和算を作図問題へ活用する試み

－ 和算書「算法天生法指南」の問題から －

萬　伸介（宮城教育大学　名誉教授）

(2017 年 3 月 15 日　受理)

概要：和算書「算法天生法指南」にあるいくつかの問題を別の視点でとらえると作図に関わる問題が得られることを紹介する。その具体例を示し、和算の数学教材への活用の一例としたい。

キーワード：作図問題、和算、算法天生法指南

１．はじめに

和算では図形に関わる多くの問題が取り上げられている。それは「与えられた図形のある部分の長さや面積などを求めよ。」というもので、どのようにしてそれに答えるか、解法はどのようなものか、に注目することになる。しかしながら別の視点でその図形問題をとらえるならば、すなわち「与えられている図はどのようにして描かれたのか。」と考えるならば作図に関わる問題が得られるのである。中学校および高等学校の数学で取り扱われる「作図」(1) に関わる教材として活用できるものである。和算の初学者向けの書（今日でいう教科書）として江戸時代後半に刊行され多くの人々に読まれたものの１つである「算法天生法指南」(2) の巻之一、巻之二よりその具体例を紹介する。

本論は 2016 年 6 月の初夏研究会の口頭発表原稿を書き直したものである。

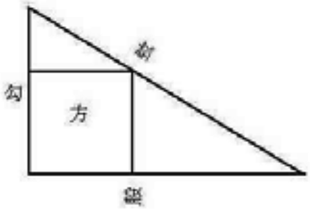
２．「算法天生法指南」記載の４つの図形問題

「算法天生法指南」の巻之一、巻之二はそのほとんどが図形の基本的な性質を取り上げている和算書である。三平方の定理を示し、直角三角形に正方形を内接させた問題の後に、正方形を菱形そして円と順次変えた問題を配列している。またある図形に１つの図形を内接させたなら、その次にはその内接図形を２つ３つと増した問題を順に並べている。このように「やさしい」から「やや難しい」へと問題の配列にも考慮したことがうかがえる構成になっている。したがって、中学校・高等学校での教材として活用可能な和算書だと思っている。

ここで取り上げて紹介する問題は、「他に解法はないですか？」と問いかけができる、すなわち２通りの解法が考えられる問題である。「やさしい」と思われる問題を２つ（巻之一から)、「やや難しい」と思われる問題を２つ（巻之二から）選んだ。それらは小学校で学習する「拡大、縮小」(3) とそれを発展させて中学校で学習する「相似」(4) に関わるものに限定したものである。原文は縦書きであるが、それを横書き、旧漢字を常用漢字に直して以下に紹介する。

(i) 巻之一：十五丁ウラの問

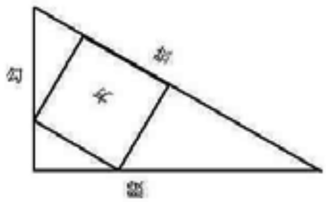
今有二如レ図勾股内容一レ方只云勾三寸股四寸問二方面幾何一



（現代訳）ここに図のように直角三角形内に正方形が接している。直角三角形の直角を挟む辺それぞれの長さが3寸、4寸であるとき、正方形の一辺の長さを求めなさい。

(ii) 巻之一：十六丁オモテの問

今有二如図勾股内容一レ方只云勾三寸股四寸問二方面幾何一



（現代訳）ここに図のように直角三角形内に正方形が接している。直角三角形の直角を挟む辺それぞれの長さが3寸、4寸であるとき、正方形の一辺の長さを求めなさい。

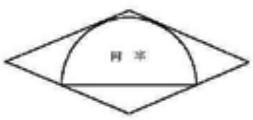
(iii) 巻之二：二丁オモテの問

今有三如レ図方内容二小方三個一只云外方面一寸問二小方面幾何一

（現代訳）ここに図のように正方形内に小さな正方形3個が接している。外側の正方形の一辺の長さが1寸であるとき、小さな正方形の一辺の長さを求めなさい。

(iv) 巻之二：三丁オモテの問

今有三如レ図菱内容二半円一只云横三寸長四寸問二円径幾何一



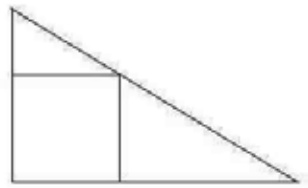
（現代訳）ここに図のように菱形内に半円が接している。菱形の短い方の対角線の長さが3寸、長い方の対角線の長さが4寸であるとき、半円の直径の長さを求めなさい。

以上はいずれも線分の長さを求める問題として提示されており、求められている数値を得ようと努めるのが通常の和算書の読み方である。しかしながら、これらの問題を視点を変えて考えるならば、「作図問題」が得られることを示すことにする。

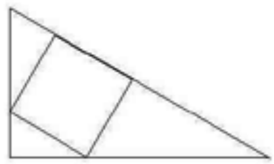
3. 作図問題の具体例

先に示した (i) から (iv) に対応する作図問題は次の**問題１**から**問題４**である。これらはこの機会に作題したものである。

問題１. 直角三角形に内接する正方形を作図しなさい。ただし、正方形の隣り合う２つの辺はそれぞれ直角三角形の直角を挟む２つの辺上にあり、１つの頂点は直角三角形の斜辺上にあるとする。

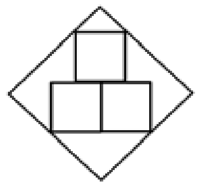


問題２. 直角三角形に内接する正方形を作図しなさい。ただし、正方形の１つの辺は直角三角形の斜辺上にあり、2 つの頂点は直角三角形の直角を挟むそれぞれの辺上にあるとする。

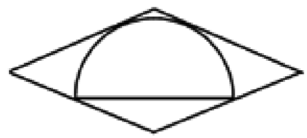


次の 2 つの問題は表現を簡略にして示すことにする。

問題３. 右の図のように外側の正方形に４つの頂点で接するように、合同な３つの小さな正方形を作図しなさい。



問題４. 菱形に右の図のように内接する半円を作図しなさい。ただし、菱形の水平方向の対角線の長さは鉛直方向の対角線の長さより長いとする。

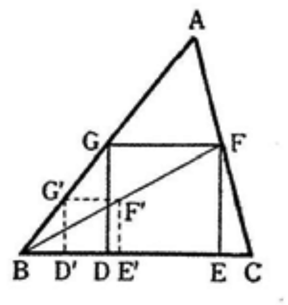


これらの解答については、それぞれに対して 2 つの解法（拡大と縮小）がある。また、問 3 と問 4 は「簡略にして」示している、すなわち、問題文の「図のように」と記しているのがそれである。このような問にした意図は以下の通りである。この「図のように」は図形の内接状況を表す部分である。作図問題の解法の前段階として、どのような状況の下で述べられている問題であるかを生徒たちが理解できているのかを確認する作業（教師が行う作業）を設定したいと考えたからである。中・高校生に「図のように」がどのような内接状況で

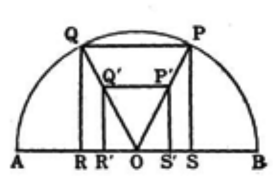
あるのかを口頭で説明させたり文章に書いて発表させることは「表現力」[5]に関わる意味のあることであろう。

問題 1 と問題 2 は以前の教科書でも取り扱われていた問題である。すなわち、昭和 30 年検定で昭和 31 年から使用された 2 つの教科書から同類の作図問題を引用して例として示す。

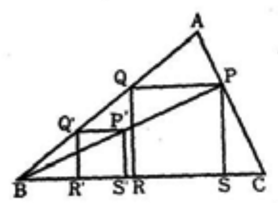
【例 1】[6]
例 3．与えられた鋭角三角形に，相隣る二頂点が底辺上に，他の二頂点がそれぞれ二辺の上にあるよう正方形を内接せよ．



【例 2】[7]
例 1．与えられた半円の直径の上に一辺をもち,他の二頂点が弧の上にある正方形をつくれ．



【例 3】[8]
問 1．右の図を参照して，△ABC の辺 BC 上に一辺をもち，他の二辺の上に，残りの頂点が一つずつあるような正方形を作図せよ．



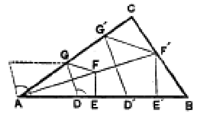
さらに時代を遡る明治・大正期における文部省検定済の中等学校用・師範学校用教科書から同類の作図問題を引用して例として示す。明治になって数学教育に「洋算」が導入されて「和算」は教育場面から消えていくことになったが、和算で取り上げられていた問題が新しい教育体制のなかで作図教材として採用されていたことを示すものである。

【例 4】[9]

199. 作圖題二. 所設ノ三角形ニ,所設ノ四角形ニ相似ナル四角形ヲ内接セヨ。

〔作圖〕 所設ノ三角形ヲ ABC トス。頂點 A ヲ過ギ AB ト所設ノ四角形ノ一角ニ等シキ角ヲナス直線 AX ヲ引キ,邊 AC 中ノ任意ノ點 G ヲ過ギ直線 AX ト平行ナル直線 GD ヲ引キ邊 AB ト D ニ於テ交ラシム。線分 DG 上ニ所設ノ四角形ト相似ナル四角形 DEFG ヲ作ル (198)。直線 AF ヲ引キ邊 BC ト F′ ニ於テ交ラシム。而シテ F′G′ ∥ FG, F′E′ ∥ FE, G′D′ ∥ GD ナラシム

然ラバ D′E′F′G′ ハ所要ノ四角形ナリ。



〔證明〕 三角形 ABC ノ各邊ハ四角形 D′E′F′G′ ノ各頂點ヲ通過ス。故ニ後者ハ前者ニ内接ス(第121頁問題3註)。次ニ四角形 D′E′F′G′ ハ點 A ト他ノ四角形 DEFG ノ頂點トヲ連又ル直線ノ延長中ニ頂點ヲ有シ且其各邊ニ平行ナル邊ヲ有ス。

∴ 四角形 D′E′F′G′ ∽ DEFG. (197)

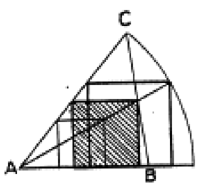
故ニ四角形 D′E′F′G′ ハ所設ノ四角形ト相似ナリ。

注意. 本節ノ作圖題ノ吟味ハ所設ノ三角形ト四角形トガ任意ナルトキ種々ノ場合起リテ困難ナルガ故ニ之ヲ略ス。上記ノ如キ作圖法ヲ相似法ト云フ。

（右側の最後のところに「相似法」と記されていることを注意しておく。）

【例 5】[10]

49 與ヘラレタル三角形内ニ一邊ガソノ三角形ノ一邊ト重リ他ノ二頂點ガ夫々他ノ二邊ノ上ニアル正方形ヲ作レ。

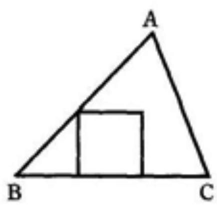


(49) 扇形ニ正方形ヲ内接セヨ。但シ一邊ハ半徑ト重リ頂點ハ弧ノ上ニアル如クセヨ。

最後に、平成 2 年発行の書籍からの作図問題を引用して例として示す。

【例 6】[11]

2.2　鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に 1 辺を置き、ΔABC に内接する正方形を作図する方法を 2 通り示せ.



ここで「2 通り」とは拡大と縮小（拡大率 $k(>0)$ が 1 より大と 1 より小）の 2 つの場合を表している。すなわち

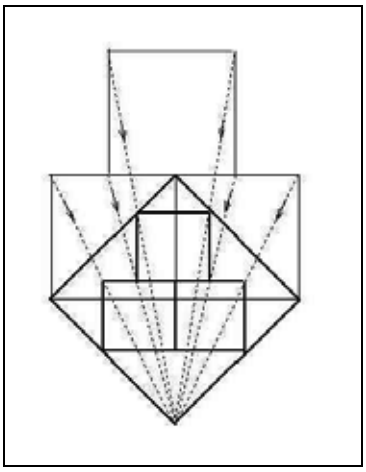
・三角形の内部に、正方形の 2 つの頂点は三角形の 1 辺上にあり、他の 1 頂点は三角形の他の 1 辺上にあるように正方形を描き、この正方形を拡大する。

・三角形の外側に、三角形の１辺と正方形の１辺が一致するように正方形を描き、この正方形を縮小する。

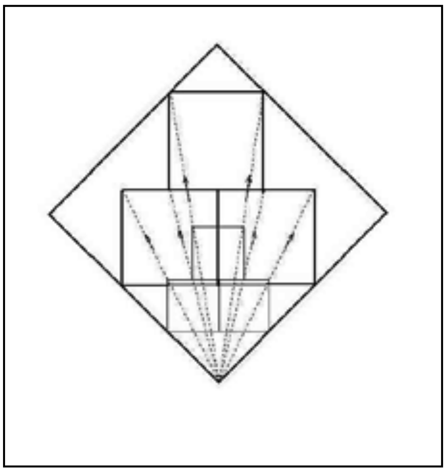
の２つの場合である。この【例 6】は先に示した問題 1、問題 2 と同類の問題であるから、問題１と問題２の解法も２通りあることになる。

以上のように問題１と問題２は昔から取り扱われてきた問題であるので、ここでは解法を示すことを省略することにする。問題３と問題４を複数の教員経験者に示したところ、作図の方針を想像ですることが多少難しい問題だとの意見をいただいた。本来、作図問題の解法は「解析」、「作図」、「証明」、「吟味」という一連の作業[12]で完結するものであるが､以下では問題３と問題４の「作図」の段階のみについてふれることにする。

問題３の作図法は説明を省略し、作図法のヒントとして次の２つの図を示すことにする。各人が作図法の説明を考えて欲しい。



縮小による方法

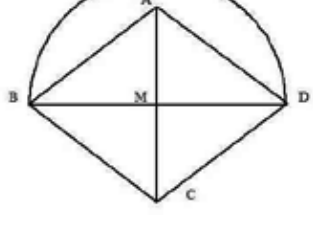


拡大による方法

問題４の二つの作図法を紹介する。記述のなかには証明を必要とすることもあるが、それらは省略して簡略な紹介とする。

菱形 ABCD の対角線 AC と対角線 BD の交点を M とする。さらに、対角線 AC の長さは対角線 BD の長さより短いと仮定する。

＊縮小による方法

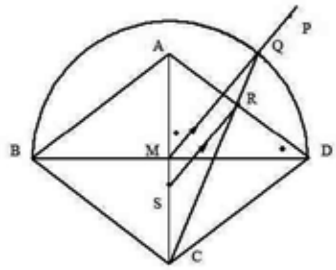


1）点 M を中心として半径 MB の半円を直線 BD に関して点 C と反対側[13]に描く。点 M は線分 BD の中点であるからこの半円は弧 BD と線分 BD（直径 BD）で構成されている。

AC ＜ BD より点 A はこの半円の内部

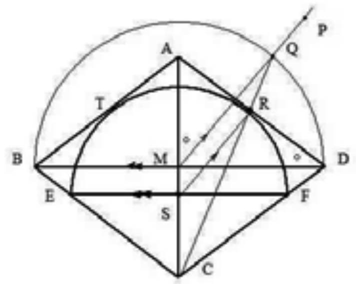
（弧 BD と線分 BD で囲まれた部分）にある。

2）直線 AC に関して点 D と同じ側[14]に∠AMP＝∠BDA を満たすように半直線 MP を描く。半直線 MP と半円との交点を Q とする。
　半直線 MP と辺 AD は直交することがわかる。



3）点 C と点 Q を結ぶ線分を描き辺 DA と交わる点を R とする。点 R を通り直線 MP に平行な直線を描き対角線 AC と交わる点を S とする。

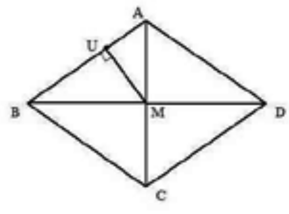
4）点 S を通り対角線 BD に平行な直線を描き辺 BC、辺 CD と交わる点をそれぞれ E、F とする。点 S を中心として半径 SE の半円を直線 EF に関して点 C の反対側に描く。この半円は辺 AB と点 T で接し、辺 DA と点 R で接し、辺 CD 上の点 F を通る。



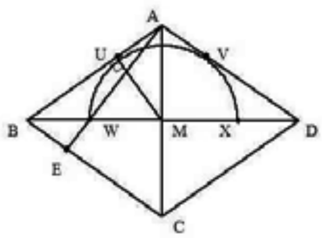
　半径 MB の半円 BD を縮小（点 C を基点とする）した図形が半径 SE の半円 CF である。言い換えると、円 EF は点 C を中心とする拡大率 $\frac{CF}{CD}$ (<1) の中心拡大[15]という相似変換による半円 BD の像である。

<u>＊拡大による方法</u>

1）点 M から辺 AB に直交する直線を描きその交点を U とする。
　MU⊥AB となるように点 U を定める代わりに、∠AMU＝∠ABM となるように U を定めてもよい。

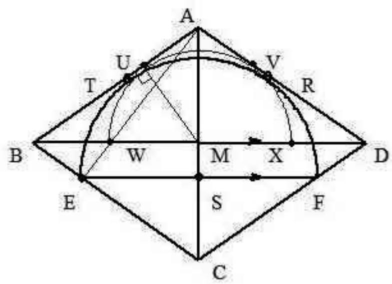


2）点 M を中心とし半径 MU の半円を直線 BD に関して点 C の反対側に描く。この半円は辺 DA と点 V で接し、直径 WX は対角線 BD 上にある。半直線 AW が辺 BC と交わる点を E とする。



3）点 E を通り直線 BD に平行な直線を描き、対角線 AC との交点を S、辺 CD との交点を F とする。点 S は線分 EF の中点である。

4）点 S を中心として半径 SE の半円を直線 EF に関して点 C の反対側に描く。この半円は辺 AB と点 T で接し、辺 DA と点 R で接している。



半径 MW の半円 WX を拡大（点 A を基点とする）した図形が半径 SE の半円 EF である。言い換えると、半円 EF は点 A を中心とする拡大率 $\frac{AE}{AW}$（>1）の中心拡大という相似変換による半円 WX の像である。

４．おわりに

具体例として示した問題 1、問題 2 は明治期以降の教科書で扱われ続けてきた基本的な作図問題と見なせるものである。問題 1、問題 2 は「拡大縮小法」あるいは「相似法」という方法で解答できるものであり、同様の解法で対応できる問題 3、問題 4 も現在の高等学校の学習、特に課題学習の教材として無理のないものであると思われる。これらの問題の提示は、生徒のみならず教師にも和算に興味・関心を持つ機会を与え、目の前の教科書や問題集にある問題とは異なる目新しい問題を提供するものである。

和算の図形問題を、単に解くだけではなく、「示されている図がどのようにして描かれたのか？」という視点で見ることは多様な見方・考え方をすることに通じるものであろう。

最後に、査読者から適切な表現に向けての多くのご指摘をいただきました。査読者へ感謝の意を表します。

注　引用・参考文献

(1) 文部科学省：「中学校学習指導要領解説　数学編　平成 20 年 9 月」、教育出版、平成 20 年、39 頁～40 頁を参照。
文部科学省：「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編　平成 21 年 12 月」、実教出版、平成 21 年、49 頁～50 頁を参照。

(2) 「算法天生法指南（さんぽうてんせいほうしなん）」は最上流（さいじょうりゅう）の創始者である会田安明（あいだ　やすあき）が文化 7 [1810] 年に刊行した和算書で、全 5 巻である。また、関流（せきりゅう）の大原利明（おおはら　としあき）も同年（文化 7 年）「算法点竄指南（さんぽうてんざん

しなん)」を刊行した。これら２つの和算書は初学者を対象としたもので、多くの人々に読み継がれていた。「算法天生法指南書籍」の巻之一と巻之二より取り上げた 4 つの問は「和算の館」の和算書アーカイブの画像を参照して記したものであり、図は書き直したものである。

(3) 文部科学省 :「小学校学習指導要領解説　算数編　平成 20 年 8 月」、東洋館出版社、平成 20 年、173 頁～174 頁を参照。

(4) 文部科学省 :「中学校学習指導要領解説　数学編　平成 20 年 9 月」、教育版、平成 20 年、116 頁～120 頁を参照。

(5) 文部科学省 :「中学校学習指導要領解説　数学編　平成 20 年 9 月」、教育版、平成 20 年、14 頁～17 頁を参照。
文部科学省:「高等学校学習指導要領解説　数学編 理数編　平成 21 年 12 月」、実教出版、平成 21 年、16 頁～17 頁を参照。

(6)「最新　高等数学 I　幾何編」、中等教育研究会　発行、183 頁より引用。昭和 31 年度使用。(宮城教育大学附属図書館所蔵書)

(7) 「数学の教室　数学 I （幾何)」、実教出版　発行、176 頁より引用。昭和 31 年度～昭和 34 年度使用。(宮城教育大学附属図書館所蔵書)

(8) 「数学の教室　数学 I （幾何)」、実教出版　発行、177 頁より引用。昭和 31 年度～昭和 34 年度使用。(宮城教育大学附属図書館所蔵書)

(9) 林鶴一　編著「新撰　幾何学教科書 (平面之部)」、開成館、明治 27 年初版、明治 45 年訂正 10 版　発行、194 頁～195 頁より引用。東北大学創立時の数学科教授の一人であった林鶴一の蔵書をまとめた「林文庫邦書目録」に記載されている中学校・師範学校数学科用教科書。(宮城教育大学附属図書館所蔵書)

(10) 広島高等師範学校附属中学校数学研究会　著「中等教育　平面　幾何教科書」、修文館、大正 14 年初版、大正 15 年訂正再版発行、279 頁より引用。「林文庫邦書目録」に記載されている師範学校・中学校数学科用教科書。(宮城教育大学附属図書館所蔵書)

(11) 那須俊夫「変換幾何入門」、共立出版、1990 年（平成 2 年）発行、42 頁より引用。那須俊夫は平成元年 12 月発行の「高等学校学習指導要領解説　数学編 理数編」の作成協力者の一人である。【例 6】（あるいは、【例 3】）はいくつかの県における教員採用試験の問題として採用されたことがあり、この問題は作図問題として基本的なものと言えるであろう。

(12) 秋山武太郎「新版　幾何学つれずれ草」、サイエンス社、1993 年初版発行。56 頁を参照。

(13) 小平邦彦 :「幾何のおもしろさ」、岩波書店、(数学入門シリーズ）昭和 60 年 ; (新数学入門シリーズ）平成 27 年、4 頁～7 頁を参照。

(14) 同上。

(15) 那須俊夫「変換幾何入門」、共立出版、1990 年（平成 2 年）発行、38 頁を参照。

A trial of practical use of Wasan in drawing geometrical figures

― based on problems in Wasan's book "Sanpou-Tenseihou-Shinan" ―

YOROZU Shinsuke

Abstract: We can change some problems in Wasan into problems of drawing geometrical figures (Sakuzu Mondai). Its examples are in Wasan's book "Sanpou-Tenseihou-Shinan ". Our purpose is to show these examples. We think Wasan is a good teaching material.

Key words: Problems of drawing Geometrical Figures,
Wasan, Sanpou-Tenseihou-Shinan.