

研究報告

量子論における摂動展開と非摂動量子効果の不思議な関係 ~Resurgence 展開と複合ソリトン配位~

三角樹弘^{**}

Relation between Perturbative and Instanton Calculations in Quantum Theories

Tatsuhiko Misumi^{**}

Abstract

The purpose of this work is to investigate the relation between perturbative calculation and non-perturbative physics in quantum theory. For this purpose, we calculate multi-instanton amplitudes in Sine-Gordon quantum mechanics by integrating out quasi-moduli parameters corresponding to separations of instantons and anti-instantons. We propose a proper extension of the prescription of Bogomolny and Zinn-Justin for multi-instanton configurations and the appropriate subtraction scheme. We obtain the multi-instanton contributions to the energy eigenvalue of the lowest band at the zeroth order of the coupling constant. For those with both instantons and anti-instantons, we obtain results with imaginary and ambiguous parts depending on the path of analytic continuation. We show that the imaginary parts of multi-instanton amplitudes precisely cancel the imaginary parts of the Borel resummation of the perturbation series. This result supports the conjectured resurgence structure, in which the combination of perturbative and instanton calculations could lead to a novel definition of the quantum theories including quantum field theory.

1. はじめに

2015年はアインシュタインが一般相対性理論を提唱して100年目にあたり、世界各国で多くの式典・イベントが催されている。一方、20世紀物理学のもう一本の柱である量子力学についても100年前には革命的進展が起りつつあった。

1913年、後に量子物理学の父と呼ばれることになるニールス・ボーア（1885-1962）が量子論の先駆けとなる方法論「ボーアの量子化条件」に基づいて、水素原子の離散的エネルギースペクトルの説明に成功した。この条件によると、陽子の静電ポテンシャル中を運動する電子の作用積分はプランク定数（ $h \approx 6.63 \times 10^{-23}$ [Js]）の整数倍の値しか取れない。その後、量子論における粒子と波の「二重性」が明らかになるにつれ、この条件は水素原子中で波として振る舞う電子が定常波を作る条件を意味することが明らかになった。

その後、ハイゼンベルク、シュレディンガー、ディ

ラックによって量子力学の定式化が確立され、ヒルベルト空間における状態ベクトル或いは演算子行列の時間発展こそが量子現象の本質であり、一度ハミルトニアンが分かれば対角化により固有ベクトルが得られ、その時間発展がユニタリー発展として一意に決定することが理解された。ここで量子力学における唯一の物理量は期待値(状態ベクトルと演算子行列から作られるノルム)であり、固有状態にある場合を除いて、確率的にしか観測量を予言出来ないことも詳らかになった。

20世紀中頃には量子論の異なる定式化として、作用に関する汎関数積分を全ての経路について実行することで物理量の期待値を求める「経路積分法」がファインマンによって提唱された。また電磁場など全空間点に定義される「場」と呼ばれる物理自由度に関する量子力学、いわゆる「場の量子論」が発展し、特殊相対論と量子力学の統合が進んだ。これらの比較的新しい量子論の定式化は数学的に厳密なものではないが、現代物理学の発展を支える重要な手法となっている。

本研究では、量子論の根幹に関わる基礎的な問題でありながら、未だ完全な理解には至っていない

2015年7月27日受理 ^{**}秋田大学大学院工学資源学研究所・理工学部数理科学コース, Graduate School of Engineering and Resource Science, Mathematical Science Course, Akita University

「摂動計算と非摂動計算（インスタントン効果）の関係」に着目し、摂動計算のボレル和に現れる不定性と複数インスタントン配位から生じる不定性の相殺について議論を行う。特に、無限個の古典真空を持つ場の量子論を念頭に置いて、同様の真空構造を持つSine-Gordon型量子力学に注目する。

2. 問題の背景

2.1 量子力学における摂動論

さて、量子力学は古典力学と同様に厳密に解ける問題は限られている。一方、可解つまり対角化可能なハミルトニアンに小さな摂動部分が加わった形式の場合には、その影響を逐次的に計算することが可能である。例えば可解である調和振動子型ポテンシャル $-x^2/2$ に x^4, x^6 などの摂動ポテンシャルが加わったとする。この場合のハミルトニアンは以下のように書ける。

$$H = H_0 + \lambda H_{pert} \quad (1)$$

ここで H_0 は調和振動子ハミルトニアン、 H_{pert} は摂動項であり x^4 以上の偶数次数の項であれば何でも良いとする。摂動計算とは係数 λ （以下結合定数）による級数展開であり、 λ が小さい場合のみ有効とされる。具体的には、例えば最低エネルギー準位 $E_{0,pert}$ を考えると、ゼロ次の値を調和振動子の固有値（ $a_0=1/2$ ）として、

$$E_{0,pert} = \sum_{q=0}^{\infty} a_q \lambda^q \quad (2)$$

のように書ける。この級数和はあくまで次数の小さい場合にのみ有効な近似級数つまり漸近級数であり、ほとんどの量子系で係数が階乗的 $a_q \approx q!$ に発散し収束半径はゼロになる。

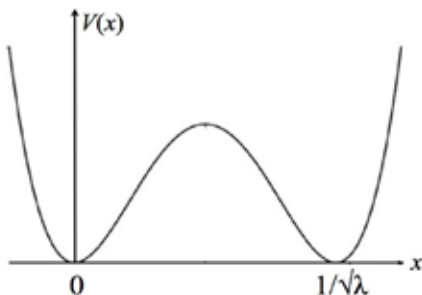


図1 double-well型ポテンシャルの例

例として図1に示したdouble-well型ポテンシャルを考えてみよう。このときハミルトニアンは

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} x^2 (1 - \sqrt{\lambda} x)^2 \quad (3)$$

で与えられる。これは $\lambda \rightarrow 0$ の極限で調和振動子ハミルトニアン H_0 に帰着する。この系の最低エネルギー準位に関する $x=0$ 周りでの摂動展開はよく知られており⁽¹⁾

$$E_{0,pert} = \frac{1}{2} - \lambda - \frac{9}{2} \lambda^2 - \frac{89}{2} \lambda^3 - \frac{5013}{8} \lambda^4 - \dots \quad (4)$$

と与えられる。確かに、0次は調和振動子のエネルギー準位 $E_n=1/2+n$ を反映し、その後係数が階乗的に大きくなっていく様子も分かる。このような摂動計算は、結合定数が十分小さい場合 ($\lambda \ll 1$) に片方のポテンシャルの底からの量子揺らぎを見るには有効だが、縮退した古典真空間のトンネル効果を含めた非摂動的な量子効果は解析出来ない、というのが教科書的な摂動論の理解である。実際、発散する級数から一般の λ での物理情報を取り出すことは困難に見える。

2.2 ボレル変換とボレル和

実は、このような発散する級数和であっても、ボレル変換⁽²⁾と呼ばれる方法によって形式的に有限の収束半径を持つ級数に書き直す事が可能である。式(2)に対するボレル変換は

$$BP(t) \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_q}{q!} t^q \quad (5)$$

と与えられる。ここで t はボレルパラメータと呼ばれる λ に代わる級数パラメータである。この変換は a_q が以下の条件⁽³⁾ (Gevrey class-1) を満たす場合に適用可能である。

$$|a_q| \leq C q! \left(\frac{1}{A} \right)^q \quad (6)$$

$C, A \in \mathbb{R}$ はそれぞれ適当な実数とする. double-wellなど一般の量子系ではこの条件が満たされている. ボレル変換はそれ自体は物理量を表さないが, 発散級数和という扱いにくい級数和を取束する級数和に変換することで諸々の解析を可能にし, ポテンシャル底周りで量子揺らぎ以上の情報を抽出する可能性を与える. 特に, ボレル変換 $BP(t)$ の変数 t を複素数に拡張し, 複素平面上 (以下ボレル平面) での関数と看做すと, 多くの量子系でボレル平面上に特異点が表れる (図2, 図3参照). この特異点の位置は理論によって様々である. 問題は, このようなボレル変換からどのようにして元の理論の物理量を取り出すか, ということである. この目的のために, ボレル和と呼ばれる一種の逆変換を考える.

$$B(\lambda) \equiv \int_0^\infty dt \frac{e^{-t\lambda}}{\lambda} BP(t) \quad (7)$$

このボレル和は, ボレル平面上に特異点が存在せず和と積分の順序を替えられる場合には元の級数和をそのまま与える. 一方, この変換はボレルパラメータ t の正の実軸上の積分を含むため, 特異点が正の実軸上に存在する場合には問題が生じる. 逆に, もし特異点が正の実軸以外に存在すれば積分を実行可能である. 例えば, 摂動級数が以下のような交代級数で与えられる場合を考えよう.

$$P(\lambda) = C \sum_{q=0}^{\infty} q! \left(\frac{-\lambda}{A} \right)^q \quad (8)$$

C, A は式(6)と同様とする. ここでボレル変換は

$$BP(t) = C \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{A} \right)^q = \frac{CA}{A+t} \quad (9)$$

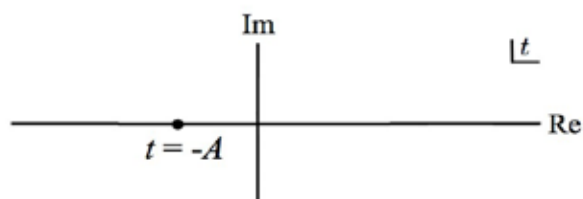


図2 ボレル平面の負実軸上に特異点がある場合

となり, ボレル平面上の特異点は負の実軸上に存在することがわかる (図2参照). この場合, ボレル和における $[0, \infty]$ 間の積分は問題なく実行可能であり, 摂動級数からは読み取れなかった情報がボレル変換・ボレル和を通して読み取れるようになる. 実際, 摂動展開が交代級数になり, ボレル和がうまく働く場合は少数だが存在する. 例えば, 調和振動子ポテンシャル $-x^2/2$ にさらに x^2 型のポテンシャルを加えたものは, 調和振動子のパラメータを変化させただけなので当然厳密に解ける. ここで, あえて加えた x^2 ポテンシャルを摂動項として扱って, 摂動計算とそれに続くボレル変換を行うと, 負の実軸上にのみ特異点が表れる⁽¹⁾. 従って, この例はボレル変換に基づく処方が適切に働く例となっている.

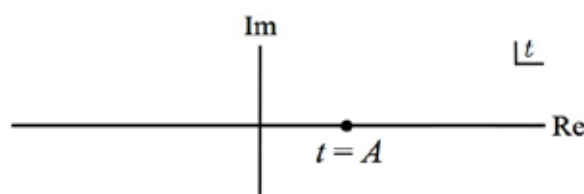


図3 ボレル平面の正実軸上に特異点がある場合

一方, 摂動級数が交代級数でない場合, このボレル和の処方はうまく働かない. 例えば図1のように複数の縮退した古典真空が存在する double-well ポテンシャルがその例であり, 摂動計算によって異なる古典真空の情報を抽出することの困難さを示している. 交代級数でない場合の摂動級数と対応するボレル変換は大まかに以下の様に与えられる.

$$P(\lambda) = C \sum_{q=0}^{\infty} q! \left(\frac{\lambda}{A} \right)^q \quad (10)$$

$$BP(t) = C \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{t}{A} \right)^q = \frac{AC}{A-t} \quad (11)$$

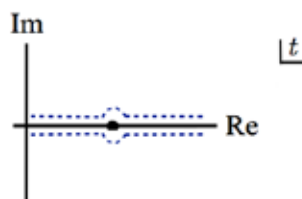


図4 ボレル平面実軸上積分の2つの経路 (正の実軸上に特異点がある場合)

この場合、ポレル変換の特異点は正の実軸上にあり、ポレル和を得る際 $[0, \infty]$ 間の積分が実行出来ない (図3参照)。強いてこの積分を実行しようとすると、図4に示すように積分経路を実軸上側もしくは下側にずらして積分を行い、最終的に経路を実軸に近付ける極限を取る、という処方を取る必要がある。ところがこの処方を取る際、実軸の上下どちらを選ぶかという不定性 (ambiguity) が生じる。その結果、経路の取り方によって、以下のように虚数の不定性を含む答えが得られる。

$$B(\lambda \pm \delta) = \Re[B(|\lambda|)] \pm i \Im[B(|\lambda|)] \quad (12)$$

$$\Im[B(|\lambda|)] \approx -\pi e^{-A|\lambda|} \quad (13)$$

\Re と \Im はそれぞれ実部と虚部を表す。

この結果には2つの不完全な点がある。まず、今述べたように、物理量の計算結果に不定性が存在すること。もう1つは実数の物理量、例えばエネルギーを計算したはずなのに、虚部が存在することである。このような虚部の不定性(以下、不定虚部)を持つ結果は物理的計算として意味を成さないように見える。因みに不定虚部の主要なファクターは $e^{-A|\lambda|}$ という形をしており、 A はポレル平面における特異点の位置を表している。後の議論でこの点が非常に重要になる。具体例として double-well 量子力学における最低エネルギー準位の摂動級数和 (式(14))、ポレル変換 (式(15))、ポレル和 (式(16)) を示しておく⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$a_q = -\frac{3^{q+1}}{\pi} q! \quad \text{For } q \gg 1 \quad (14)$$

$$BP(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{3}{1-3t} \quad (15)$$

$$B(\lambda \mp i\delta) = \Re[B(|\lambda|)] \mp \frac{i}{\lambda} e^{-1/(3\lambda)} \quad (16)$$

さて、このような縮退したポテンシャルの底 (以下、古典真空) を持つ理論は量子物理のさまざまな局面で登場する。例えば、非常に強い原子ポテンシャルを持つ物質中や特殊な光格子中の電子系は、実

空間における縮退した多数の古典真空を持つ例である。また陽子や中性子、そしてそれらの複合物である原子核を記述する量子色力学も縮退した無限個の古典的真空を持つと考えられている。このように様々な局面での重要性を持つ理論であるにもかかわらず、摂動計算に基づくポレル和に不定虚部が表れるため、結合定数の大きな領域では解析的に物理量を求めることが困難である。

2.3 複合インスタントン配位と不定性の相殺

double-wellのような縮退した古典真空を持つ量子力学系では、真空間の遷移を表す古典解が存在する。インスタントン解と呼ばれるこの古典解は位相励起を表すソリトン解の一種であり、ユークリッド化した理論における運動方程式の解である⁽¹⁾。ユークリッド化は実時間を $t=i\tau$ のように虚時間 τ を用いて表すことで、時間と空間の計量を同じ符号で扱う理論形式である。これによりポテンシャル $V(x)$ は形式的に符号が反転した $-V(x)$ という形になる。以下に元の理論 (式(17)) とユークリッド化理論 (式(18)) の作用積分を示す (質量 m は1とする)。ここではハミルトン形式ではなくラグランジュ形式に移行していることに注意されたい。

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] \quad (17)$$

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right] \quad (18)$$

この結果、図5に示したように double-well ポテンシャルの2つの古典真空間の量子的な遷移 (トンネル効果) が、ユークリッド化された理論においては上下逆転した形のポテンシャルの一方の山の頂上からもう一方の山の頂上に移る古典解として表される。したがって、2つの真空間の遷移確率は、ユークリッド理論においてはインスタントン古典解を作用に代入することで得られる。因みに、基準となる左の古典真空に戻ってくる解を反インスタントン解と呼ぶ。このような解に基づく解析はまさしく理論の非摂動的な特性を表しており、一つの古典真空の周りでのみ解析を行う摂動計算とは本質的に異

なるように見える．実際，真空間遷移もしくはインスタントン解を考慮することで，最低エネルギー準位は調和振動子近似の $E_0=1/2$ から

$$\Delta E_0^{(1,0)} = \pm \frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}} \quad (19)$$

だけ離れた2つの準位に分離する．ここで S_I はインスタントン解を代入した作用積分の値であり，double-well量子力学の場合には $S_I=1/6\lambda$ で与えられる．またsuperscript (1,0)はインスタントンと反インスタントンの数を表す．

さて，インスタントン解は虚時間のある点に局所的に存在するが，他の点に別のインスタントンが存在し共存する配位を考える事も出来る．

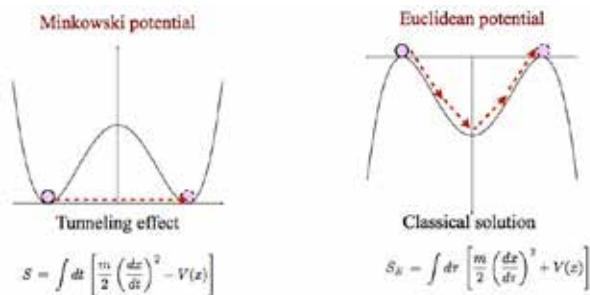


図5 元の理論 (左) とユークリッド化理論 (右) における真空間遷移の意味の相違

このような複合的な配位は最早運動方程式の解ではないが，経路積分量子化の観点から言えば量子論に寄与し得る1つの配位である．最も単純な場合としてある虚時間にインスタントン，別の虚時間に反インスタントンが存在したとしよう．これは，ある虚時間 τ_1 の時に一方の古典真空からもう一方の古典真空に遷移し (インスタントン)，別の虚時間 τ_2 で元の古典真空に戻ってくる配位を表している (図6参照) ．



図6 double-wellにおけるインスタントン-反インスタントン．2つの水平線が2つの古典真空．

これら2つの局所的な解をそれぞれある種の粒子と看做した場合，それらが十分離れたところではその間 (距離を R とする) に以下の有効ポテンシャルで表される力が働く⁽⁴⁾⁽⁷⁾ ．

$$V_{eff}(R) = -\frac{2}{\lambda} e^{-R} \quad (20)$$

全体に掛かるマイナス符号はインスタントン-反インスタントン間の力が有効的引力であることを表している．この配位の最低エネルギー準位への寄与を知るには，インスタントン間の距離 (モジュライまたは準モジュライと呼ぶ) を積分することで，この配位の振幅 (amplitude) を求めればよい．その振幅 $[I\bar{I}]$ は以下のように書ける⁽⁴⁾⁽⁷⁾ (I はインスタントン， \bar{I} は反インスタントンの意味) ．

$$[I\bar{I}] = \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}} \right)^2 \int_0^\infty \exp[-V_{eff}(R) - \epsilon R] dR \quad (21)$$

積分の前の因子は式(19)の右辺と同じものであり，インスタントンもしくは反インスタントンが配位に含まれると，その数だけこの因子が入ってくる．今の場合には2つ含まれるので2乗になっている．無限大に離れたところからの影響を正則化するため収束因子 ϵ を導入し，計算の最後でゼロに取ることにする．

式(21)は一見単純な一次元積分に見えるが，実は半古典極限 $\lambda \rightarrow 0$ で ill-defined になっている．これは I と \bar{I} が近づいた極限で実際には衝突・消滅して力は働かないはずが，その領域でも式(20)の有効ポテンシャルを用いているためである．このような問題は，2つの局所解がインスタントン同志の場合には力が斥力であるため生じない (式(20)の符号がプラスの場合) ．

そこで結合定数 λ を $\lambda < 0$ のように負の値を持つものとして計算を進め，計算の最後に $-\lambda = e^{i\pi} \lambda$ とし解析接続によって正の値に戻すという処方を取る．この処方は物理的・数学的意味合いが些か曖昧であるが，Bogomolny--Zinn-Justin処方⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾ と呼ばれ同様の計算においてよく用いられる．さて，この解析接続を実軸上部から行うか下部から行うかによって結果に不定性が生じるこ

とが予想される. $\epsilon \rightarrow 0$ で消える項と $1/\epsilon$ の項を取り除き, また半古典極限 $\lambda \ll 1$ で計算を進めると, 振幅とエネルギーへの寄与は以下の様に与えられる.

$$[I\bar{I}] = -\left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left[\left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) \pm i\pi \right] \quad (22)$$

$$\Delta E_0^{(1,1)} = \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left[\left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) \pm i\pi \right] \quad (23)$$

$\gamma=0.5772\dots$ はオイラー-マスケローニ定数である. エネルギー準位への寄与は振幅の符号を変えるだけで求められる⁽⁸⁾. 予想した通り結果は不定性を含み, その不定部分は虚部となっている. double-wellの場合のインスタントン作用 $S_I=1/6\lambda$ を考慮すると, 驚くべきことにこの不定虚部は摂動ボレル計算の結果表れた不定虚部式(16)と同じ大きさで符号が逆になっている⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾.

この結果が意味する事は, ある古典真空からの摂動展開と, 別の古典真空に遷移してさらに元の古典真空に戻ってくる配位の寄与を足し合わせれば, 以下のように不定虚部は相殺され, 実部のみの物理的な結果が得られる, ということである.

$$\Im \left[B(\lambda \mp i\delta) + \Delta E_0^{(1,1)} \right] = 0 \quad (24)$$

さらに踏み込んで言えば, 摂動計算には不完全ながら不定虚部という形で真空遷移に関連する非摂動的情報が既に含まれていたとも言える. つまり, 式(15)のボレル変換に表れた特異点の位置 $t=1/3$ と式(16)のボレル和に表れた虚部の指数関数の $e^{-1/(3\lambda)}$ は, インスタントンと反インスタントンの作用積分の和 $1/(3\lambda)=2 \times 1/(6\lambda)$ の情報を含んでいたということである. これは従来の摂動論に対する理解, つまり「古典真空間遷移等の非摂動効果は摂動論では解析出来ない」とする考えを改めさせる結果である.

この結果は1970年代から80年代にかけて Bogomolny や Zinn-Justin によって double-well potentialを持つ量子力学系の場合に得られ⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾, その後インスタントンの数が多い場合にも拡張し

て計算が行われた⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾. これまでわかっていることは, 例えば2インスタントン-1反インスタントン配位の振幅の不定部分は, 1インスタントン背景での摂動ボレル計算の不定虚部を相殺する. つまり1インスタントン-1反インスタントンを除いた状況での摂動計算と, 除く前のインスタントン計算が常に対応することが示された⁽⁸⁾.

2.4 場の量子論でのResurgence展開の可能性

近年, 前節で見た構造が例えば量子色力学(QCD)や類似した性質を持つ2次元シグマ模型にも存在すると仮定すると, 場の量子論の新たな定義法が可能になると主張されている. つまり, 摂動計算だけでなく, インスタントン-反インスタントン背景での摂動計算, そしてそれぞれが2つずつある背景での摂動計算, さらに3つずつある背景での計算を足していく, というようにインスタントンと反インスタントンが同数あるような全ての状況での摂動計算を, 級数の級数(trans-series)として足し上げていく. そうすることで, ボレル和の虚部不定性は全て相殺され, 最終的に厳密な物理的結果を得られる可能性がある(場の量子論ではインスタントンだけでなく分数インスタントン或はモノポールも重要になる). このような定義法は Resurgence展開⁽¹²⁾と呼ばれ, 場の量子論を半古典近似もしくは摂動論から厳密に定義する新たな試みとして注目されている⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾.

一方, double-well量子力学は場の量子論に現れる真空構造と異なり2つの古典真空が存在するのみである. より場の量子論の構造に近い量子力学系としてSine-Gordon型量子力学がある. これは \sin^2 型のポテンシャルによって無限個の真空が存在する系であり(図7参照), QCD真空やシグマ模型の真空に近い構造を有している. 実際, 2次元 $O(N)$ シグマ模型や $\mathbf{C}P^{N-1}$ シグマ模型は dimensional reductionという簡略化によってSine-Gordon量子力学系に帰着する⁽¹⁵⁾⁽¹⁷⁾. 以下にSine-Gordon型量子力学のハミルトニアンを示す.

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{8\lambda} \sin^2(2\sqrt{\lambda}x) \quad (25)$$

この理論も $\lambda \rightarrow 0$ で調和振動子ハミルトニアンに帰着する.

Sine-Gordon型量子力学についてのインスタントン計算は最も簡単な1インスタントン-1反インスタントンの場合に行われ、摂動的ボレル和の虚部不定性を相殺することが示されている⁽⁸⁾。一方3個以上のインスタントンが存在する場合は、計算の複雑さのためこれまで厳密に行われていない。しかし、場の量子論でのResurgence展開の可否を調べる第一歩として、この系での高次のインスタントン計算は不可欠である。

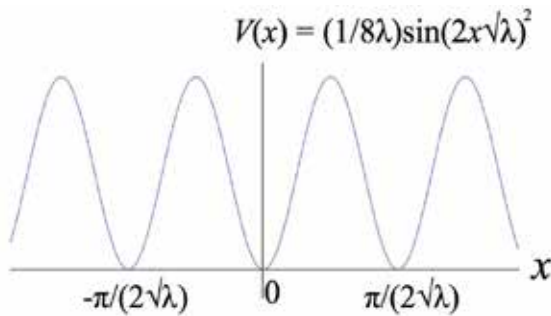


図7 Sine-Gordonポテンシャル。
無限個の周期的古典真空が存在する。

3. Sine-Gordon 量子力学における不定性相殺

3.1 複数インスタントン配位とモジュライ積分

この章ではSine-Gordon型量子力学系での複数インスタントン計算を行う。まずこの系の式(25)での変数を $y \equiv 2\sqrt{\lambda}x$ と置き換えて、ユークリッド化された理論の作用積分とラグランジアンを書き下す。

$$S_E = \int L d\tau \quad (26)$$

$$L = \frac{1}{8\lambda} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{8\lambda} \sin^2(y) \quad (27)$$

この系の (反) インスタントン解は

$$y(\tau) = 2 \arctan e^{\pm(\tau-\tau_0)} + n\pi \quad (28)$$

で与えられる。+がインスタントン、-が反インスタントン、 $n\pi$ は n 番目の古典真空から遷移する解を表す。それぞれは図8に示すような真空間の遷移を

表し、ある虚時間 τ_0 のところに局所的に存在する。

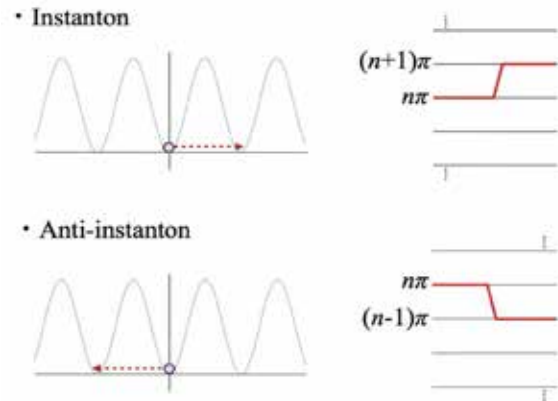


図8 インスタントン (上図) と反インスタントン (下図) の古典真空遷移の様子。

複数インスタントン配位としては、例えば1インスタントン-1反インスタントンの配位は以下のように与えられる (以下、このような配位は全て $[I\bar{I}]$ のように記す)。

$$y_{I\bar{I}}(\tau) = 2 \arctan e^{(\tau-\tau_I)} + 2 \arctan e^{-(\tau-\tau_{\bar{I}})} + n\pi \quad (29)$$

ここで τ_I はインスタントンの位置、 $\tau_{\bar{I}}$ は反インスタントンの位置を表す (double-wellと同様の構造なので図6を参照されたい)。このとき2つの局所的インスタントン間に働く力は以下の有効ポテンシャルで与えられる。

$$V_{\text{eff}}(R) = \mp \frac{2}{\lambda} e^{-R} \quad (30)$$

R は2つの局所解の距離を表す。式(29)の場合であれば $R = \tau_I - \tau_{\bar{I}}$ となる。マイナス符号はインスタントン-反インスタントン $[I\bar{I}]$ の場合 (引力)、プラス符号はインスタントン同志 $[II]$ の場合 (斥力) を表す。このポテンシャルを用いて n インスタントン- m 反インスタントン配位の振幅は

$$[II \dots \bar{I}\bar{I}]_{n,m} = \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}} \right)^{n+m} e^{i(n-m)\theta} \int dR_1 \dots dR_{n+m-1} \exp[-V_{\text{eff}}(R_1) - V_{\text{eff}}(R_2) - \dots - V_{\text{eff}}(R_{n+m-1})] \quad (31)$$

と与えられる. この系では $S_I = 1/2\lambda$ で V_{eff} は引力か斥力かによって式(30)に従うとする. 収束因子 ϵ の導入も含めて基本的には double-well の場合の式(21)と同様の形をしているが, 一般の場合として全ての最隣接インスタントン間の距離に関する $(n+m-1)$ 多重モジュライ積分になっている. また周期的ポテンシャルではエネルギー準位がバンド構造を持つことから Bloch angle θ が現れる. この Bloch angle には I と \bar{I} の数の差に比例する係数がつく. ここでは近似として最隣接インスタントン間のモジュライ積分のみを考えるが, 高次の寄与は非常に小さいことが示せる.

3.2 1インスタントン-1反インスタントン

まず, 最も単純な 1 インスタントン-1 反インスタントン $[I\bar{I}]$ の計算を考える. double-well の場合の式(22)と同様に Bogomolny--Zinn-Justin 処方 (BZJ 処方) を用いる. つまり $-\lambda > 1$ のように λ を負の値として扱いながら計算を進め, 計算の最後で解析接続を通して $-\lambda = e^{i\pi}\lambda$ のような形で正の値に戻す. 正の実軸に上下どちらから近づくかによって結果に不定性が生じる. 以下に振幅の具体的な計算過程と, 最低エネルギー準位への寄与を示す.

$$\begin{aligned} [I\bar{I}] &= \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{-\lambda}e^{-R} - \epsilon R\right] dR \\ &\rightarrow \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left(\frac{-\lambda}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \quad (\lambda \ll 1) \\ &\rightarrow -\left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left(\gamma + \log \frac{2}{e^{i\pi}}\right) + O(1/\epsilon, \epsilon) \\ &\rightarrow \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left[-\left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \mp i\pi\right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Delta E_0^{(1,1)} = \left(\frac{e^{-S_I}}{\sqrt{\pi\lambda}}\right)^2 \left[\left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \pm i\pi\right] \quad (33)$$

$\lambda \ll 1$ の半古典極限を考えてガンマ関数を用いた. 式(32)の2から3行目にかけて解析接続 $-\lambda = e^{i\pi}\lambda$ を用いた. $O(1/\epsilon)$ と $O(\epsilon)$ は収束因子による正則化に関する部分でありこの計算では単純に落とす. BZJ 処方によって計算を行った結果, やはり虚

数不定性が生じた. この不定性は Sine-Gordon 量子力学の最低エネルギー準位に関する摂動計算の振る舞い (式(34)) とそのボレル和から得られる虚部不定性 (式(35))

$$a_q = -\frac{2}{\pi} q! \quad (q \gg 1) \quad (34)$$

$$\Im[B(\lambda)] = \mp \frac{1}{\lambda} e^{-S_I} \quad (35)$$

を見事に相殺する⁽⁸⁾. さて, それではより多くの (反) インスタントンが共存する場合の結果はどうであろうか.

3.3 2インスタントン-1反インスタントン

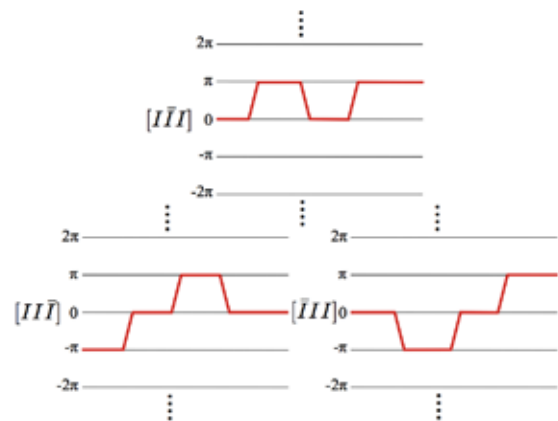


図9 2インスタントン-1反インスタントンの配位

この場合には (反) インスタントンの並び方によって, 最隣接要素間の力が引力か斥力かが変わる (図9参照). まず $[II\bar{I}]$ という配位の場合には, 働く力は両方とも引力であり, 振幅は以下のように与えられる (表式を簡単化するため, Bloch angle の指数関数 $e^{i\theta}$ と instanton factor $\xi \equiv e^{-S_I}/\sqrt{\pi\lambda}$ の3乗で振幅を割っておく).

$$\begin{aligned} &\frac{[II\bar{I}]}{e^{i\theta}\xi^3} \\ &= \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{-\lambda}(e^{-R_1} + e^{-R_2}) - \epsilon(R_1 + R_2)\right] dR_1 dR_2 \\ &\rightarrow \left(\frac{-\lambda}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left[\left(\frac{-\lambda}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}\right] \quad (\lambda \ll 1) \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right)^2 - \frac{17}{12} \pi^2 \pm 3i\pi \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ での発散項の除去はまず一つ目のモジュライ積分に対して行い, さらに最終的な結果で現れる $O(1/\epsilon)$ も除去した.

次に $[II\bar{I}]$ のような形を考えよう. この場合, 一方のモジュライは引力, もう一方は斥力となる. したがって, BZJ処方を引力のモジュライ積分にだけ適用し, 斥力の積分には適用しないこととする. これは今まで用いられたことのない拡張型BZJ処方である. この処方では引力の結合定数を $\tilde{\lambda}$, 斥力の方を λ として, 計算の最後で $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda$ として共通の結合定数に戻す. まず振幅は以下のようにかける.

$$\begin{aligned} \frac{[II\bar{I}]}{e^{i\theta}\xi^3} &= \int_0^\infty \exp\left[-\frac{2}{\lambda}e^{-R_1} - \frac{2}{-\tilde{\lambda}}e^{-R_2} - \epsilon(R_1+R_2)\right] \\ &\quad dR_1 dR_2 \end{aligned} \quad (37)$$

ここで問題となるのは, $1/\epsilon$ の項を取り除く順序によって結果が異なるということである. 引力のモジュライ積分の発散を先に取り除く場合 (式(38)) とその逆の場合 (式(39)) の結果を以下に示す.

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left[\left(\frac{-\tilde{\lambda}}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right)^2 - \frac{5}{12} \pi^2 \pm 2i\pi \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &= \left(\frac{-\tilde{\lambda}}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) \left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\epsilon \Gamma(\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{12} \pi^2 \pm i\pi \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

2行目に移るところで $-\lambda = e^{\mp i\pi}\lambda$ の解析接続を行い, $\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda$ として結合定数を元の表式に戻し, さらに最後に現れる $O(1/\epsilon)$ も取り除いた. この2つの結果の違いは拡張型BZJ処方をを用いたことに起因しており, あくまで計算処方における人為的結果である. そこで, 2つの結果の平均を取ることでその問題を取り除き, 最終的な結果を得ることとする.

$$\begin{aligned} \frac{[II\bar{I}]}{e^{i\theta}\xi^3} &= \frac{F_1(\lambda) + F_2(\lambda)}{2} \\ &= \frac{3}{2} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} \pm \frac{3}{2} i\pi \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

これが $[II\bar{I}]$ の振幅である. 対称性から $[\bar{I}II]$ の寄与はこれと等しいはずであり, 最終的に3つの配位の寄与を足し上げて符号を変えることで, 最低エネルギー準位に対する寄与

$$\begin{aligned} \Delta E_0^{(2,1)} &= -([I\bar{I}I] + [I\bar{I}\bar{I}] + [\bar{I}I\bar{I}]) \\ &= -\frac{9}{2} e^{i\theta} \xi^3 \left[\left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right)^2 - \frac{7\pi^2}{18} \pm \frac{4}{3} i\pi \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

を得る. これは1インスタントン背景での最低エネルギー準位の摂動計算とそのボレル和における虚部不定性

$$\begin{aligned} a_q &= \frac{6}{\pi} q! \left(\log 2 + \frac{s(q+1,2)}{q!} \right) \quad q \gg 1 \\ \Im[B(\lambda)] &= \pm 6 e^{i\theta} \frac{e^{-3S_1}}{\sqrt{\lambda^3} \pi} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

を相殺する寄与である. このようにSine-Gordon量子力学においてインスタントンが3つ以上存在する配位に関しては, 計算の過程で物理的或は数学的意味の曖昧な処方を使う必要がある. しかし, double-well量子力学の場合と同様, $I\bar{I}$ ペアを取り除いた背景における摂動計算から生じる不定性を相殺する, という結果が得られる.

3.4 2インスタントン-2反インスタントン

この場合にも取るべき処方は前節と同じである. ただ, 可能な配位の数6通りと多く, それぞれに対し拡張型BZJ処方を行う必要がある (図10参照). まず $[II\bar{I}\bar{I}]$ と $[\bar{I}\bar{I}I\bar{I}]$ においては2つの斥力モジュライ, 1つの引力モジュライが存在し, $1/\epsilon$ の発散項を3段階で取り除く必要がある. 前節と同様, どの順番で $1/\epsilon$ を取り除くかによって今回は3通りの異なる結果が得られる. 煩雑な計算が続くため紙面の都合上詳細は省くが, それらの3つの結果の平均

を取ることによって以下の振幅が求まる.

$$\begin{aligned}
[I I I \bar{I}] \xi^{-4} &= [\bar{I} \bar{I} I I] \xi^{-4} \\
&= -\frac{8}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^3 + \frac{\pi^2}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) + \frac{1}{6} \psi^{(2)}(1) \\
&\quad \mp i \pi \left[\frac{8}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^2 + \frac{\pi^2}{18} \right]
\end{aligned} \tag{43}$$

ここでポリガンマ関数 $\psi^{(2)}(z) = d^3 \log \Gamma(z) / dz^3$ を用いた. 次に $[I \bar{I} \bar{I} I]$ と $[\bar{I} I I \bar{I}]$ は2つのモジュライが引力, 残りの1つが斥力であり, この場合にも発散除去の順番によって3通りの結果が得られる. それらの平均は

$$\begin{aligned}
[I \bar{I} \bar{I} I] \xi^{-4} &= [\bar{I} I I \bar{I}] \xi^{-4} \\
&= -\frac{8}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^3 + 3\pi^2 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) + \frac{1}{6} \psi^{(2)}(1) \\
&\quad \mp i \pi \left[\frac{16}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^2 - \frac{7\pi^2}{18} \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

で与えられる. $[I \bar{I} \bar{I} \bar{I}]$ と $[\bar{I} \bar{I} \bar{I} I]$ のモジュライは全て引力であり, この場合平均を取る必要はなく得られる振幅は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
[I \bar{I} \bar{I} \bar{I}] \xi^{-4} &= [\bar{I} \bar{I} \bar{I} I] \xi^{-4} \\
&= -\frac{8}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^3 + \frac{23}{3} \pi^2 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) + \frac{1}{6} \psi^{(2)}(1) \\
&\quad \mp i \pi \left[8 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^2 - \frac{7\pi^2}{3} \right]
\end{aligned} \tag{45}$$

最終的にこれら6つの配位からの振幅の和を取り符号を変えることで最低エネルギー準位への寄与が得られる.

$$\begin{aligned}
\Delta E_0^{(2,2)} \xi^{-4} &= 16 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^3 - 22\pi^2 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) - \psi^{(2)}(1) \\
&\quad \pm i \pi \left[32 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^2 - \frac{16\pi^2}{3} \right]
\end{aligned} \tag{46}$$

残念ながらこれに対応する1インスタントン-1反インスタントン背景での摂動計算は知られていないが, 摂動的ボレル和の不定性の相殺が式(46)の虚部によって起きることを予言している.

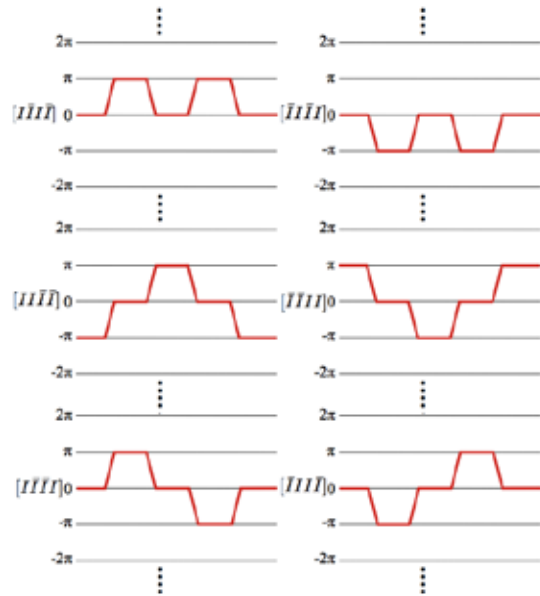


図10 2インスタントン-2反インスタントンの配位

3.5 3インスタントン-1反インスタントン

同様の計算を行うことでこの場合の寄与が得られる. 詳細は省くが最低エネルギー準位に対する寄与は

$$\begin{aligned}
\Delta E_0^{(3,1)} e^{-2i_0} \xi^{-4} &= \frac{32}{3} \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^3 - \frac{20}{3} \pi^2 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right) - \frac{2}{3} \psi^{(2)}(1) \\
&\quad \pm i \pi \left[16 \left(\gamma + \log \frac{2}{\lambda} \right)^2 - \frac{2\pi^2}{3} \right]
\end{aligned} \tag{47}$$

と与えられる.

3.6 nインスタントン-m反インスタントン

一般のnインスタントン-m反インスタントンの場合は複雑になるが同じ処方を用いて計算することができる. このとき $_{n+m}C_n$ 個の配位が存在し, それらをモジュライ積分の引力と斥力の数によって分類することが出来る. この分類によって数値的にこれらの計算を進めることが可能であり, アルゴリズムの開発を今後の課題とする.

4. まとめ

この研究では Sine-Gordon 量子力学における複数インスタントンのエネルギー準位への寄与を計算した。我々が拡張型 BZJ 処方と呼ぶ正則化を用いて計算を行った結果, double-well 量子力学の場合と同様に摂動的ボレル和から生じる不定性を見事に相殺することが示された。これは Resurgence 展開による半古典的な量子論定義法が少なくとも量子力学では可能であることを示している。また Sine-Gordon 量子力学は 2 次元シグマ模型からの reduction によって得られることを考えると, 場の量子論も部分的には Resurgence 構造を有していることを示唆している。今後の研究では, 数値的に摂動計算とインスタントン計算を実行し, それぞれの寄与が高次においても完全に相殺し合うことを示す。さらに 2 次元シグマ模型においてもインスタントン計算と摂動的ボレル計算の比較を行い, 場の量子論における Resurgence 構造の理解を目指す。

謝辞

本研究報告の執筆について助言をいただいた本学数理科学コースの小野田勝教授, 田沼慶忠准教授, 小林真人准教授に感謝の意を述べたいと思います。また, 本研究に関係する分野の共同研究を行っている慶応義塾大学の新田宗土准教授, 坂井典佑訪問教授にも感謝の意を述べたいと思います。

参考文献

- (1) J. Zinn-Justin, “Quantum field theory and critical phenomena,” *Int. Ser. Monogr. Phys.* 77, 1 (1989).
- (2) E. Borel, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **16**: 9–131(1899)
- (3) M. Gevrey, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **35**: 129–190 (1918)
- (4) J. Zinn-Justin, “Multi - Instanton Contributions in Quantum Mechanics,” *Nucl. Phys. B* 192, 125 (1981).
- (5) J. Zinn-Justin, “Multi - Instanton Contributions in Quantum Mechanics. 2.,” *Nucl. Phys. B* 218 (1983) 333.
- (6) J. Zinn-Justin, “Instantons in Quantum Mechanics: Numerical Evidence for a Conjecture,” *J. Math. Phys.* 25 (1984) 549.
- (7) E. B. Bogomolny, “Calculation Of Instanton - Anti-instanton Contributions In Quantum Mechanics,” *Phys. Lett. B*

- 91, 431 (1980).
- (8) J. Zinn-Justin and U. D. Jentschura, “Multi-instantons and exact results I: Conjectures, WKB expansions, and instanton interactions,” *Annals Phys.* 313, 197 (2004) [quant-ph/0501136].
- (9) J. Zinn-Justin and U. D. Jentschura, “Multi-instantons and exact results II: Specific cases, higher-order effects, and numerical calculations,” *Annals Phys.* 313, 269 (2004) [quant-ph/0501137].
- (10) U. D. Jentschura, A. Surzhykov and J. Zinn-Justin, “Multi-instantons and exact results. III: Unification of even and odd anharmonic oscillators,” *Annals Phys.* 325, 1135 (2010).
- (11) U. D. Jentschura and J. Zinn-Justin, “Multi-instantons and exact results. IV: Path integral formalism,” *Annals Phys.* 326, 2186 (2011).
- (12) J. Ecalle, “Les Fonctions Resurgentes”, Vol. I - III (*Publ. Math. Orsay*, 1981).
- (13) M. Marino, R. Schiappa and M. Weiss, “Nonperturbative Effects and the Large-Order Behavior of Matrix Models and Topological Strings,” *Commun. Num. Theor. Phys.* 2, 349 (2008) [arXiv:0711.1954[hep-th]].
- (14) P. Argyres and M. Unsal, “A semiclassical realization of infrared renormalons,” *Phys. Rev. Lett.* 109, 121601 (2012) [arXiv:1204.1661 [hep-th]].
- (15) G. V. Dunne and M. Unsal, “Resurgence and Trans-series in Quantum Field Theory: The CP(N-1) Model,” *JHEP* 1211, 170 (2012) [arXiv:1210.2423 [hep-th]].
- (16) I. Aniceto and R. Schiappa, “Nonperturbative Ambiguities and the Reality of Resurgent Transseries,” *Commun. Math. Phys.* 335, no. 1, 183 (2015) [arXiv:1308.1115 [hep-th]].
- (17) T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Neutral bions in the CPN-1 model,” *JHEP* 1406, 164 (2014)[arXiv:1404.7225 [hep-th]].
- (18) T. Misumi, M. Nitta and N. Sakai, “Classifying bions in Grassmann sigma models and non-Abelian gauge theories by D-branes,” *PTEP* 2015, 033B02 (2015) [arXiv:1409.3444 [hep-th]].