

発展的に考える授業展開の研究 －発見的発展の視点－

佐藤 学
秋田大学

重松 敬一
奈良佐保短期大学

赤井 利行
大阪総合保育大学

杜 威
秋田大学

新木 伸次
国士舘大学

椎名 美穂子
秋田県総合教育センター

(2017年3月15日 受理)

要約

本研究の目的は、全ての学習者が発展的に考える算数・数学の授業を構築することができるよう、これを阻む要因を同定・分析・検討し、これに基づいて発展的に考える算数・数学の授業モデルを開発することにある。

そこで、本稿では発展的に考える授業についての理解を図るため、発展的に考えることの意味について、拡張や一般化の意味での「構造的発展」に加えて、無意識的活動の状態で取り組む思惟活動に注目し、当面の問題から次の問題へと発展的に気付くことを「発見的発展」という視点について検討した。この観点から、小学校算数「箱の形」の授業実践から「構造的発展」と「発見的発展」の様相の違いを考察した。

その結果、考察の対象とした授業実践には、「構造的発展」と「発見的発展」の様相は見られなかったものの、それぞれを想定することは十分可能であり重要な働きをもつこと、また、児童が発展的に考えることについての振り返りをする上で重大な働きをもつという考えに至った。

検索語：構造的発展，発見的発展，振り返り

1. はじめに

本研究の目的は、全ての学習者が発展的に考える算数・数学の授業を構築することができるよう、これを阻む要因を同定・分析・検討し、これに基づいて発展的に考える算数・数学の授業モデルを開発することにある。

その目的を果たすにあたり、まず、発展的に考えることについて教師の意識の実態を明らかにするため、小学校 182 名、中学校数学 50 名、計 232 名の教師を対象にした意識調査を行った。その結果、「発展的に考える授業についての理解が十分でないこと」、「発展的に考える指導法が確立されていないこと」、「発展的に考える学習は上位から中位を対象にしたものであり、下位には困難であるという意識があるということ」の 3 点を、発展的に考える授業を阻む要因として析出した（佐藤・他，2016）。

そこで、本稿では、発展的に考える授業についての理解を図るため、発展的に考えることの意味を検討する。そして、実際の授業実践をもとにその様相を考察する。

2. 発展的に考える授業展開を考える視点

(1) 構造的発展

佐藤・他（2017）は、教師の発展的に考える授業についての理解が不十分であることの解消を図るため、算数・数学を構造的に統合し発展するという意味から「構造的発展」を挙げており、「統合」と「一般化」、「簡潔・明瞭」に整理している。

「統合」とは、発展的に考えるときの方向性となるもので、細かくは、はじめの概念の意味や形式を一般化してまとめる場合の「拡張による統合」や、異なったものとしてとらえられていたものについて共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合の「集合による統合」、すでに知っている概念や形式が適用できない場合が起こるとき、補うものを加えてまとめる場合「補完による統合」がある。そのうち、「拡張による統合」は、算数・数学の学習において広く行われているものである。

「一般化」とは、つまり、一般的なこととしてつかみ「構造」をとらえるものである。きまりや性質の適用範囲を拡げる際には条件の一部を一般的なものへと変更するため「外延的一般化」が、また、数学的なアイデアや知識のつながりを見いだす際には要素や要素間の関係、解法などに着目する視点を変えるため「内包的一般化」がなされる。さらに、一般化を進める際には、形式や論理の簡潔さ、明瞭さを求めて「簡潔・明瞭」もなされる。

「統合」と「一般化」、「簡潔・明瞭」を問題解決過程に位置付けると、図1のように整理することができる。「整数×小数」の意味について具体的に示すと、問題発見の状況では、既知の「整数×整数」の概念や形式との対比から、「×小数」というもっと広い範囲に適用できるよう、「 80×2.3 」といった特殊な場合について考えることから始まる。

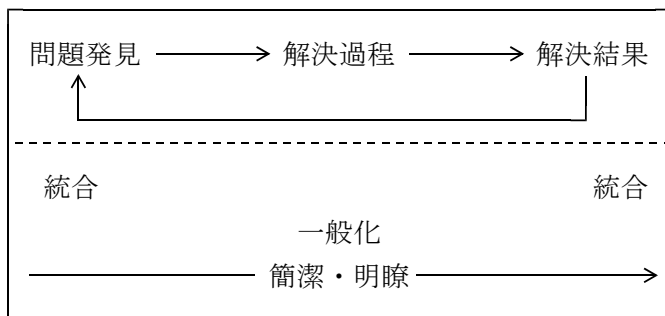


図1

言葉の式や図を使って、「 80×2.3 」と「整数×整数」が似ていることを捉える。しかし、「 80×2.3 」は「整数×小数」という集合の一部の考察に過ぎないため、倍関係が成立するとは決め難い。そこで、「×帯小数」の他の場合や「×純小数」といった場合も取り上げて、倍関係の成立を一般化して捉えるのである。

(2) 構造的発展を主体的なものにする視点の必要性—発見的発展への着想—

昭和43年改訂学習指導要領（文部省，1968）^{註1}において「統合的」、「発展的」という考察の視点が登場して以来、発展的に考えることの捉え方については根本的には同じ^{註2}で

あり、構造的発展を同じ線上に位置付く。しかし、佐藤・他（2016）の結果からは、実際の授業において具現化されているとは言い難く、新たな視点を加える必要がある。

本研究では、構造的発展のきっかけに注目することにしたい。

暗がりの部屋に入ったことは誰しもある。最初は真っ暗で何も見えず、足を進めることも手を伸ばすことも恐々したものである。しかし、しだいに暗がりに慣れ、徐々に「机がある」、「椅子がある」、「奥にも扉がある」、…といったことが分かるようになり、最後に「ここはリビングだ」という確信を得るに至る。眼球の虹彩を収縮して瞳孔を広げ、水晶体を通る光量を増やすよう調整する暗順応という仕組みのことだが、問題解決についても、無意識的活動において徐々に問題の構造を捉えていくためのイントロダクションのプロセスに似ている。分からなかったものが、無意識的活動を経て突如分かるようになる——知的な興奮を訪れば、さらなる好奇心へと誘導してくれる可能性を大いに秘めている。本研究は、無意識的活動の状態で行き届く思惟活動に注目し、当面の問題から次の問題へと発展的に気付くことを「発見的発展」と呼ぶこととする。

もう少し発見的発展について具体的に述べよう。第4学年「面積」の学習では、長方形や正方形の面積の公式化を終えた後に、L字型の複合図形の面積を求めるという問題(図2参照)を解決することがある。L字型図形の面積は、これまで求めてきた長方形や正方形とは、異なる形状である。正方形や長方形という基本図形の面積を求めてきたという文脈から、L字型のような複雑な形状の図形の面積を求めよう考えることには、発想の飛躍がある。したがって、一般的な指導では、教師がL字型の図形を提示し、長方形や正方形の面積公式が使えるよう求め方の工夫を考えていくことにしている。

長方形や正方形の面積の求め方とL字型図形の面積の求め方の接続をこのように考えることが一般的ではあるものの、時に、児童は、発想の根源や根拠は曖昧なように見えるが、何か新しいことを求めて考えようとする

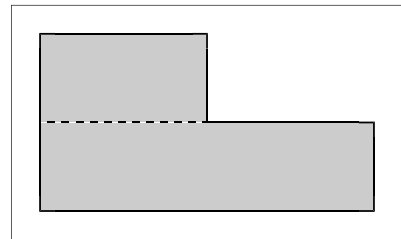


図 2

ことがある。この場合であれば、長方形や正方形以外の図形の面積も求めることはできないかと思うことはできる。その上で、長方形や正方形以外の図形を考えてみることである。その際、L字型図形のような図形を思いつくことが重要ではなく、長方形や正方形以外の図形を考えてみることに価値を見出すことである。長方形や正方形以外の図形を考えてみることは、新たな図形を見出すための模索を行う。例えば、長方形や正方形の辺に着目して、その長さを変えてみる。しかし、長方形や正方形であること変わらない。次に、それぞれの図形の角に着目して、角度を変えてみる。しかし、長方形や正方形とは異なる形状の平行四辺形となり、解決の見通しが立たない。このように試行錯誤により、自らが解決可能な範囲の新たな図形として、長方形や正方形を組み合わせた図形を閃く。ポアンカレ（前記）は、無意識的活動について「純粹に自動的なものではなく、識別力あり、機略あり、微妙さあり、選擇をし、洞察力をもつ」と述べている。これら試行錯誤の過程において、「辺の長さを変えてみる」、「角度を変えてみる」、「図形を組み合わせてみる」のいず

れも、見通しをもったものではないが、学習履歴から得た数学的な価値を背景にした活動であり、実は大切な活動なのである。

3. 小学校算数「箱の形」の授業実践における2つの発展の視点

次に、発見的発展の様相について小学校算数「箱の形」の授業実践をもとに考察を行う。

(1) 授業実践の概要

授業実践は、2015年2月22日にA県公立小学校において実践された「箱の形」を取り上げる。指導者は、授業実践を行った学級の担任のB教諭である。B教諭は、教職経験10年程度の経験を有する。なお、授業実践を行った学級Cの児童数は、28名である。

授業実践の観察は、2名で行った。また、授業の様子をビデオカメラ2台（全景を撮影するため教室後方に1台、授業者を撮影するため教室前方に1台）によって記録した。記録した映像からプロトコルを作成し、観察した記録や映像とあわせて分析した。また、授業で児童が取り組んだ評価問題や学習感想の記述も資料として用いた。

本単元は、第4学年「立方体、直方体」の素地的な学習として位置づく。箱の形を観察したりつくったりすることを通して、箱を構成する要素（面、辺、頂点）に着目し、立体図形の意味を理解することが主たる目標となる。指導計画は、次に示すとおりである。

- ① 箱の形に親しむ。(1時間)
- ② 立体と平面の関係を知り、その面の形や数をとらえる。(1時間)
- ③ 写し取った面の形を切り取り、箱を組み立てる。(1時間)
- ④ 組み立てても箱の形にならない場合について、その理由を考える。(1時間、本時)
- ⑤ 直方体や立方体の頂点、辺の数などの構成要素を理解する。(1時間)
- ⑥ 学習内容の確認

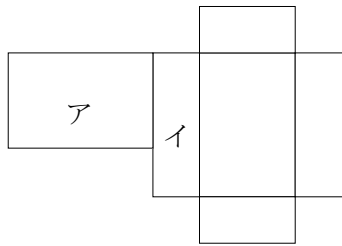


図3

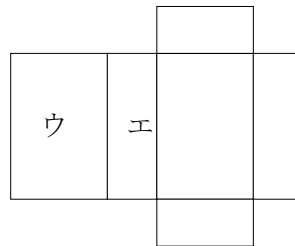


図4

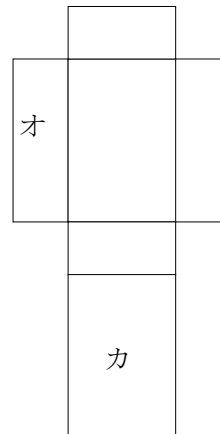


図5

授業実践は、第 4 時である。第 3 時において箱を組み立てる活動を行っている。その際、図 3 のように、6 つの面をつないで組み立てても箱の形にならない場合がある。第 4 時は、図 3 のように箱の形にならない場合について、辺の相等関係、面の位置関係に注目してその理由を考え、図 4 のような奴型の展開図に正すという展開を基本的な流れとする。

発見的発展の視点に立つと、図 5 のように、面オは面カと隣り合うようにつなぎ合わせなくとも箱になる場合も考えてみようとする展開を想定することもできる。

(2) 授業実践の実際と考察

① 授業実践の実際

授業実践では、図 3 の展開図に加え、図 6 の展開図も提示された。図 6 は面の位置関係を誤っているものである。図 3 は教師が誤ってつくったもの、図 6 は学級 C に在籍する児童 D が誤ってつくったものとして提示された。第 3 時において多くの児童が正しく箱を組み立てることができていたこと、

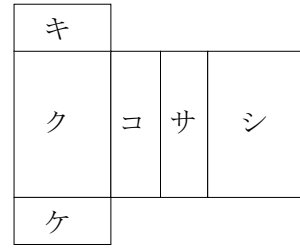


図 6

誤って組み立てている他者の存在を知ったことは、その後の箱を組み立てる際のポイントを考えるという自力解決への意欲を喚起することにつながっていた。

自力解決では、「(図 3 については) いちばん左の面 (面ア) を横ではなく、縦に直し (90° 回転し) たらいい」や「(図 6 については) 面サと面シをとりかえたらいい」と辺の相等関係や面の位置関係は不十分なものの、操作の仕方をノートに説明できている児童が多かった。「(図 3 については) 同じ辺同士をくつつけるようにする」や「(図 6 については) 同じ形の面を向かい合わせにしたらいい」と説明も見られたが、一部の児童であった。また、図 3 と図 6 の両者とも正しく説明できている児童はいなかった。

集団解決では、自力解決でノートに記した説明を発表し、それを話し合いによってより数学的な表現へと高めていった。資料 1, 2, 3 に見られるように、図 3 と図 6 の展開図を実物投影機で映し出し、説明に付随する操作を確認しながら進めていき、「同じ長さの辺をつなぐ」、「向かい合う面は同じ形にする」、「向かい合う面が隣り

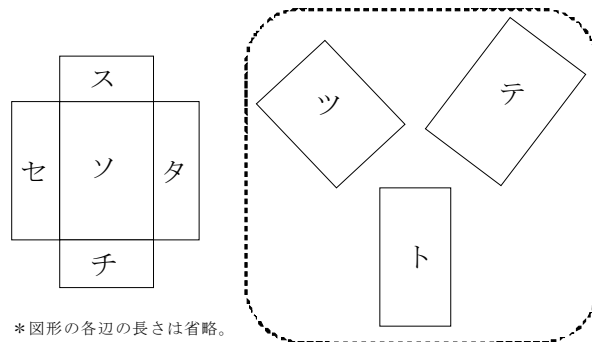


図 7

合わない」の 3 点にまとめることができた。面の置き方に留まっていた説明が徐々に変化し、「同じ長さの辺をつなぐ」という洗練された数学的表現に高まっており、児童の理解も深まっていたといえる。

(図 3 の展開図について)

D 面アも面イもどちらも貼る場所を変えるといいと思います。

- T つなぐ場所が違うということだね。
- T この中（提示している展開図の全ての面）でどこかつなぐ場所が違っているんだよ。どこだか具体的に言える人いますか。
- E 先生の失敗した箱のほうは、ここ（面アの茶色の辺）と、ここ（面イの茶色の辺）をくっつけるといいと思います。
- 全 いいと思います。
- T 違う言い方できますよって人はいますか。
- F 青の線の所（面アの縦）と茶色の線（面イの縦）だと色が違うので、大きさも違って、ちゃんとした大きさにならないので、茶色の線の場所と茶色の線の場所をくっつけると、上手に箱が組み立てると思います。
- 全 いいと思います。
- T 色が違うと駄目なんだね。同じ色っていうのは？
- G 同じ辺の長さ。
- T 長さっていう言葉を使って発表できるよって人いますか。
- H 茶色の線の長さ（面イの縦の辺の長さ）は、隣の水色の線の長さ（面アの縦の辺の長さ）と違うので箱は組み立てられないからです。
- 全 いいと思います。

* T : B 教諭

* D, E, F, G, H : 学級 C の児童

* 全 : 学級 C の全児童

資料 1 : 「同じ長さの辺をつなぐ」をとらえる話合いのプロトコル

- T I さんの場合（図 6 の展開図）は、きちんと同じ長さの辺同士つないでるよね。それなのにうまく貼ることができない。どうしてだろうね。
- J 真ん中の大きさとかが違うから。少し違うから。
- K できないんだと思います。
- T 他の言い方をすると人。
- L 面コと面サの縦の長さは同じだけど。
- M （面サを）面クのその左の
- N 面をやれば
- T 面をやれば
- O 箱は完成する。
- T う～ん、なるほどね。
- P 他の言い方もあります。組み立てたときに同じ面が向かい合うようにすればいいと思います。

T どうですか？

全 いいです。

* T : B 教諭

* J, K, L, M, N, O, P : 学級 C の児童

* 全 : 学級 C の全児童

資料 2 : 「向かい合う面は同じ形にする」をとらえる話合いのプロトコル

(図 6 の展開図について)

T 面コと面サがこう向かい合っていればいいんだよっていうことだったんですよね。面キと面ケは、どうですか？

Q 合ってます。

T 向かい合ってますよね。うん。

T 面コと面サはどうですか？

T 向かい合っていないね。隣同士なっちゃってるよね。

R 隣同士なので、向かい合うことはできないので。ここ(面サのこういったところ(面コと面シをつなぐ辺))をハサミで切り取って、ここ(面サ)をここ(面ク)に、ここ(面シ)をここ(面コ)の辺にくっつけて、テープでとめて、箱の形にしてみればいいと思います。

T どうですか。

全 いいと思います。

* T : B 教諭

* Q, R : 学級 C の児童

* 全 : 学級 C の全児童

資料 3 : 「向かい合う面が隣り合わない」をとらえる話合いのプロトコル

その後、評価問題 1 題→活用問題 3 題の順で自己評価活動を行った。活用問題の 2 題は説明を求めるものであり、本時の学習で解決可能である。もう 1 題は、図 7 のように 5 つの面にもう 1 つの面を点線囲みの中から選んで展開図を完成するものである。多くの児童は評価問題に取り組んだ。活用問題に取り組む児童は見られなかった。

② 発展的に考えることの可能性

<イの面以外のつながり方を考える－発見的発展の視点－>

図 7 の活用問題では、面テを選択するが、そのつながり方は面セに隣り合うだけでなく、面タ、面ス、面チと多様である。実際の授業では時間が不足したため、この問題に取り組

んだ児童は見られなかった。残余の時間が確保できれば、面セ以外のつながり方はないかを考えることも十分可能である。

面テの面セ以外のつながり方はないかを考える可能性は、図3の組み立てることができない展開図の解決場面に戻って考えるとよい。先述したとおり、自力解決から集団解決にかけて児童の多くは、面アと面イの辺同士が同じ長さになるよう、面アのつなぎ方を考えていた。このように考えたり、それを学び合いによってより洗練された数学的表現に高めたりした後、改めて、面アのつなぎ方について考える場面を設定するのである。シンボリックな「奴型」の展開図をイメージを打破する、考えもしなかった新たなつながり方を考えようとする発見的発展の可能性が潜んでいると考える。

＜「同じ長さの辺をつなぐ」を一般化する—構造的発展の視点—＞

面イ以外のつながり方を考えることにより、多様なつながり方があることに気付く。さらに、面イ以外のつながり方についても、「同じ長さの辺をつなぐ」という関係性を有しているのか、「イの面とのつながり方で捉えた『同じ長さの辺をつなぐ』というきまりは【振り返り】、他の場合も、同じことがいえるか」と発問することにより構造を一般化して捉えていくことが可

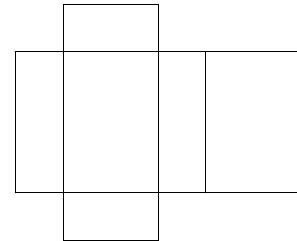


図8

能となる。むしろ、図4の展開図だけでなく、図8や図5の展開図を扱うことにより構造はより捉えやすくなる。

(3) 発見的発展と構造的発展の関係

暗がりの話について、リビングだと分かった後の続きをしたい。奥にも扉があることから、隣の部屋についても知りたくなる。それは漠然としたものではなく、同じ構造をしたリビングがあるのか、また別の構造の部屋なのか、という意識をもった好奇心、探究心が働いているのである。そして、実際に奥の部屋に入ってみると、今度は「机がないか」、「椅子がないか」、「奥はどうなっているのか」、…と、前の部屋で見出した構造から新しい部屋について見ている過程で「気づき」は徐々に鮮明となり、明確にしたいという必然性が生まれる。そこで、これまでに見つけたいくつかの展開図を振り返り、「同じ長さの辺をつなぐ」、「向かい合う面は同じ形にする」、「向かい合う面が隣り合わない」の3点を捉え、「確信」となる。このようにして見出したことが原動力となって、次は、2枚を移動する場合でも3点が同様にいえるか新たな展開図を考えてみようとしていくのである。図9はこの流れをまとめたものである。

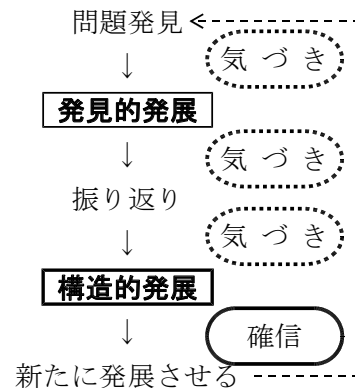


図9

4. 成果と課題

発展的に考えることの視点について、無意識的活動の状態に取り組む思惟活動に注目し、「発見的発展」を見出すことができた。

今後は、「構造的発展」と「発見的発展」の想定の妥当性と様相の類型化を図るため、引き続き授業実践の考察を進めていくことが必要である。



本稿は、6名による共同研究である。赤井，杜，新木の5名は第2章と第3章を担当した。佐藤，重松，椎名は、全ての章を担当した。

付記

本研究は、2016年11月26日に行われた東北数学教育学会第48回年会の発表論文である佐藤・他（2016b）の内容を加筆・修正したものである。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 15K04390 の助成を受けたものです。

また、査読者から論文の精緻化に向けての多くのご指摘をいただきました。査読者へ感謝の意を表します。

註

- 1 中学校学習指導要領（文部省，1969）については、昭和44年改訂の目標において「事象を数理的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成する。（下線は筆者らによる）」と示され、高等学習指導要領（文部省，1970）については、昭和45年改訂の目標において「事象を数学的にとらえ、論理的に考え、統合的、発展的に考察し、処理する能力と態度を育成し、また、社会において数学の果たす役割について認識させる。（下線は筆者らによる）」と示されている。
- 2 平成15年の「小学校、中学校、高等学校等の学習指導要領の一部改正等について（通知）」（文部科学事務次官，2003）では、個に応じた指導の一層の充実として「発展的な学習などの学習活動を取り入れた指導」が加えられた。同時期に発刊された「個に応じた指導に関する指導資料」では、発展的な学習について「数量や図形についての基礎・基本を身に付けている子どもが、それを基にしてより広げたり深めたり進めたりする学習である（小学校。文部科学省，2002a）」、「学習指導要領に示す内容を身に付けている生徒に対して、学習指導要領に示す内容の理解をより深める学習を行ったり、さらに進んだ内容についての学習を行ったりするなどの学習指導である（中学校。文部科学省，2002b）」と示されたことにより、佐藤・他（2016）の結果に示されるように、発展的に考えることの不理解が生まれたと推察できる。

〈引用・参考文献等〉

- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次（2016）『『発展的に考えること』の指導に関する教師の意識に関する調査』，全国数学教育学会第 43 回研究発表会，発表資料
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子（2017）「数学教育における教材開発の研究Ⅴ—発展的に考える授業の展開を視点にした小学校算数第 6 学年「扇形の面積」の考察—」，秋田大学教育文化学部研究紀要・教育科学，72 巻，pp.33-38
- 文部省（1968）「小学校学習指導要領」
- 文部省（1969）「中学校学習指導要領」
- 文部省（1970）「高等学校学習指導要領」
- 文部科学事務次官（2003）「小学校，中学校，高等学校等の学習指導要領の一部改正等について（通知）」
- * http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/cs/1320953.htm（2017.2.1 確認）
- 文部科学省（2002a）「個に応じた指導に関する指導資料—発展的な学習や補充的な学習の推進—（小学校算数編）」，教育出版，pp.13-25
- 文部科学省（2002b）「個に応じた指導に関する指導資料—発展的な学習や補充的な学習の推進—（中学校数学編）」，教育出版，pp.9-15

**Point of view to lesson of mathematics to make students consider in developing way
— Viewpoint of Heuristic development —**

Akita University

SATO,Manabu

Nara saho College

SHIGEMATSU,Keiichi

Osaka University of Comprehensive Children Education

AKAI,Toshiyuki

Akita University

DU,Wei

Kokushikan University

ARAKI,Shinji

AKITA Prefectural Education Center

SHIINA,Mihoko

Key Words : Integrated development, Heuristic development, reflective activity

The meaning of mathematics to make students consider in developing way is categorized as "Integrated development" and "Heuristic development". In this paper,we discussed the difference between "Integrated development" and "Heuristic development" using a elementary school mathematics lesson.

As a results,teacher's utterances are important for teacher to make students consider in developing way,and we think also it is very important for students to have a reflective activity.