quantities are called functions of the latter. This denomination is of the broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others. If, therefore, *x* denotes a variable quantity, then all quantities which depend upon *x* in any way ore are determined by it are called functions of it. (p.33)

このオイラーによる関数の定義もボタチニによるオイラーの全集からの訳出であるけれども，好田順治による邦訳(Bottazzini, 好田訳，1990)がある：

もしある量が他の量に，もし後者が変化するなら前者も変化するというように依存しているなら，前者は後者の関数と呼ばれる。この名称は最も広い種類のものであり，それによって一つの量が他のものによって決まることのできるあらゆる方法を含んでいる。それで，もし *x* が変量を示しているなら，どんな仕方でも *x* に依存しているすべての量やそれによって決められるすべての量は，その関数と呼ばれる。(p. 38)

オイラーによるこの定義は，解析的表現，即ち解析式を関数とする定義から大きく離れたものであるけれども，しかし，未だ数学界は関数を解析的表現とする見解を超えてはいかない。

(4)　フーリエ級数とコーシーによる関数の定義，更にディリクレによる関数の定義

フーリエが 1807 年にパリ科学アカデミーに提出し，1822 年に出版された論文の主要な結果は，”(*l*, −*l*)で定義される総ての関数 *f*(*x*)は，正弦および余弦の級数によってこの区間で記号形式で表現可能である”というものであった(Kleiner, 1989)。熱伝導に係るフーリエのこの定理は現在では一般性をもたないことが知られている。しかしながら，フーリエの主張の精査をする過程で，コーシーによる関数の定義とディリクレによる関数の定義とが登場する。特に，ディリクレの定義は，飛躍的に進化したものであった。

Bottazzini(1986)によるとコーシーによる関数の定義は次である：

When the variable quantities are linked together in such a way that, when the value of one of them is given, we can infer the values of all the others, we ordinarily conceive that these various quantities are expressed by means of one of them which then takes the name of *independent variable*; and the remaining quantities, expressed by means of the independent variable, are those which one calls the *functions* of this variable.　(p. 104)

この定義はコーシーの全集からのボタチニによる引用であり，好田順治による邦訳(Bottazzini, 好田訳，1990)がある：

変量らが，それらの一つの値が与えられたとき，他のすべての値が推論できるように一緒に結び付いているとき，普通これらの種々の量は，独立変数と呼ばれるそれらの一つのものによって表されると考えるし，独立変数で表される残りの量は，この変数の関数と呼ばれるものである 。(p. 117)

コーシーによるこの定義には振動弦論争においてオイラーが提出した定義からの発展は殆どない。

Ruthing(1984)によるとディリクレの定義は次である：

Let us suppose that *a* and *b* are two definite values and *x* is a variable quantity which is to assume, gradually, all values located between *a* and *b*. Now, if to each *x* there corresponds a unique, finite y in such a way that, as x continuously passes through the interval from a to b, $y=f(x)$ varies likewise gradually, then y is called a continuous…function of x for this interval. It is, moreover, not at all necessary, that y depends on x in this whole interval according to the same law; indeed, it is not necessary to think of only relations that can be expressed by mathematical operations. Geometrically represented, i.e. x and y imagined as abscissa and ordinate, a continuous function appears as a connected curve, for which only one point corresponds to each abscissa between a and b. (p.74)

ディリクレによるこの定義は，Ruthing(1984)によるディリクレの原書からの英訳である。この定義に相当する稲葉三男によるディリクレの定義としての記述(稲葉三男，1977)がある：

a，b は定まった二つの値とし，x は a と b との間の値をとる変数とする。x のおのおのの値に対して，y のちょうど一つの値が対応し，そのうえに，x が a と b との間を連続的に変化するにともなって，y も同じように連続的に変化するとき，y をこの範囲での x の連続関数という。この場合に，y はこの範囲で同一の規則で x に対して表される必要もなく，また x と y との関係が一つの定まった関係式で表されなくともよい。(pp. 7-8)

ディリクレの関数の定義は，対応という考えを持ち込んだ故に，コーシーの定義に至るそれまでの関数の定義を超え，集合論に基づく次の世代の関数の定義を誘発することになる。更に，この定義は関数を一意の解析的表現，即ち解析式という代数的表現から解放した画期的なものであった。

(5) 集合論に基づく関数の定義

19 世紀後半にカントールによって集合論が発明され，関数の定義も集合論に基づくこととなる。New Math と呼ばれるこの新たな数学の発展は学校教育に対し，我が国でも諸外国と同様に数学教育の現代化として影響があったことは周知である。

数学者集団ブルバキによる関数の定義が，当時は，完成された定義として流通した。Bottazzini(1986)によるとブルバキの定義は次である：

Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if, for all $x \in E$ the element $y \in F$ which is in the given relation with x.

We give the name of function to the operation which in this way associates with every element $x \in E$ the element $y \in F$ which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function. (p. 7)

この定義はボタチニによるブルバキの原書からの引用であるけれども，邦訳を付す：

互いに異なる或いは異ならない E と F との 2 つの集合があるとする。もし，任意の $x \in E$ に対し，与えられた x との関係において唯一つの $y \in F$ が存在するならば，E の可変要素 x と F の可変要素 y との間の関係は関数関係と呼ばれる。

我々が，与えられた x との関係において何れの要素 $x \in E$ と $y \in F$ とを関連させる規則に対して関数なる名称を与え，y は要素 x の関数値であると呼ばれる，更に関数は与えられた関数関係によって決定される。2 つの同値な関数関係は同一の関数を決定する。(筆者訳)

ブルバキの定義によって関数の定義の発展が完遂したかのように見えたものの，この定義に依っては説明し切れない数学的知識が扱われ始めた。それらの数学的知識については次節に記す。

３．ブルバキによる関数の定義を超える数学的知識

Kleiner (1989)は関数に係る最近の三つの論点を簡潔に提示している。それらは L_2 関数，一般化関数（超関数），及び圏論である。Kleiner (1989)は三番目に扱った圏論に関連させてブルバキによる関数の定義を取り上げているけれども，L_2 関数，一般化関数（超関数），及び圏論で論じられている内容はブルバキの定義では閉じ込められない。ここでは，L_2 関数を取り上げ論ずることとする。

L_2 関数とは，集合 L_2＝｛$f(x)$: $f^2(x)$ はルベーグ積分可能｝がヒルベルト空間を形成するというものである。L_2 関数を現代数学の関数の定義では説明し得ないことを，Kleiner (1989)はデービス&ハーシュの引用によっ

て取り上げているけれども，Davis, Hersh& Marchisotto(1995)からその引用の前後の文章も併せて提示する：

It is interesting to observe that this modern development really involves a further evolution of the concept of function. For an element in L_2 is not a function, either in Euler's sense of an analytic expression or in Dirichlet's sense of a rule or mapping associating one set of numbers with another.

It is function-like in the sense that it can be subjected to certain operations normally applied to functions (adding, multiplying, integrating). But since it is regarded as unchanged if its values are altered on an arbitrary set of measure zero, it is certainly not just a rule assigning values at each point in its domain. (p. 293)

上の引用は，*The mathematical experience* のリプリントからのものであり，初版に対する柴垣和三雄，清水邦夫&田中裕による邦訳(Davis & Hersh, 柴垣，清水&田中訳，1986)がある：

興味深いことは，この現代的展開が関数概念の新たな進展を含むことを注意することである。なんとなれば L_2 の元は，解析的式のオイラーの意味においても，また１つの数集合に他の集合をあてがうディリクレの意味の規則性または写像の意味においても，関数ではないからである。

それはそれが(加える，掛ける，積分する)など関数に正常的に適用される演算に服従させうるという意味では，関数ー的である。しかし，任意の測度ゼロの集合上で値が変えられたとき不変であると考えられるから，それはそれの定義域の各点に値をあてがうという規則では確かに関数的でない。(p. 257)

L_2関数は,ディリクレによる関数の定義に依らないし，要素を対応させるという写像としての定義，即ちブルバキによる関数の定義にも依らないのである。

４．我が国の中学校数学教科書における関数の定義の変遷

ここまでは関数の定義が，関数史においても，現代数学においても決して完璧なものではないことを取り上げてきたけれども，そうした数学の動きの影響を我が国の中学校数学教科書はどの様に受けているのだろうか。昭和 33(1958)年告示，昭和 43(1968)年告示，昭和 53(1978) 年告示, 平成元(1989)年告示, 平成 10(1999)年告示，及び平成 20(2008)年告示の中学校学習指導要領の各々に応ずる中学校数学教科書に掲載されている関数の定義を取り上げて論ずることとする。

中西(2000)は数学史については議論していないものの，中学校数学教科書に掲載されている関数の定義を明治 20(1887)年から平成９(1997)年までについて中学校教授要目と中学校学習指導要領との改訂毎に分析している。この４節では，戦前の中学校数学教科書は扱わず，また中西(2000)では取り上げていない平成10(1999)年以降告示の中学校学習指導要領のもとでの教科書に掲載されている関数の定義についてもまた論ずる。

尚，ここで取り上げる教科書は一社のもののみである。我が国の教科書検定制のもとでの教科書の内容の類似性を考慮すれば，出版社によって関数の定義の記述に係る多少の違いがあるとしても，この論文の議論に影響を及ぼす差異ではなく，一社のものを取り上げることで十分である。

次は，昭和 43 (1968) 年発行の，昭和 33(1958)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，正田他(1968)による中学校第二学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

一般に，２つの変数 x と y とがともなって変わるとき，x と y との間には，関数関係があるといい，その関係を y の値が x の値によってきまるとみたとき，y は x の関数であるという。(p. 98)

昭和 43 (1968)年発行の中学校第二学年の数学教科書に掲載されている関数の定義は従属変数を指して関数としている点ではディリクレの関数の定義を反映している。他方で関数関係という語を用いている点で，ブルバキの関数の定義の影響も見られ，数学教育の現代化の影響を僅かながら受けている。尚, 昭和43年(1968)年発行の第一学年の中学校数学教科書には関数の定義らしいものは見当たらない。

次は，昭和 46(1971) 年発行の，昭和 43(1968)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，正田他(1971)による中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

ガスバーナーのかけたビーカーの水の温度は，時間にともなって変わり，時間をきめると，その時の水の

温度がきまってくる。

このようなとき,「時間と水の温度の間には，関数関係がある」あるいは,「水の温度は時間の関数である」という。(p. 106)

A の要素をきめると，それに対応して B の要素が１つきまるとき，この対応を，集合 A から集合 B への関数というのである。(p. 109)

昭和 46 (1971) 年発行の中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義は，ディリクレの関数の定義に基づくものとブルバキの関数の定義に基づくものとの二重性を有する。ディリクレの定義を解析学的定義, ブルバキの定義を集合論的定義と呼ぶとしよう。解析学的定義が従属変数を指し関数とするのに対し，集合論的定義では集合間の要素の対応を関数とする。この教科書では，解析学的定義を現実事象に関連させ記述し，集合論的定義を現実から離し学術的数学に近い様式で記述しているものの，この両者を同じ教科書で 106 ページと 109 ページという接近した箇所に掲載しているのである。

昭和 43(1968)年告示の中学校学習指導要領の数学の内容は数学教育の現代化の影響を強く受けたものであった。従って，関数を対応とする集合論的定義を中学校数学教科書でも採用することになったのであろう。他方で，解析学的定義をも教科書に掲載したのは，我が国の数学教育界が極端な改変を求めなかったためともとれる。何れにしても，解析学定義と集合論的定義をほぼ同時に教科書で提示するという，立場によっては奇妙な状態になっている。

次は，昭和 55 (1980) 年発行の，昭和 53(1978)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，橋本他(1980)による中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

例２では，切り口の面積は深さの変化にともなって変わり，深さをきめると，切り口の面積がきまってくる。このようなとき，

といの深さと，切り口の面積との間には，関数関係がある.

切り口の面積は，といの深さの関数である.

などという。(p. 95)

一般に，２つの変数 x，y があって，x の値をきめると，それに対応して，y の値が１つきまるとき，y は x の関数である　という。(p.98)

昭和 55(1980) 年発行の中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義は，ディリクレの関数の定義に基づく，解析学的定義である。95 ページの現実性のある場面での関数の定義には，関数関係という語を用い，ブルバキによる集合論的定義の影響も見られるものの，98 ページの定義は解析学的定義のエッセンスに基づく学術的数学の記述になっている。

橋本他(1980)による昭和 55 (1980)年発行の中学校第三学年の数学教科書では，集合と関数という項目が設けられ，次のように関数が再定義されている：

２つの変数 x，y があって，

x の値をきめると，それに対応して y の値が１つきまるとき，y は x の関数であるということは，すでに知っている。(p.74)

数の集合 A，B があって，集合 A の要素をきめると，それに対応して集合 B の要素が１つきまるとき，この対応が関数である。(p.75)

中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義が解析学的定義である一方で，中学校第三学年の教科書では集合論的定義によって関数が再定義されている。中西(2000)が指摘するように，中学校数学教科書に係る関数の定義の二重性を，集合と関数との関連を扱う昭和 53(1978) 年告示の中学校学習指導要領のもとでの教科書に見ることができる。

勿論，中学校第一学年では関数の解析学的定義を採用し，第三学年で集合論定義によって再定義することは，正田他(1971)による中学校第一学年の数学教科書による解析学的定義と集合論的定義との併記よりは，数学史的に整理された記載とはなっている。しかしながら，関数の定義が数学的な進歩とともに集合論的定義に帰されるというのであれば，果たして当時，解析学的定義を扱う必要があったのかどうかという論点が浮かんでくる。結局，数学教育の現代化は徹底されずに，大凡はその失敗という風評のもと，中学校数学教科書で扱う関数は解析学的定義となっていく。

次は，平成４ (1992) 年発行の，平成元(1989)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，福森他(1992)による中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

前ページの例では，長方形の面積は横の長さにともなって変わり，横の長さをきめると面積がきまってくる。

このようなとき，

長方形の面積は，その横の長さの関数である．

という。(p.98)

一般に，２つの変数 x，y があって，x の値を変えると y の値が変わり, x の値をきめるとそれに対応して，y の値が１つきまるとき, y は x の関数である　という。(p.102)

平成４ (1992) 年発行の中学校第一学年の数学教科書に掲載されている関数の定義は，昭和 55 (1980) 年発行のものと殆ど変わらず，ディリクレの関数の定義に基づく解析学的定義である。なお，関数関係という語は使用されていない。

次は，平成 13 (2001) 年発行の，平成 10(1999)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，福森他(2001)による中学校第二学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

前ページの問で，底から水面までの高さは，水を入れはじめてからの時間にともなって変わり，時間を決めると水面までの高さが決まる。このようなとき，

水面の高さは，時間の　関数　である

という。

一般に, ともなって変わる２つの変数 x, y があって,

x の値を決めると，それに対応して y の値が１つに決まるとき，y は x の関数である　という。(p.50)

平成 13 (2001) 年発行の中学校数学教科書の関数の定義は，昭和 43(1968)年告示の中学校学習指導要領のもとでの教科書以降第一学年のものに記載されていたものが, 第二学年の教科書への記載に変更されている。平成 13 (2001) 年発行のこの第二学年の教科書の関数の定義はディリクレの関数の定義，所謂，解析学的定義に基づく。

次は，平成 23 (2011) 年発行の，平成 20(2008)年告示の中学校学習指導要領のもとでの，岡本他(2011)による中学校第１学年の数学教科書に掲載されている関数の定義である：

この x, y のように，いろいろな値をとる文字を　変数　といいます。

また，ともなって変わる２つの変数 x，y があって，

x の値を決めると，それに対応して y の値が

ただ１つに決まる

とき，y は x の関数である　といいます。(p.98)

平成 23 (2011) 年発行の中学校数学教科書の関数の定義は，第一学年の教科書に記載されており，この定義もディリクレの関数の定義，所謂，解析学的定義に基づく。

５．考察

２節では関数の定義の歴史を，３節では現在の関数の定義に係る問題点を述べてきた。更に，４節では学術的な関数の定義の変遷から少なからず影響を及ぼされている我が国の中学校数学教科書に掲載されている関数の定義を取り上げてきた。この５節では, 第一に，関数の定義の変遷を材料として，数学の本性を論ずることにより，学校教育でもつべき数学観を考察する。第二に，第４節の教科書に掲載されてきた関数の定義の変遷を踏まえ，教科書を取り上げ授業での関数の定義の望ましい扱い方を議論する。

(1)　関数史から見えてくる数学観とは何か

２節で論じたのは関数の定義の変遷であり，３節で論じたのは一応の終着点として見做されている場合もあるブルバキによる関数の定義では L_2 関数を捉えきれないというものであった。２節，３節で述べたことから得られる結論は，関数の定義は完全ではないことである。このことから，次の論点が派生する。即ち，関数の定義は未完成だとしても完全な関数の知識は存在しているのではないか，或いは完全な関数の知識の存在などなく，関数は構成された知識であり，それ故に完成された関数の定義も創り得ないのではないかという論点である。

数学的体系がプラトン主義者が望むような完全性をもたないことは，ゲーデルによって数学的に証明されていることは周知である。そうだとしてもプラトン主義者は完全なる数学の存在を主張し，ゲーデルの仕事を超えようとするかも知れない。ところが，関数に着目した場合，関数の定義すら完成されていないことは数学の完全な存在—関数が数学的知識の一部だとすれば関数について論ずることで十分だろう—に対し，疑義を投げかける。

関数の定義が完成されたものでないとしても，完全

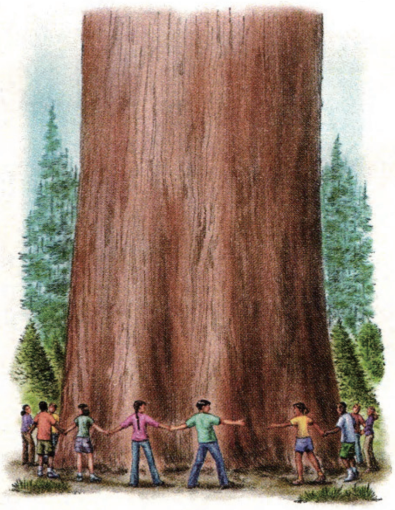
A Trendy Graphs

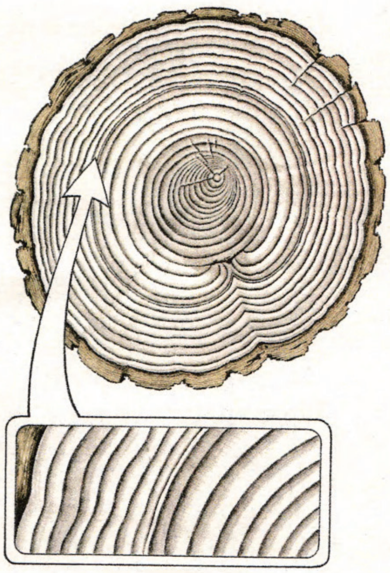
Wooden Graphs

Giant sequoia trees grow in Sequoia National Park in California. The largest tree in the park is thought to be between 3,000 and 4,000 years old.

It takes 16 children holding hands to reach around the giant sequoia shown here.

1. Find a way to estimate the circumference and diameter of this tree.





This is a drawing of a cross section of a tree. Notice its distinct ring pattern. The bark is the dark part on the outside. During each year of growth, a new layer of cells is added to the older wood. Each layer forms a ring. The distance between the dark rings shows how much the tree grew that year.

2. Look at the cross section of the tree. Estimate the age of this tree. How did you find your answer?

Take a closer look at the cross section. The picture below the cross section shows a magnified portion.

3. a. Looking at the magnified portion, how can you tell that this tree did not grow the same amount each year?

   b. **Reflect** What are some possible reasons for the tree's uneven growth?

Section A: Trendy Graphs 1

図 1　MiC(2007)による成長曲線の導入場面

A Trendy Graphs

Growth Charts

Healthcare workers use growth charts to help monitor the growth of children up to age three.

13. Why is it important to monitor a child's growth?

The growth chart below shows the weight records, in kilograms (kg), of a 28-month-old boy.

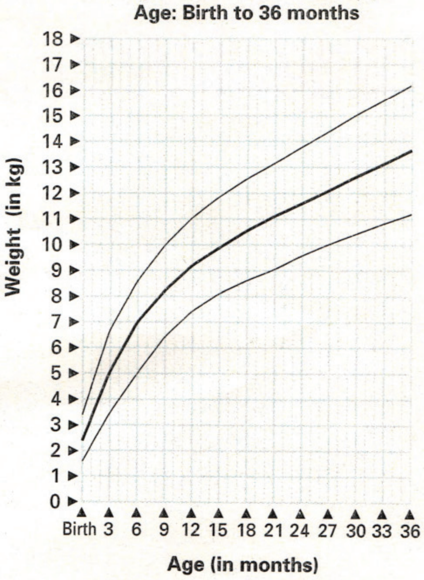
Month	Birth	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Weight	2.7	3.6	5.7	7.0	7.3	7.8	8.0	8.8	8.8	8.8	9.3	9.6	10.5	10.3	11.3	12.0
Month	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28			
Weight	12.4	12.9	13.1	12.9	10.5	9.2	9.5	12.0	13.0	13.6	13.5	14.0	14.2			

14. What conclusion can you draw from this table? Do you think this boy gained weight in a "normal" way?

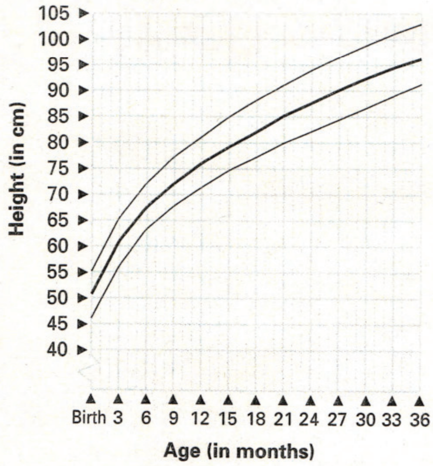
The graphs that follow show normal ranges for the weights and heights of young children in one country. The normal growth range is indicated by curved lines.

Note: The zigzag line on the lower left of the height graph indicates that the lower part of the graph, from 0–40, is omitted.

Weight Growth Chart for Boys
Age: Birth to 36 months



Height Growth Chart for Boys
Age: Birth to 36 months



© Am. J. Nutr.
American Society for Clinical Nutrition

6 Ups and Downs

図２　MiC(2007)による成長曲線の展開場面

なる知識としての関数の存在を主張する場合があるかも知れない。即ち，関数の知識の完全なる存在はあり，ただ定義を始めそれを記述する手段が不完全だという主張である。しかしながら，誰が関数の知識の完全なる存在を知っているのだろうか。関数の知識の完全なる存在を主張する者の誰もその完全な存在を未だ提示していない。尤も，その完全な存在に対しての関数の定義の現在は，その存在を提示するまでの過程であるという主張があるかも知れない。そうだとしたら，未だ示されていないその存在は信仰の所産でしかない。プラトン主義とは，誰も見たことのない数学的存在に対する根拠のない信仰と見做されなければならない。尚，信仰の最小単位は個人である。

然るに，完全な関数の知識の存在などなく，関数は構成された知識であり，誤謬を含み，完成された関数の定義も創り得ない。勿論，関数史において関数の知識は洗練され，高度に代数的に抽象的になってきている。しかし，その関数史が連なり続く関数の定義の変遷を示し，ブルバキの定義によっても記述できない L_2 関数という関数の知識を示しているのである。

数学的知識を始め，知識が完全な存在となり得ないことは，Polanyi(1958，1966)による学術者による知識の成立への見解がよく示している。Polanyi(1958，1966)は如何に数学的知識であっても個人のもつ知識には暗黙性が含まれることを論じているけれども，学術的知識の存在は研究者達が鎖状に連なった共同体によって保たれ，発展するとする。この見解は社会的構成主義における客観的知識としての数学的知識の成立(Ernest，2015)を，別の側面から説明するものである。客観的知識としての数学的知識が個人による集合体によって成立しているのであれば，客観的知識自体に暗黙性が含まれることになる。

(2) 教科書における関数の定義の扱い方への提案

(1)では，プラトン主義に対して社会的構成主義的数学観の妥当性を主に関数史を題材として論じてきたけれども，学校での授業においてプラトン的数学観が主体的学習を保証しないことは湊&浜田(1994)が既に論じている。(1)での考察は，数学史から見た数学的知識の発展においてもプラトン的数学観が適切ではないことを示したものである。(2)では，非プラトン主義の視点から，教科書での定義の扱い方について提案する。ここでの議論は，中学校数学教科書についてのものであるけれども，算数教科書，高等学校数学教科書に対しても示唆を含むものである。

我が国の中学校数学教科書の変化と対応の章は，現実的事象から始まり，直ぐに関数の定義の記述(岡本他，2011)となる。この教科書の記述の仕方は，内容の多少の変更があったとしても，我が国で告示された最初の中学校学習指導要領に応じた教科書の場合から殆ど変わらない。関数の定義の記述が必ずあり，数学教育の現代化の影響を強く受けた教科書では，４節で論じたように，関数の定義の二重性という問題点まで含んでいる。

我が国の中学校数学の教科書は，現実的場面を扱う導入があるとしても，学術的数学の記述の様式を反映しており，定義，用語の説明，例題と練習問題に多くの紙面を充てている。この様式は，中学校数学教師の個性に差があったとしても，その違いを最小に抑え，総ての数学教師が失敗することなく数学を教えることを目指していることを反映しているとさえ見える。特に，昭和 33(1958)年告示の中学校学習指導要領に応ずる数学教科書以来，関数の定義を不断に掲載してきたことには，数学教師のみならず数学教育界が如何に学術的数学に力点を置いてきたかが覗える。若しかしたら，そうした状態においては，定義を教えることを重要視する授業があったのかも知れない。勿論，これには図形の証明を重視してきた風潮からの影響もあろう。

中学校数学教科書に，定義，定理，その証明などといった学術的数学を須く反映させることが適切というのではない。一つの資料がある。MiC の教科書(MiC，2006)は，絵図，問題のみにより構成され，数学書の反映は一切ない。図 1，図２は MiC(2006)の八学年用(我が国では中学校第二学年用)の教科書からの引用である。年輪という現実的問題から出発し(図１)，成長曲線に表とグラフとから展開している(図２)。式化は急がない。こうした教科書からは，我が国の尋常小学算術(文部省, 2007)が絵付きの文章題と計算練習のみからなる教科書であったことを思い起こすこともできる。

数学的活動による知識構成を重視する授業では，関数の定義が，絶対的な言葉として扱われるべきではないことは，ここまで論じたように関数の定義そのものが完全ではないという関数史が示している。授業は，関数の定義を知るというよりも関数の性質を数学的活動を通して経験し，知識として構成する場であるべきで，無理矢理に関数の定義を扱う必要

はない。授業で扱うべきなのは関数の性質であり，その関数の性質は，無味乾燥な対応のみとしての関数の知識であるよりは，幾何的側面と代数的側面の両者を反映する，ディリクレによる関数の捉えが望ましい。その点では，集合論から，一端，離れた我が国の中学校数学教科書の関数の扱いは適切であるが，未だ学術的数学を強く反映している点では改善の余地があるであろう。

授業で関数の定義を学術的知識として扱わないことに対しては，MiC の立場と Bishop (1988)の論との間に共通性がある。この共通性は数学的知識を社会的構成物と捉える Ernest(2015)の論との間にもある。MiC の立場では数学的知識を活動の所産とし，数学的活動こそ数学的知識である(Freudenthal, 1991)との理念に基づく数学教育を企画，実践する。その活動の出発点は現実場面であり MiC の教科書に掲載されている様な場面なのである。現実的数学教育(Realistic Mathematics Education)と Freudenthal 派が呼ぶ立場では心的枠組みであるモデルの自己発達によって現実場面からフォーマルな知識を形成していくのである。

このフォーマルな知識というのは数学的知識の水準について湊(2011)が定型的水準と和訳した Bishop(1988)による formal level と専門技術的水準である technical level の双方に係る知識である。MiC による現実場面は寧ろ Bishop(1988)による非定型的水準にある知識を豊かに含む場面である。或る者は非定型的水準から定型的水準へと，或る者は非定型的水準から専門技術的水準へと知識を構成し，更には定型的水準と専門技術的水準との係わりにおいて知識を構成していくだろう。この構成は Ernest(2015)の言う数学的知識の社会的構成である。中学生に相当する学習者が最初に向かう場面は，決して直接に専門技術的水準の知識, 即ち, 数学の定義ではない。

数学者にとって数学的言語記号が現実である(Freudenthal, 1991)のに対して，例えば中学生の現実が，ここで専門技術的水準と呼んだ学術的知識であるのではない。学習者は学習者の現実，それも相互作用が可能な現実であり，知識の社会的構成が可能な現実を伴う場面から学習を始め，定型的水準へ，専門技術的水準へと向けて数学的活動をするのである。言葉の意味を明確にした上で，即ち定義をした上で数学的に考察することは，正に数学者を模範とした数学的活動であって—これは数学者を探求者の最上位に置いた知的階層主義を反映する—，学習者はそうある必要はない。学習者は探求者であるが，しかし数学者ではない。学習者は幼少期から大人に至るまで，眼前の現実を問題とし，数学的活動をする探求者であり，その探究は今在る学習者のできるだけの活動である。その種の探究の中でこそ創発(emergence)が叶うのであろう。

この研究では，数学者の数学的活動である専門文化的水準を否定するものではないが，しかし，学習者に促す数学的活動は，数学者の活動を模範としたものより，より広範囲に及ぶという立場をとる。Bishop(1988)は数学的活動における根本的な活動を，ものを数える，位置づける，量を測る，形を与える，遊びをする，説明をする，の六つとしている。この六つをして数学的に創造的な活動がなされるのである。この中で数学的定義に係る項目は説明をするという数学的活動であろう。

説明をすることは，Bishop(1988)が言うように，他の五つが”環境世界を経験するに過ぎないことと関わる水準よりも認識を高めに持ち上げる”(Bishop，湊訳，2011，p.93)のである。この説明することが，社会的構成主義を反映する授業においてなされる過程は，先ずもって現実場面があり，そこでの様々な気付きを学習者があげ，その気付きについて学習者が議論するなかで，言葉の取り決めがなされ，そこで共有物としての言葉の取り決めであるその学級共同体での定義に基づきながら探究を進めていくというものだろう。こうした授業においては数学的活動に定義が先んじるのではない。こうした授業では，起点となる問題場面を掲載した教科書を必要としたとしても，定義が真っ先に記述されている教科書を必要としない。数学的定義は教師が握りながら，教師は授業における数学的知識の社会的構成の過程において，適切な時期にその定義に至るように学習者の活動を促すのである。この種の授業は一単位時間で完結するものとは限らず，単元を通した数学的活動を通してなされるものであろう。

勿論，学習者が知的に進歩していくなかで，学級共同体で使用する定義が決められ，その定義を用いて次なる現実場面を生じさせ，数学的活動をすることを考えることはできる。そうした活動は数学者の共同体の有り様を反映したものであろう。数学者の共同体では，数学者は不完全な数学的体系をその共同体で維持しながら，しかしながらなるべくその体系を，知的革命を超えて完全なものへと書き換えようとする知的嗜好性のもとに，発展させる。この数

学者の共同体は，学級共同体の模範となり得るだろうか。

学習者の最初の探究が様々な現実を起点とするのであり，探究の結果も複数あってよいとすれば，学習者の知的生産物である数学的知識は体系的である必要はないのではないか。勿論，学習者が教材毎に構成する数学的知識は，現実場面や他の数学的知識と結び付くことは重要である。だがしかし，その結び付いた知的構成物に幾つかの独立した纏まりがあってもよいし，異なる知的構成物間に対する暗黙的な親密性をもって，学習者が知的に満足するのであれば，それは大きな学習成果となるに違いないのである。

６．結語

数学教育の現代化期の我が国の中学校数学教科書に二種類の関数の定義が掲載されていることを知ったのは，大学生の際に受講した数学科指導法においてであった。その後，数学教育学研究に携わるにあたり，この定義の二重性の問題点が学校現場では曖昧なままに扱われていることに度々気付かされた。その過程で高橋(2003)によってこの問題点を指摘しもした。

数学教育の現代化期の実践の傾向は，できるだけ学術的な数学を教えたいという立場の数学教育者には望ましいものであったに違いないし，現在においてもブラックボックスなど無味乾燥な道具を用いた関数指導が行われる場合があるだろう。関数関係という語の乱用についても然りである。しかしながら，関数の，現象に対する一種の記述方法としての側面を重視する立場にあれば，対応関係のみを特別に扱うよりは，はるかに子どもの数学的活動を湧き上がらせることができる。現象を様々な方法で記述し，その現象を説明するために関数という考えを用いることの重要さ，幾何的には驚く様な曲線で関数が表され，代数的には時には整理された様式で記述できることに気付くことの重要さ，それらこそが数学教育実践の場での数学的活動に含まれるべきだろう。

さて，この研究で現行の我が国の中学校数学教科書を取り上げたけれども，それは教科書の編纂に根本から否定的な見解をもつからではない。寧ろ，その逆で，かつては尋常小学算術書から尋常小学算術へと，劇的に教科書の内容を書き換えた我が国が，今正に主体的で対話的な深い学びを実現するために，教科書の内容を更に改善することができるという見込みをもつからである。尤も，真っ先に内容を書き換えなければならないのは，高等学校数学教科書なのかも知れないのだろう。

引用・参考文献

１）Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: Cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

２） Bishop, A. J. 湊三郎訳．(2011).『数学的文化化—算数・数学教育を文化の立場から眺望する—』. 教育出版.

３）Bottazzini, U. (1986). *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* NY: Springer.

４）Bottazzini, U. 好田順治訳．(1990).『解析学の歴史：オイラーからワイアストラスへ』. 現代数学社.

５）Davis, P. J. ,Hersh, R. & Marchisotto, E. A. (1995). *The mathematical experience.* Boston: Birkhauser.

６）Davis, P. J. & Hersh, R. 柴垣和三雄他訳．(1986).『数学的経験』. 森北.

７）Ernest, P. 長崎栄三，重松敬一&瀬沼花子監訳. (2015).『数学教育の哲学』. 東洋館.

８） Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* NY: Springer.

９）Iaccobaci, R. F. (1965). *Augustin- Louis Cauchy and the development mathematics analysis*. Ph.D. Dissertation. New York Univ.

10）稲葉三男．(1977).『関数定義』. 共立出版.

11）稲葉三男．(1991).『微積分の根底をさぐる』. 現代数学社.

12）福森信夫他．(1992).『数学１年』. 啓林館.

13）福森信夫他．(2001).『数学２年』. 啓林館.

14）橋本純次他．(1980).『数学１』. 啓林館.

15）橋本純次他．(1980).『数学３』. 啓林館.

16）Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal, 20,* 282-300.

17）MiC. (2006). *Ups and downs*. Chicago: Britannica.

18）湊三郎．(2017).「近時の数学観の動向に応える数学教師の資質と責務」.『日本数学教育学会誌』, 99, １, 10-17.

19）湊三郎&浜田真．(1994).「プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか—数学観とカリキュラム論との接点の存在—」.『日本数学教育

学会誌』，76，３，2-8．
20）文部省．(2007).『尋常小学算術(復刻版)』．啓林館．
21) 中西正治．(2000).「学校数学における関数の定義についての史的考察—中学校数学を中心にして—」．『近畿数学教育学会誌』，13，34-45．
22）NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.
23）岡本和夫他．(2011).『未来へひろがる数学１』．啓林館．
24）大矢真一&片野善一朗．(1978)．『数学と数学記号の歴史』．裳華房．
25）Peirce, C. S.　内田種臣訳．(1986).『記号学』．勁草書房．
26）Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy.* Chicago: *The* University Chicago press.
27）Polanyi, M. (1966). *The tacit dimension.* Gloucester: Peter Smith Pub.
28）Ruthing, L. (1984). Some definitions of the concept of function form Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *Math. Intelligencer, 6, 4*, 72-77.
29）正田健次郎他．(1968).『再訂中学新数学第２学年』．啓林館．
30）正田健次郎他．(1971).『数学１』．啓林館．
31）高橋等．(2003).「数学的知識を創発させる教材開発」．上越数学教育研究会 Σ 会(編),『今こそ Do Math!』．上越：上越数学教育研究会．

History of function and transition of definitions of function in Japanese junior high school mathematics textbooks: Proposal of how to treat definitions of function in school mathematics

TAKAHASHI, Hitoshi

Key Words：History of function， Definition of function, Junior high school mathematics textbooks

Abstract

In this paper I discussed about next three themes; First, I clarified the essence of the function by discussing the history of the function; Second, I clarified the influence of the history of definitions of function on the definitions published by Japanese junior high school mathematics textbooks; Third, I proposed the viewpoint of the definition of the function that should publish in the textbook. As results, the following was clarified; Platonism was denied from the point of history of the function because the complete knowledge of function and it's definition had not appeared in the history; There was time when definitions of function based on the analysis and the set theory were published at the same time in one junior high school mathematics textbook of Japan; There should be the textbook that described only the introduction scene of realistic problems.