秋田大学教育文化学部研究紀要　教育科学部門　72　pp. 43 ～ 49　2017

数学教育における教材開発の研究Ⅴ

― 発展的に考える授業の展開を視点にした小学校算数第６学年「扇形の面積」の考察 ―

佐藤　　学・重松　敬一・赤井　利行・杜　　威・新木　伸次・椎名美穂子

Development of teaching materials in the study of Mathematics V

－ A Consideration of Area of a Sector making Students consider in Developing Way －

SATO, Manabu; SHIGEMATSU, Keiichi; AKAI, Toshiyuki; Du, Wei; ARAKI, Shinji; SHIINA, Mihoko

This research is examining the meaning of 'Developing Way'. Especally, in this paper, we consider it from the purpose of structuring the math.

In conclusion, this meaning of mathematics to make students consider in 'Developing Way' is named to be 'Structured Development' which was classified into "Integration" "Generalization" and "Concise and Clear".

Finally, we considered the teaching and learning processes of the topic of Area of a Sector from the structured development.

Key Word : Structured development, Integration, Generalization, Concise and Clear

Ⅰ　はじめに

佐藤・他（2016）は，発展的に考えることについて教師の意識の実態調査を行い，「発展的に考える授業についての理解が十分でないこと」が，発展的に考える授業展開の構築を阻む要因となっていることを指摘している。

そこで，本稿では，発展的に考える授業についての教師の理解を図るため，発展的に考えることの意味を検討する。また，実際の授業実践を考察し，その様相の特徴を明らかにする。

Ⅱ　発展的に考える授業展開の視点

１　発展的に考えること

「審議の取りまとめ」（算数･数学ワーキンググループ，2016）によると，「各教科においては，育成を目指す資質･能力の三つの柱を明確化し，深い学びにつなげていくことが求められているが，その際，各教科の特質に応じた「見方・考え方」が重要である。」という考えのもと，平成 29 年改訂の学習指導要領では，教科目標を，総括目標と資質・能力の三つの柱に対応する具体的目標から構成されると推察できる。註１そして，算数・数学の特質に応じた「見方・考え方」は，小・中学校においては，昭和 33 年改訂（小学校：文部省，1958a。中学校：文部省，1958b）を起点とする「数学的な見方・考え方」であり，「『数学的な見方・考え方』を働かせながら，知識・技能を習得したり，習得した知識・技能を活用して探究したりすることにより，生きて働く知識の習得が図られ，技能の習熟・熟達にもつながるとともに，より広い領域や複雑な事象を基に思考・判断・表現できる力が育成される。このような学習を通じて，『数学的な見方・考え方』がさらに成長していくと考えられる。（下線は筆者らによる）」とその重要性に言及しており，数学教育の立場（日本数学教育学会，2007）とも軌を一にしていると確認できる。

「数学は人間が創造し，創造し続ける宇宙（Universe）である」（文部科学省，2002）という言葉にみるように，数学は，絶えず，深まりと広がりを求め発展してきた。この精神は，数学の発展を担う数学者に限るものではない。人間が幸せを希求し繁栄を築こうとするならば，常に現実の知を固定的に捉えず，絶えず，発展的に考える姿勢が必要である。人間教育の一翼を担う教科の責務について，算数･数学の学習は，児童生徒にとっての算数･数学を，児童生徒自身が発展させていく姿によって応えることができる。

２　発展的に考える授業展開の視点－構造的発展－

清水（言語力育成協力者会議，2006）は，算数・数学の学びについて数学者の数学観に学ぶと論じる中で，

ポアンカレの「数学はいろいろの異なるものに同じ名前を与える芸術である」を引用し，「数学はものごとを発展的，統合的にみてより簡潔・明瞭・的確なものを求め続ける態度に支えられている（下線は筆者らによる）」と述べている。算数・数学の学習指導を考えると，個々の内容をバラバラに存在させることなく，全体としてのまとまりをもち，それぞれが密接に関連し合うようにすることが大切である。例えば，整数の加法は，全体的な概念として，ａ＋ｂ＝ｃがあり，数の世界を１位数，２位数，３位数，小数，分数と広げていく。１位数から２位数に広げる際も，２位数を 10 を単位としたまとまりで見ることや，十の位と一の位と構成的に見ることが必要となり，数の学習と計算の学習とが密接に関連している。

このように算数・数学の学習を構造化していく授業を考えるとき，まずは「統合」が挙げられる。

(1)　統合

中島（1982a）は「算数・数学の場合には具体的にどんな方向であるべきかを示す観点（価値観）の代表的なものとして，『統合』ということをあげている」と，発展的に考えるときの方向性として「統合」の視点を挙げている。

さらに，中島（前記）は，「統合」の意味を，「集合による統合」，「拡張による統合」，「補完による統合」の３点から整理している。

「集合による統合」とは，「はじめは，異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合」（中島，前記。下線は筆者らによる）としている。例えば，加法は，合併と増加の意味から指導するため，児童にとっては「あわせていくつ」，「ふえるといくつ」と２つの加法が存在すると認識してしまう。それを，式表示によって「加法」と１つにまとめて見ることができる。本研究でも，これを「集合による統合」として扱う。

「拡張による統合」とは，「はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合」（中島，前記。下線は筆者らによる。）としている。例えば，「整数×整数」では，被乗数と積の関係は「被乗数＜積」となるが，「整数×小数」では「被乗数＞積」となる場合がある。そのため，児童は「整数×整数」と「整数×小数」は別々の乗法であると認識してしまう。しかし，倍関係に着目することで同じ乗法と１つにまとめて見ることができる。本研究でも，これを「拡張による統合」として扱う。算数・数学の学習において広く行われているものであり，算数・数学の学習に系統性をとらえる根拠であり，重要な働きをもつ。

そして，「補完による統合」とは，「すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，『完全になる』ようにまとめる場合」（中島，前記。下線は筆者らによる）としている。例えば，演算の関係に着目して，除法を，乗法を「逆算」として乗法にまとめて見ることができる。

「集合による統合」，「拡張による統合」，「補完による統合」は，「新しく特別のことを考えるというよりは，日常の指導でつねに行われているべきである」（中島，前記）として，学習指導要領や教科書の内容，一般的な指導の中に埋め込まれていたと考える。しかし，「系統性」という言葉のもと，「統合」という視点で，日常的に，意図的に指導されていたかといえば，佐藤・他（前記）[註2]の結果から見て十分ではなかったと考える。したがって，児童生徒が統合することを意図して発展的に考えることができるようにしていく必要がある。

(2)　一般化と簡潔・明瞭

中島（1982b）は拡張と同義で用いる一般化と区別して，「理解の一般化」を挙げており，「そのことがらが適用される範囲（集合）の中で，どの数値（要素）についても，それが該当することをつかみ確かにする点にねらいがある」としている。例えば，整数の減法では，求残の意味について学習する際，中心問題としては「５－２」の問題場面を扱って終わることはしない。必ず，「８－３」や「６－２」の問題場面もあわせて扱い，それらに共通する求残の意味を一般化してとらえるようにしている。つまり，一般的なこととしてつかみ，「構造」をとらえる。

Dörfler（1991）は，一般化を内包的一般化と外延的一般化からとらえて，その重要性を明らかにしている（図１参照）。また，渡会（2015）は，問題解決時または問題解決後において，きまりや性質の適用範囲を拡げる際には条件の一部を一般的なものへと変更するため外延的一般化が，数学的なアイディアや知識のつながりを見いだす際には要素や要素間の関係，解法などに着目する視点を変えるため内包的一般化が緊密な関係にあるとしている。

外延的一般化において条件の一部を一般的なものへと変更することも，内包的一般化において要素や要素間の関係，解法などに着目する視点を変えることも，算数・数学が一般化に向けて，「よりよいもの，より美しいもの，より正しいものを求める」という人間の精神（澤潟，1961）が根底にあり，数学はもとより，数学教育でも，簡潔，明瞭という視点で，形式や論理の簡潔さ，明瞭さを求め続けてきたものである。例えば，線対称な図形で

は，身近な形に線対称という規則性に気づき，弁別をはかる。しかし，この状態では線対称な図形とそうでない図形とに弁別しただけであり，具体的な図形をもって線対称の意味を説明しなくてはならない。そこで，線対称の意味をより簡潔で，より明瞭なものとして「１つの直線を折り目にして折ったとき，折り目の両側がぴったり重なる図形」と内包的に一般化するのである。さらに，内包的に一般化したことをもとに，再度，身近な形に戻り内包的に一般化したことを様々な図形にあてはめて検証し，内包的に一般化したことを外延的一般化により精密化していくのである。簡潔さ，明瞭さが満足できるものか――それは，内包的一般化に収束するのではなく，再度，外延的一般化に戻ることで実感できる。したがって，簡潔さ，明瞭さを追求するため，「外延的一般化→内包的一般化→外延的一般化→内包的一般化→…」と絶えず，一般化する流れがあるともいえる。その意味で，図１には，フィードバックする流れを加えている。

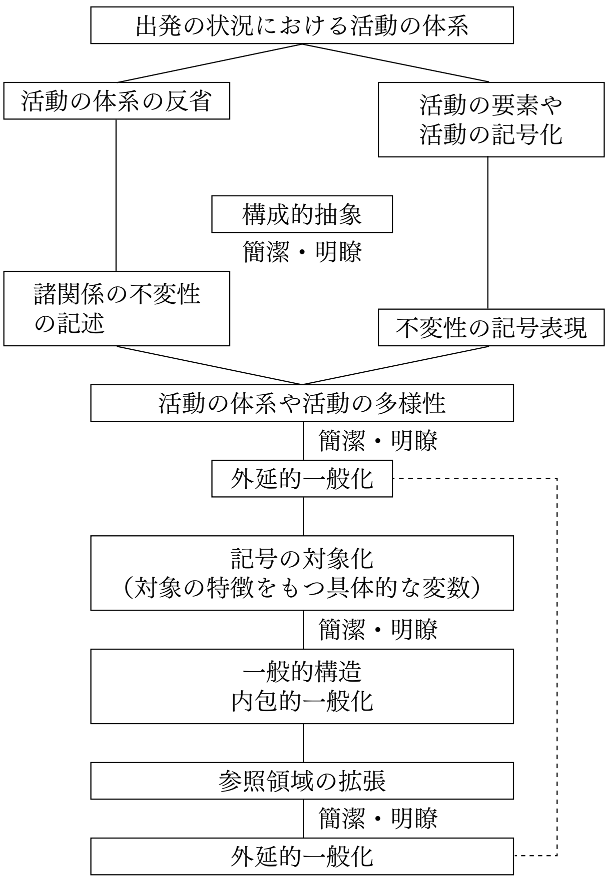

図１
（Dörfler の図に筆者がフィードバックする流れ（点線），「簡潔・明瞭」を加えた）

これまでの考察をまとめると，発展的に考える授業の視点として，「統合」，「一般化」，「簡潔・明瞭」に整理できることを明らかにした。これらは，算数・数学を構造化することを目的にする。そこで，本研究では「構造的発展」と呼ぶことにする。

Ⅲ　授業実践とその考察

１　授業実践の概要

授業実践は，2016 年９月７日に国立Ａ大学附属小学校において実践された「扇形の面積」を取り上げる。指導者は，国立Ａ大学の教員養成系学部数学教育専攻２年次の教育実習生Ｂである。

授業実践を行った学級Ｃの児童数は，33 名である。第６学年「円の面積」の指導は,「円の面積の見当付け」,「円の概測」,「円の面積の求め方」,「円の面積公式」と展開し，既習の図形に帰着して円の面積の求め方や公式を理解することが主なねらいであり，授業実践の「扇形の面積」は，その発展的な扱いとなる。

２　教師の言語行動

重松（1990）は,「算数・数学のメタ認知は，児童・生徒にとって教師となる者（学校教育では教師, 時には, 友人，自分であることもあり，家庭，社会では各々の教師的存在の人）の影響が内面化することによって形成されていくとみることができる」と述べている。また,「数学的実践，教師の手立て，数学的な信念と社会数学的規範は緊密な関係がある」（林，2007),「問題解決指導における生徒のコントロール能力には教師の役割が重要である」（國井，2008）の指摘もある。これらは発展的に考えることについての情意とは異なるものの見解であるが，児童生徒が発展的に考えることについても，教師との関わりにおいて，算数・数学を学習することを児童生徒は学習していることから, 類似の影響があると考える。

発展的に考えることについての教師の理解が十分でない現状を踏まえると，教師の意識が反映する言語行動に注目することは，児童生徒が発展的に考えるようになることのアプローチの１つになりうると考え，本稿ではこれを考察の対象にした。

３　授業実践の実際

授業実践は, 前時に学習した面積公式の復習で始まり, 中心角が 90°の扇形（半径 10cm）を求めるという本時の中心問題（後述の議論に関わり，問題Ａとする）が提示された（図２参照)。問題Ａの提示について，授業者からその意図の説明はなかった。

児童は，次の２つの式から求積した。

ア．$10 \times 10 \times 3.14 \div 4 = 78.5$

イ．$10 \times 10 \times 3.14 \times \dfrac{1}{4} = 78.5$

ア，イのいずれの式も「10 × 10 × 3.14」の部分があり，扇形は円の一部であるととらえていることが読み取れる。ただし，自力解決においてはこれに当たる発話は見られなかった。

ア，イのいずれも正しく求積していることを確認した後，続いて，中心角が60°の扇形（半径15cm）を求めるという問題（後述の議論に関わり，問題Bとする）が提示された（図１参照)。問題Bの提示について，授業者からその意図の説明はなかった。

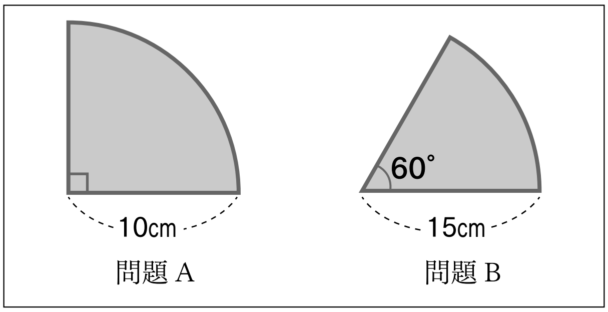

図２

問題Bの解決は，３～４人で編成するグループによって行われた。問題Aと同様に問題Bの扇形も円の一部ととらえた児童も見られたが，円の一部ととらえていない児童も少なくなかった。中心角の大きさが不明であったことも，これらの児童の思考を円滑にしなかったと考えるが，中心角の大きさが60°と明らかになっても，円の一部であることに気付かない児童が見られた。こうした児童は，円の一部ととらえた児童から曲線をかき加えるという支援を得て，円の一部であるととらえるに至っていた。ウ，エの２つの式から求積した。

ウ．$15 \times 15 \times 3.14 \div 6 = 117.75$

エ．$15 \times 15 \times 3.14 \times \frac{1}{6} = 117.75$

ウ，エのいずれも正しく求積していることを確認した後，２つの式について検討を行った。授業者は，イの式とエの式を取り上げ，２つの式に「10 × 10 × 3.14」，「15 × 15 × 3.14」の共通部分があること，イの式には「$\times \frac{1}{4}$」とエの式には「$\times \frac{1}{6}$」と異なる部分があること，これらは円の中心角である360°に対する扇形の中心角の大きさの割合を示していること，一般化すると「円の面積 $\times \frac{\text{扇形の中心角}}{360^\circ}$」にまとめられること，の順で学習は展開していった。ここで授業開始より45分となり，授業は終了した。

２　構造的発展の様相

（1） 問題となる図形を考える，またその図形の求積方法を考える【集合による統合】【簡潔・明瞭】

中心角が90°の扇形の求積という中心問題は，授業者より提示されたが，授業実践の児童は直ぐにア，イの式を立てることができていた。また,曲線の形状 は第３学年「円と球」の学習でも図３に示すような模様をコンパスでかく経験をしている。したがって，曲線の美しい図から円を見つけやすく，その曲線の軌跡をもとに円の中心，半径を見い出しやすく，困難ではない。

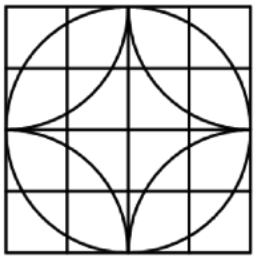

図３

もっとも，基本図形の求積に関する学習はどのように進めてきたか，その学習履歴からも問題となる図形を考えることは自然である。

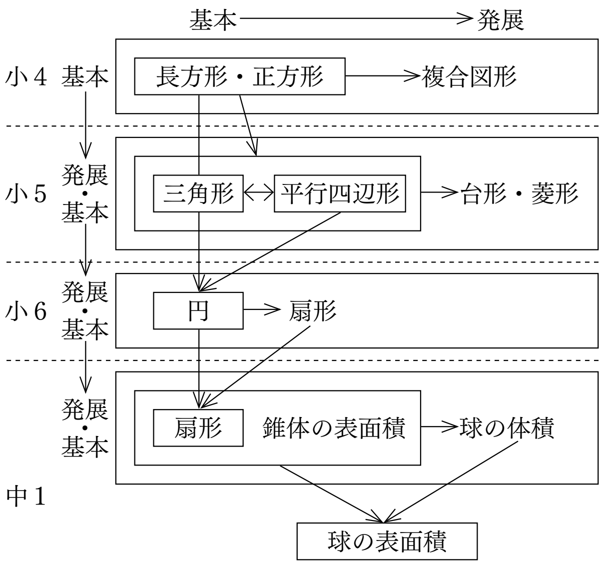

図４

図４は，面積の指導で取り上げる図形の系統を示したものである。第４学年で長方形・正方形の求積で導入した後，長方形・正方形の面積公式を使って求めることが可能な複雑な図形（L字型複合図形）へと展開する。つまり，長方形・正方形の面積公式を基本に，L字型複合図形という発展につながっている。第５学年では，基本を長方形・正方形の面積公式として，三角形，平行四辺形の求積へと発展，第５学年でも三角形，平行四辺形の求積公式を基本に，台形・ひし形の求積へと発展とつながっている。常に，基本→発展・基本→発展・基本→…と展開している。そこで，「三角形や平行四辺形の面積の公式をつくった後，次にどんな学習をしたか思い出して【振り返り】，円の面積の公式を学習した後はどんな

ことに取り組んでみたいか【発展】」と問い，円の面積公式を使える図形を考えたり，その求積方法を考えたりするきっかけをつくることができる。これは，円の面積公式を共通の観点にして１つのものにまとめみることから，「集合による統合」である。そして，「円の面積公式を共通の観点にして１つのものにまとめみようとする」ことは，「簡潔・明瞭」でもある。もちろん，前時に「どんなことに取り組んでみたいか」と問うこともできる。このとき，取り組みたいことを漠然としたままにしないよう，そのように考えた根拠も問うことが必要である。また，授業実践のように展開した場合は「前の学習より考えを進めたところは何か【振り返り】」や「この学習は，前の学習と同じところはあったか【振り返り】」と問うことができる。後者の場合も，漠然と新しいことに取り組んで終わりにしないよう，統合という視点に立って学習を考えたり，振り返ったりすることが必要である。

(2) 中心問題の求積方法をもとに，異なる中心角の扇形を考える，またその図形の求積方法を考える【一般化】

中心問題の解決に続いて，中心角が 60° の扇形を求積する展開となったが，問題Ｂの提示は授業者からの提示であった。中心角が 90° の場合と 60° の場合と取り上げることにより，扇形の求積方法を一般化してとらえられるようにするという授業者の意図を読み取ることができる。それならば，「中心角が 90° の扇形の面積は求めることができたけど【振り返り】，扇形の面積はいつもこのように求めることができるか，他の中心角の場合（扇形の面積）も調べる必要はないか【発展】」と問うことにより，児童の側から考察の対象を，中心角が 90° の場合だけでなく，中心角が 30° や 60° や 120° の場合の扇形にまで広げていくことができる。これは，特殊な事象から類似の事象にまで考察する対象を広げていくことから，「外延的一般化」である。そして，外延的一般化から公式や規則性という「内包的一般化」へと考えを進める。その際，簡潔・明瞭」の視点も必要である。

ただし，児童がこのように「30°→ 60°→ 90°→ 120°→…」と動的に角をとらえて考えようとするのは，しかけが必要と考える。授業者が授業を構想するため参考にした教科書（坪田・他，2015）の記述では，解決の着想として「この図形は，半径が 10cm の円の<u>何分の１にしたもの</u>でしょうか」，「この図形の面積は，半径が 15cm の円の面積の<u>どれだけにあたる</u>でしょうか（下線は筆者らによる）」を示しており，扇形を円の面積を等分して考える傾向にある，または，そのようにして考えることが理解しやすいことを示唆していると考えられる。

したがって，「他の中心角の場合（扇形の面積）も調べる必要はないか【発展】」と問うた後，動的に角をとらえることが円滑にできるよう，児童が思いついた角を順序立てて板書することが考えられる。また，動的な角をとらえることに気づいた児童に，そのように考えた閃きの背景や，そのように調べてどのようなことを考えたいとしているか註3を問い，規則的に考えようとすることを奨励することが大切である。

(3) 中心角の異なる扇形の求積公式を見比べ，円の面積公式考える，またその図形の求積方法を考える【一般化】【簡潔・明瞭】【拡張による統合】

授業実践の終盤では，イの式とエの式，そして円の面積公式と比較・検討がなされ，扇形の求積公式にまとめられた。それぞれの求め方をバラバラに存在させて終えるのではなく，数量の関係を一般的にとらえられるよう公式化を行っている。「10 × 10 × 3.14」と「15 × 15 × 3.14」が円の面積公式で共通すること，「$\times\frac{\text{円の中心角 }360^\circ}{\text{円の中心角 }360^\circ}$」も共通することは，「外延的一般化である。また，共通部分を見ようとしていることは，形式に対する「簡潔・明瞭」でもある。その結果，導き出された公式が「内包的一般化」である。このとき，「２つの面積を求める式を見て，共通するところはありますか」と問うこともできるが，一般化につながるきっかけを喚起するようにしたい。そのためには，中心角が 90° と 60° の場合の扇形だけでなく，中心角が 30° や 120° の場合も考察の対象にしていく，または考察の対象にしなくとも公式化ができるという「簡潔・明瞭」の視点が必要である。

一方，円の求積公式を扇形の求積に適用できるようにするため，扇形の「$\times\frac{\text{円の中心角 }360^\circ}{\text{円の中心角 }360^\circ}$」の部分が省略されたものと見れば，円の求積公式を扇形の求積公式にまとめることができる。そのためには，扇形の求積公式にまとめた後，「扇形の求積公式において $\times\frac{\text{扇形の中心角}}{360^\circ}$ とまとめたけど【振り返り】，円の求積公式も同じように表すことができないか【発展】」と問う。または「扇形の面積公式と円の面積公式と２つも覚えるのは大変ではないか」と問うこともできる。これは，「拡張による統合」である。

(4) 振り返りと教師の発する言語行動

（1）～（3）に示した発展については，基本と発展のつながりをとらえることが重要である。児童生徒にとっては，基本と発展がどのようにつながるかを考えることの以前に，発展とつながる基本を過去の学習から探り出すことさえ難しい。そこで，発展とつながる基本を過去の学習から探り出す作業を，児童生徒が円滑に的確にで

きるようになるまでは，教師が代行することも必要であり，それが「振り返り」の提示である。

Ⅳ　今後の課題

発展的に考える授業についての理解を図るため，発展的に考えることの視点を，算数・数学を構造化するという目的から検討し，「統合」「一般化」「簡潔・明瞭」に整理できること，これらは「構造的発展」としてまとめられると考えている。そして，実際の授業実践を考察し，その様相の特徴を教師の言語行動によって明らかにした。参考にした授業実践からの考察の範囲では，問題解決過程において「一般化」の視点が，問題解決の結果を得た状況において「統合」の視点が有効であり，「簡潔・明瞭」は一貫して有効であるとの考えに至った。（図５参照）

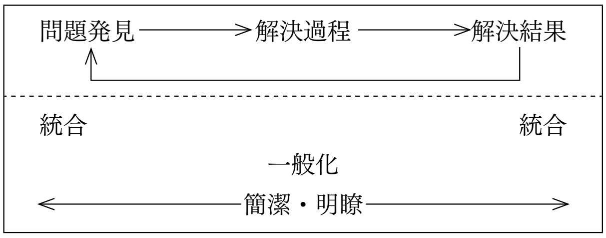

図５

今後は，導出した「構造的発展」の妥当性と様相の類型化を精密化するため，引き続き授業実践の考察を進めていくことが必要である。

◆

本稿は，６名による共同研究である。赤井，杜，新木，椎名の５名は第２章と第３章を担当した。佐藤，重松は，全ての章を担当した。

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 15K04390 の助成を受けたものです。

末筆となりましたが，本執筆のきっかけを与えてくださった，秋田大学教育文化学部理数教育コース２年次学生の飯沢怜央さん，秋田大学教育文化学部小学校教諭の平塚定先生に心より感謝申し上げます。

註

1　算数・数学ワーキンググループにおいて主査代理を務めた清水（2016），「育成すべき資質・能力は，昭和 40 年代の数学教育現代化の思潮を受けて改訂された際の教科目標の構造と同じく，総括目標と具体目標の二重構造で整理される方向である」と述べている。

2　佐藤・他（前記）の行った調査によると，発展的に考えている児童生徒のイメージは，「活用する（小学校：31.3％，中学校：20.0％）」，「意欲的である（小学校：24.7％，中学校：18.0％）」，「多様に考える（小学校：20.3％，中学校：18.0％）」の順で多く，「既習と関連付ける（小学校：13.2％，中学校：12.0％）」，「条件・観点を変える（小学校：6.6％，中学校：8.0％）」，「問題をつくる（小学校：12.1％，中学校：2.0％）」の反応率は上位でなかった。また，発展的な問題の提示の具体例については，「数と計算（小学校:12.6％）」，「数と式（中学校：28.0％）」，「量と測定（小学校：16.5％）」，図形（中学校：24.0％）」の反応が見られる一方，「無解答」の反応率（小学校：55.5％，中学校：34.0％）が高かった。指導方法の工夫の具体例についても「無解答」の反応率（小学校：68.1％，中学校：42.0％）が高かった。

3　扇形の中心角を 30°，60°，90°，120°，…と規則的に調べていくことにより，扇形の中心角とその面積が比例関係にあることを見つけることができる。比例関係にあるものという視点で，これまで学習してきた比例の事象と同じ集合でとらえることができる。

文献

佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次（2016）：「発展的に考えること」の指導に関する教師の意識に関する調査」，全国数学教育学会第 43 回研究発表会，発表資料

教育課程部会算数・数学ワーキンググループ（2016）：算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて（報告）
＊ http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/1376993.htm（2016/11/1 確認）

文部省（1958a）：小学校学習指導要領

文部省（1958b）：中学校学習指導要領

日本数学教育学会（2007）：算数教育指導用語辞典（第三版），教育出版，p.38

文部科学省（2002）：個に応じた指導に関する指導資料―発展的な学習や補充的な学習の推進（小学校算数編），教育出版，p.10

清水静海（2006）：算数・数学の学びと言語力の育成－「筋道を立てて説明する力」に焦点を当てて－，言語力育成協力者会議（第１回）配付資料
＊ http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/036/shiryo/06061520.htm（2016/11/1 確認）

中島健三（1982a）：算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－，金子書房
＊本稿は，次の学術図書の復刻版から引用した。
中島健三（2015）：復刻版算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－，東洋館出版社，pp.125 ～ 172

中島健三（1982b）：前記 1982a と同じ，pp.136 ～ 149

渡会亮介（2015）：数学教育における一般化に焦点を当てた発展的な考え方を促すための指導，イプシロン，vol.57，pp.179 ～ 184

Dörfler.W.（1991）：Forms and Means of Generalization in Mathematics，Bishop,A.J.（ed.），Mathematical Knowledge：Its Growth Through Teaching，Kluwer Academic，pp.63 ～ 85

澤潟久敬（1961）:「自分で考える」ということ，文藝春秋社，p.49