秋田大学教育文化学部研究紀要　教育科学部門　69　pp. 15 ～ 24　2014

ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルに基づく造形展開（2）

石　井　宏　一

Expanding Forms Based on the Mathematical Models of Production Rule of Pendulum Pattern (2)

Kouichi ISHII

Abstract

“Pendulum Pattern”, which was one of the non-graphics ways well-developed in “Gestaltung” and “Basic Design” area mainly in the 1970s. The form of Pendulum Pattern, which is different from the general expression in graphics, has been producing in the process. However, today, the study of Pendulum Pattern, itself is not developed as it is different to describe the basic rules. In this study, I describe Pendulum Pattern generate rules by mathematical modeling based on theories of non-linear dynamic systems. I present forms with computer graphics procedure based on the modeling.

Key words : pendulum pattern, mathematical model, computer simulation, rule of color combination

・はじめに

「ペンジュラム・パターン」は振り子の運動の軌跡によって生じる形である。非写実的な造形手法に基づく形体表現であることから，造形一般の基礎学である構成学の主要な研究対象として，1970 年代を中心にこれまでさまざまな造形研究がなされてきた。しかし，形体生成時に各種の物理的制約が生じること，また再現性が確保されないなどの種々の問題を内包していることを基因に，現在ではその研究自体が下火になった感が否めない研究対象でもある。

本研究はペンジュラム・パターンの生成規則に着目し，その活用法の探究を通じ新たな造形表現の開拓を指向している。ここで，本研究の主題であるペンジュラム・パターンの生成規則は，非線形力学の観点から力学の諸法則に基づき「球面上に拘束された質点運動」と同定することにより数理モデル化が可能である。またコンピュータシミュレーションにより，実際には物理的に再現困難な現象も生成対象とする。したがって，従前のペンジュラム・パターンの生成手法にはない造形展開や，その造形表現のあり方に新たな局面を見出す上での契機になると考えている。

前稿[1]では，ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデル化及び常微分方程式化[2]が造形展開上，大変有効であること，またその基本的性質の活用に基づく形体生成実験を通じ，それらの生成形体が造形展開上，極めて興味深い様態を示すことを確認した。

その後，引き続きペンジュラム・パターンの生成原理の数理モデル化の活用を主眼にした造形展開をいくつか試みたが，本稿では色彩の「配色方法」としての活用の有効性を確認した事例を報告する。

1．造形規則としての数理モデルの造形特性

1.1　ペンジュラム・パターンの数理モデルの造形特性

前稿において，ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデル化による造形展開の特徴として，①生成形体は離散的な点集合として表出すること，②複数の初期値点を起点とする各点間の関係は相互に連続性を有しており，一定時間経過後も各点間の相関性は保持されていること，③質点運動は質点の射出条件に応じた周期性を有していること，という 3 点を指摘し，それらをペンジュラム・パターンの数理モデルが有する造形特性として位置づけた。またその造形特性を活用した造形実験を実施し，「複数の初期値点からなる質点の同時運動」により多くの興味深い形体の生成可能であることから，数理モデル及びその造形特性が形体表現展開上，有効に機能することを確認した。

1.2 「基本的造形要素」と「基本的造形原理」

ここで，これらの知見がペンジュラム・パターンの数

理モデルから見出されたということは，造形一般の基礎学である構成学の視座から，その活用法の開発を通じて，新たな造形表現の開拓が可能であることを意味する。特に構成学の研究上の基盤である「基本的造形要素」と「基本的造形原理」という観点から考えてみると非常に興味深い。

構成学において，造形表現は「基本的造形要素」，すなわち「形体」「色彩」及び「素材」の「運用方法」の問題として，表現具体化のプロセスを通じて新たな造形表現を探究していく。またその過程で得られた知見は「基本的造形原理」として一般化，「造形文法」として，あまねく造形の局面に展開可能なように定義される。

その意味において「基本的造形要素」の運用方法，すなわち「基本的造形原理」は，新たな造形の局面を開拓することを主眼とする構成学において，極めて重要な研究対象として位置づけられる。特に基本的造形原理は造形全般において普遍性を持つものとして定義されることから，その探究は研究展開上の核心的行為としての意味を持つ。

1.3　ペンジュラム・パターンの生成規則の「色彩」表現への適用の可能性

もし，基本的造形原理が「造形文法」として造形全般に普遍的に適用可能な性質を持つものであれば，本来は形体生成の領域に属しているペンジュラム・パターンの生成規則を色彩の運用方法としても活用することが可能なはずである。したがって，前稿で試みた数理モデル化の手法を「色彩」の表現に適用できるのであれば，構成学の研究上，非常に興味深い。

少なくとも従前のペンジュラム・パターンに関する研究は形体生成方法の一事例として扱われていたものにすぎず，また前稿の数理モデル化の事例も形体表現を主眼においたものであり，その適用対象範囲は基本的造形要素の中でも形体に限定される。したがってこの両者においては生成規則の造形表現全般への適用までは視野に入れておらず，当然，色彩はその対象外である。また従来的な構成学の考え方に従うならば，形体と色彩は造形的に異なる機能を有する造形要素であり，表現の具現化を担う要素として素材が関与することによってはじめて両者の関係性が明確になる造形対象にすぎないといえる。

しかしながら，ペンジュラム・パターンの生成規則が数理モデルとして顕在化され，それをコンピュータシミュレーションにより展開可能となれば,「形体」と「色彩」は対等の関係性を有する造形要素として考えることができる。コンピュータシミュレーションにおいて数理モデルは「数理的造形規則」として位置づけられるものであり，コンピュータ上では形体も色彩も「数値情報」のひとつとして扱われるからである。その意味において，少なくとも両者にはその運用上の差異は存在しない。

それ故，従来は形体表現の領域として扱われてきたペンジュラム・パターンを，その生成規則の数理モデル化によって色彩表現の領域への適用が可能となる余地が生じる。もしペンジュラム・パターンの生成規則を色彩表現の方法として扱うことができるのであれば，新たな造形表現を開拓する上で非常に有意義といえる。

以上のことから, 色彩表現の方法としてペンジュラム・パターンの造形規則の活用を試み，それに基づく新たな造形展開の可能性の探究が必要と考えられる。そこで本稿では，二つの内容からなる造形実験を行い，普遍的な造形規則としてのペンジュラム・パターンの数理モデルの色彩表現への活用の可能性，及びその造形展開のあり方について確認することとした。

２.「複数の質点の同時運動」に基づく配色実験[3)]

前稿においてペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルを活用した形体生成実験を行い，その造形的な有効性を確認したが，数理モデルが形体生成規則と同様に「配色規則」として活用が可能であれば，新たな造形手法，あるいは配色方法として，新たな造形展開の局面の開拓が可能と考えられる。

そこで，以下の内容に基づき配色実験を行い，造形展開の上で非常に興味深い知見を得た。

2.1　実験意図

ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルを配色規則として活用する色彩表現を試み，その造形手法としての有効性を確認する。なお，ここでは前稿に引き続き「射出条件の異なる複数の質点の同時運動」による造形展開を試みることで，色彩と形体という異なる造形要素に対して同一造形規則を適用した際の造形性の違いについても検証を試みる。

2.2　実験条件

本実験では，ペンジュラム・パターンの数理モデルを配色規則として活用するにあたり，以下のＡ～Ｄの実験条件を設定した。なおペンジュラム・パターン生成上の基本計算については，前稿の実験条件に準じる。

Ａ．$m \times n$ 個の「質点拘束球面」の中心点 $O_{m,n}$ を図１のように平面的，格子状に配置する。本実験では $O_{m,n}$ にＢで規定する質点の位置角度に応じて決定された色彩情報に基づき配色していくことになる。なお，本実験では $O_{m,n}$ の数を 400 × 400 個と設定した。

Ｂ．$O_{m,n}$ におけるそれぞれの質点運動において，その質点の座標位置に応じて式（1）

$$color_{m,n}(t) = tan^{-1} (x_{m,n}(t) / y_{m,n}(t)) \tag{1}$$

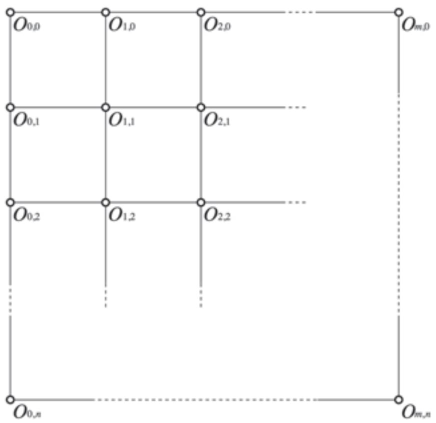


図１　中心点 $O_{m,n}$ の配置条件

により位置角度を計算し，それを配色情報 $color_{m,n}$（t）としてＡで配置した $O_{m,n}$ に配色する。なお，ここで算出する $color_{m,n}(t)$ と色彩との関係は図２で規定される。

図２　$color_{m,n}$（t）と色彩の関係

Ｃ．Ｂで配色された生成表現をもとに，アニメーションを作成し，その時系列変化の様態を確認する。

Ｄ．$O_{m,n}$ の配置の際，格子の m 軸（横軸），n 軸（縦軸）に配置する各構成要素及び数値範囲を表のように設定する[4]。

図版番号	m 軸（横軸）		n 軸（縦軸）	
	要素	範囲	要素	範囲
図５	$x(t)$	-0.998～0.998	$y(t)$	-0.998～0.998
図６	$u(t)$	-10～10	$v(t)$	-10～10
図７	$uv(t)$*	-10～10	θ	0～2π
図８	$x(t)$	-0.998～0.998	$v(t)$	-10～10
図９	$x(t)$	-0.998～0.998	l	0～2

表　各構成要素及び数値範囲　　*$uv(t)=sqrt(u(t)^2+v(t)^2)$

なお本実験では，減衰係数 k を 0.05，重力加速度 g を 9.8 とする。またそれ以外に必要な構成要素の数値については図版中に示している。本実験では，以上の条件に基づきコンピュータ・プログラムを作成，コンピュータグラフィックスにより作図する。

2.3　生成表現図示

本実験で生成された色彩表現を，表の各構成要素の配置条件に基づき，図５～図９に示す。また生成表現の時系列変化のうち，$t=\pi$，2π，4π，8π，16π を掲載する。

2.4　考察

本実験の結果，図５～図９で示す色彩表現が生成されたことにより，ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルを配色規則として展開可能なことを確認した。その意味において，形体生成規則としてのペンジュラム・パターンの数理モデルの色彩配色への適用は，造形展開の上で有効であると同時に，コンピュータシミュレーションにおいて形体と色彩の表現展開上の差異は存在しないということを確認できる。従前，ペンジュラム・パターンの生成規則に基づき配色された事例は存在しないと考えられることから，この事例は構成学の研究の上で極めて重要な知見として位置づけられると考える。

ここで提示した色彩表現は，前稿で作成した小点によるものとやや類似の傾向が見受けられるものの，色彩配色によって生成したものであるから，非常に興味深い様態を示している。

なお，本実験では配色規則の設定にあたり座標情報の角度化のみを扱ったが，数理モデルを構成する他の要素についても注目することで，様態の異なる形体の生成が可能であることが予想される。そこで次項の造形実験を行うこととした。

３．数理モデルの構成要素の活用による配色実験[3) 5)]

3.1　実験意図

前項の実験では，ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルに基づき，質点の座標位置情報の角度化により配色規則を決定し，その造形展開の可能性を確認した。一方，座標情報に限らず数理モデルに含まれる構成要素を配色規則の設定に活用することにより，趣の異なる色彩表現が生成可能と思われる。

そこで数理モデルの構成要素のうち，前項で用いたもの以外を活用することにより配色規則を設定し，その生成表現の様態を確認する。

3.2　実験条件

本実験では，前項の実験条件のうちペンジュラム・パターンの中心位置 $O_{m,n}$ の配置を m 軸に $x(t)$，n 軸に $y(t)$ と設定した上で，「Ｂ．座標情報の角度化」にあたる部分に着目し，配色規則を設定する上で数理モデルを構成する別の要素に置換し配色情報を算出することにより行う。なおペンジュラム・パターン生成上の基本計算については，前稿の実験条件に準じる。

それぞれの構成要素に基づく配色情報の算出方法は以下のとおりである。

3.2.1　$x_{m,n}(t)$ によるもの

質点の座標位置のうち，$x_{m,n}(t)$ に基づき配色情報を設定する。この場合，配色情報 $color_{m,n}(t)$ は式（2）

$$color_{m,n}(t) = x_{m,n}(t) \tag{2}$$

に基づき算出，色彩との関係を図３－１で規定する。

3.2.2　$z_{m,n}(t)$ によるもの

質点の座標位置のうち，$z_{m,n}(t)$ に基づき配色情報を設定する。この場合，$color_{m,n}(t)$ は $z_{m,n}(t)$ に対応する x-y 平面上の質点座標 $(x_{m,n}(t), y_{m,n}(t))$ に応じて式（3）

$$color_{m,n}(t) = tan^{-1}\,(x_{m,n}(t) \,/\, y_{m,n}(t)) \tag{3}$$

によって算出される。なお $color_{m,n}(t)$ と色彩との関係は図３－２で規定される。

3.2.3　$u_{m,n}(t)$ によるもの

x-y 平面上の質点速度 $(u_{m,n}(t), v_{m,n}(t))$ のうち，x 方向の速度 $u_{m,n}(t)$ に基づき配色情報を設定する。この場合，$color_{m,n}(t)$ は式（4）

$$color_{m,n}(t) = u_{m,n}(t) \tag{4}$$

に基づき算出，$color_{m,n}(t)$ と色彩との関係を図３－３で規定する。

3.2.4　$uv_{m,n}(t)$ によるもの

質点の水平方向の速度 $uv_{m,n}(t)$ を算出し，それに基づき配色情報 $color_{m,n}(t)$ を設定する。ここで，$uv_{m,n}(t)$ は式（5）によって規定される。

$$uv_{m,n}(t) = sqrt(u_{m,n}(t)^2 + v_{m,n}(t)^2) \tag{5}$$

また $color_{m,n}(t)$ は式（6）

$$color_{m,n}(t) = uv_{m,n}(t) \tag{6}$$

によって算出，色彩との関係を図３－４で規定する。

3.3　生成表現図示

本実験で生成された色彩表現を数理モデルの各構成要素の解釈内容に基づき，図４に図示する。なお，ここでは各構成要素に基づく生成表現の時系列変化のうち，t=16π のものについて掲載する。

3.4　考察

本実験の結果，配色情報算出の際に使用される数理モデルの構成要素の違いによって，生成形体の様態が異なることを確認した。このことから，ペンジュラム・パターンという同一の生成規則であっても，その数理モデルに内在する構成要素の扱いを工夫することにより，色彩表現の様態に多様な変化を持たせることが可能なことを推察できる。

これは同一の数理モデルを用いた表現であっても，色彩の配色方法を工夫することにより「ワンソースマルチユース」的な造形情報の扱いが可能であることを示すものである。したがって，生成表現の多様性を確保し，その具体的表現の展開が可能な方法のひとつとして，色彩の使用は非常に有効であると考えられる。

その意味において色彩表現は，形体のみの造形表現の展開以上に，その表現可能な領域が広いことが想定されることから，配色規則を規定する上で，生成情報の扱いについてより詳細な検証が必要と思われる。

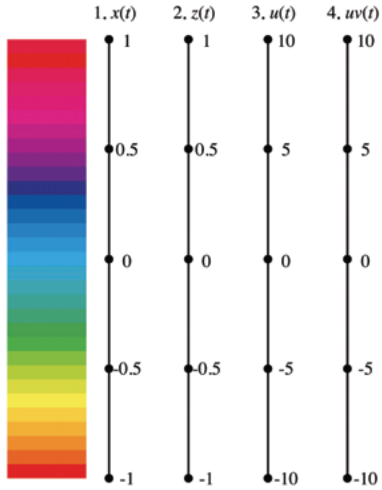


図３　$color_{m,n}(t)$ と色彩との関係　*$uv(t)=sqrt(u(t)^2+v(t)^2)$

４．まとめ

本稿の二つの造形実験の結果から，ペンジュラム・パターンの数理モデルの配色規則としての活用は，その造形表現上の新たな面を開拓するとともに，色彩表現の方法のひとつとして有効なことを確認した。

従前のペンジュラム・パターンの生成方法は生成対象を形体に限定する。しかし本稿では生成規則の数理モデル化の手法は，色彩領域への適用も可能なことを確認している。このことは基本的造形要素のうち「色彩」と「形体」の造形運用において数理モデルを介在させることにより，両者を機能的に対等な関係として位置づけることが可能であり，また生成規則の数理モデル化という手法が基本的造形原理としての普遍性を有することを示すものでもある。したがって，今後も構成学の研究テーマとして，数理モデルと基本的造形原理の関係の詳細な検証が必要と考えている。

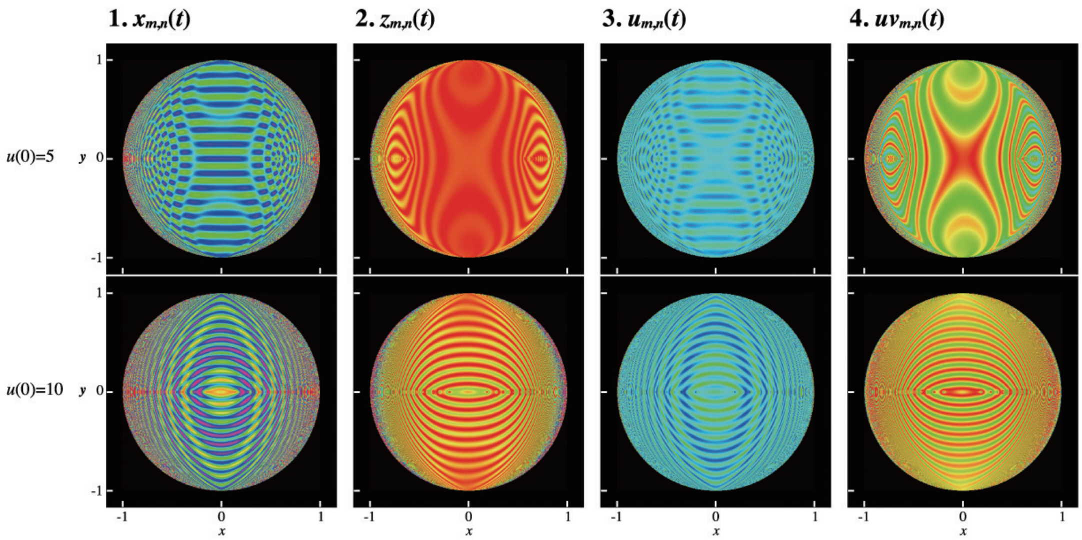


図４　数理モデルの構成要素の活用による色彩表現

一方で，造形実験によって得られた生成表現の様態に関して，数理モデルに基づく配色規則による色彩表現が，質点の射出条件及び配列条件の設定の仕方によって，生成表現の様態が異なる傾向があり，数理モデルの各構成要素の造形的特性を視覚的に顕在化する有効な手段として扱うことが可能なことを確認した。これと同様の傾向は前稿で提示した小点による形体生成の事例においても見られたが，色彩表現において形体表現と同様の傾向が確認されたことから，生成規則や数理モデルが造形表現に与える影響が非常に大きいこと，また形体と色彩という異なる造形要素が同一生成規則の上では同等の機能を有すること，という二つの事象の存在が推察できる。したがって，数理モデル化という造形手法の，基本的造形要素の造形展開上の機能を改めて確認する必要があるように考える。

以上のことから，数理モデル化は造形展開の幅を拡張可能な手法であるとともに，基本的造形要素の運用において，その機能の再検討の必要性を確認したといえる。それは形体と色彩の関係性の再定義を求めることを意味する。したがって，数理モデル化の手法を用いた造形展開について，より構成学の領域において，さらなる研究を進めていく必要がある。

注

1）拙稿，ペンジュラム・パターンの生成規則の数理モデルに基づく造形展開，秋田大学教育文化学部紀要（教育科学部門）第 68 集，pp.103-pp.112，2013

2）数理モデル化において，振り子運動は「球面上に拘束された質点運動」と同定可能であり，この運動は以下の常微分方程式で記述される。

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -k\dot{x}(t) + \Lambda(t)x(t) \\ \ddot{y}(t) &= -k\dot{y}(t) + \Lambda(t)y(t) \\ \ddot{z}(t) &= -k\dot{z}(t) - \frac{g}{l} + \Lambda(t)z(t) \\ \Lambda(t) &= \left\{\frac{g}{l}z(t) - x(t)^2 - y(t)^2 - z(t)^2\right\} \end{aligned}\right\}$$

なお，数理モデルの設計の詳細は以下で報告している。

・石井宏一，高橋信行，上田よし亮，非線形力学系の情報表現論・情報構成学的な解析，電子情報通信学会技術研究報告 Vol.103，No.185，NLP2003-35，2003，pp.37-pp.42

3）造形実験の際の数値計算において，常微分方程式の計算にはルンゲ - クッタ法を用いている。

4）表に記載されている各構成要素の設定は，前稿での生成形体の様態と比較することを目的に，前稿と同じ内容となっている。

5）本実験の予備実験的な内容を以下で報告している。

・拙稿，非線形力学系に基づく形体生成研究（2）— ペンジュラム・パターンの数理モデルに基づく形体生成（2），デザイン学研究第 53 回研究発表大会概要集，日本デザイン学会，2006，pp.320-pp.321

ただし，ペンジュラム・パターンの中心位置及び配色条件等の設定が異なることから，生成形体の様態は本稿のものと大きく異なっている。

図５　*x(t) - y(t)*

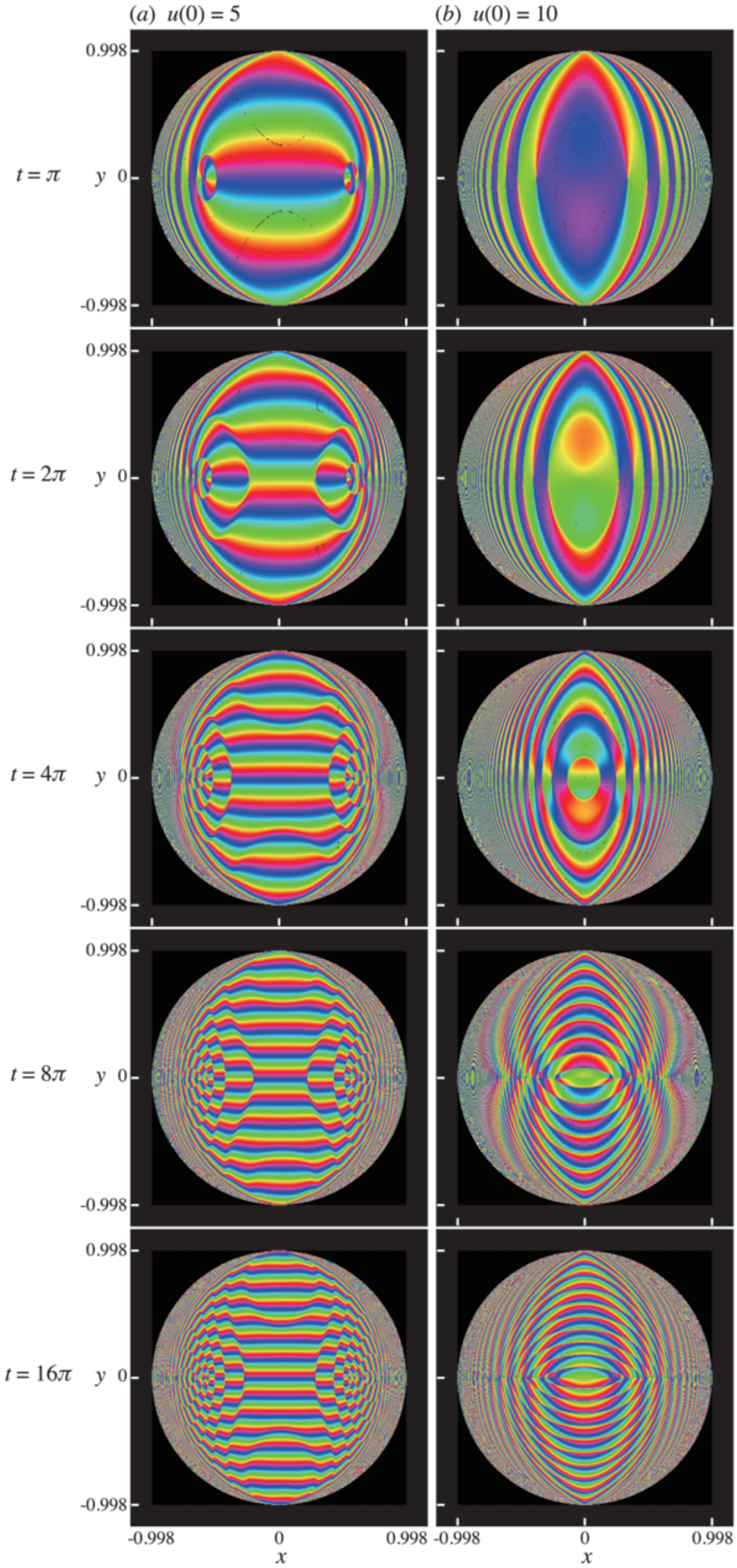


図６　*u(t) - v(t)*

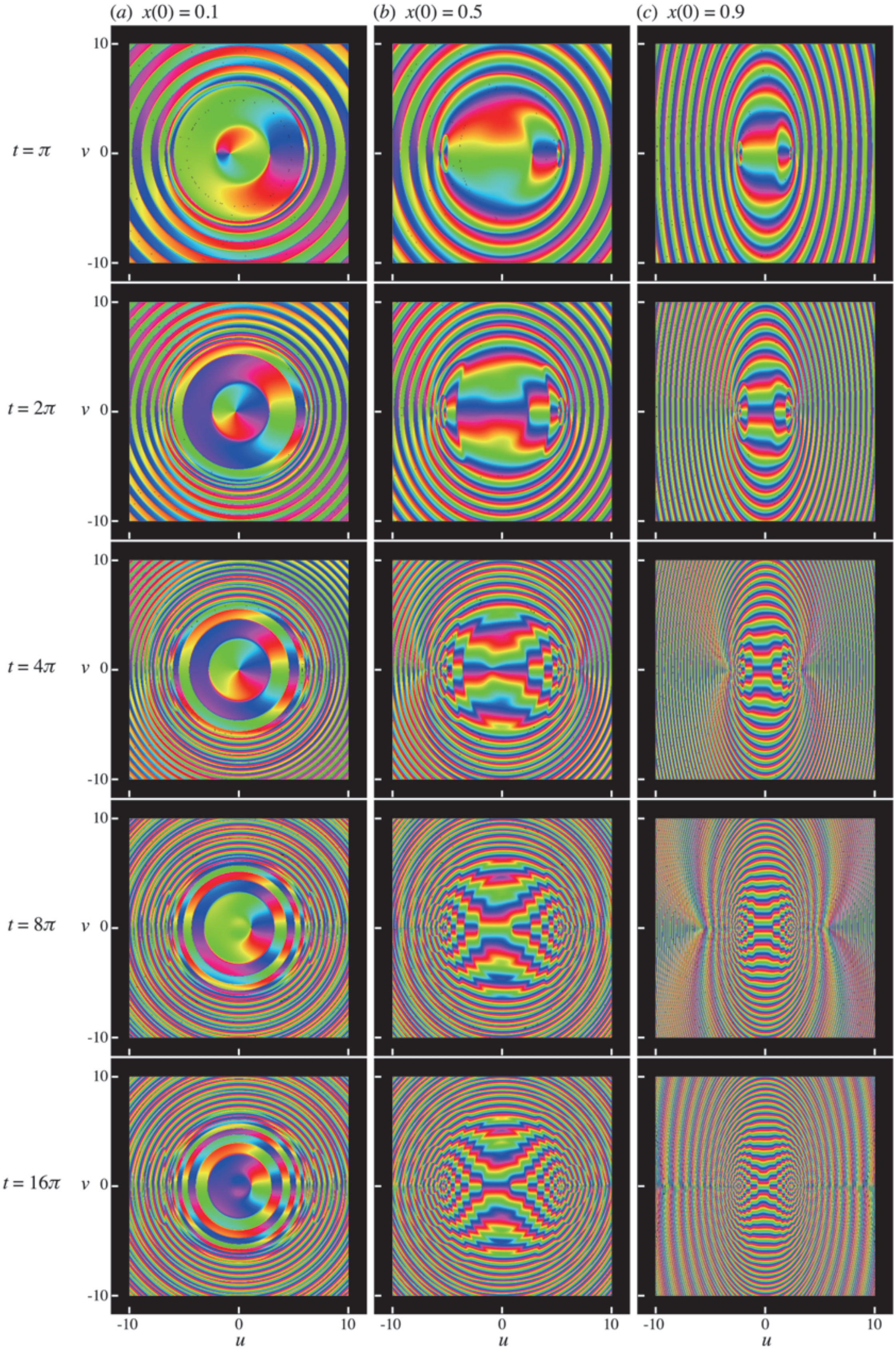


図７　$uv(t)^*$ - θ　　　　$^*uv(t) = sqrt(u(t)^2 + v(t)^2)$

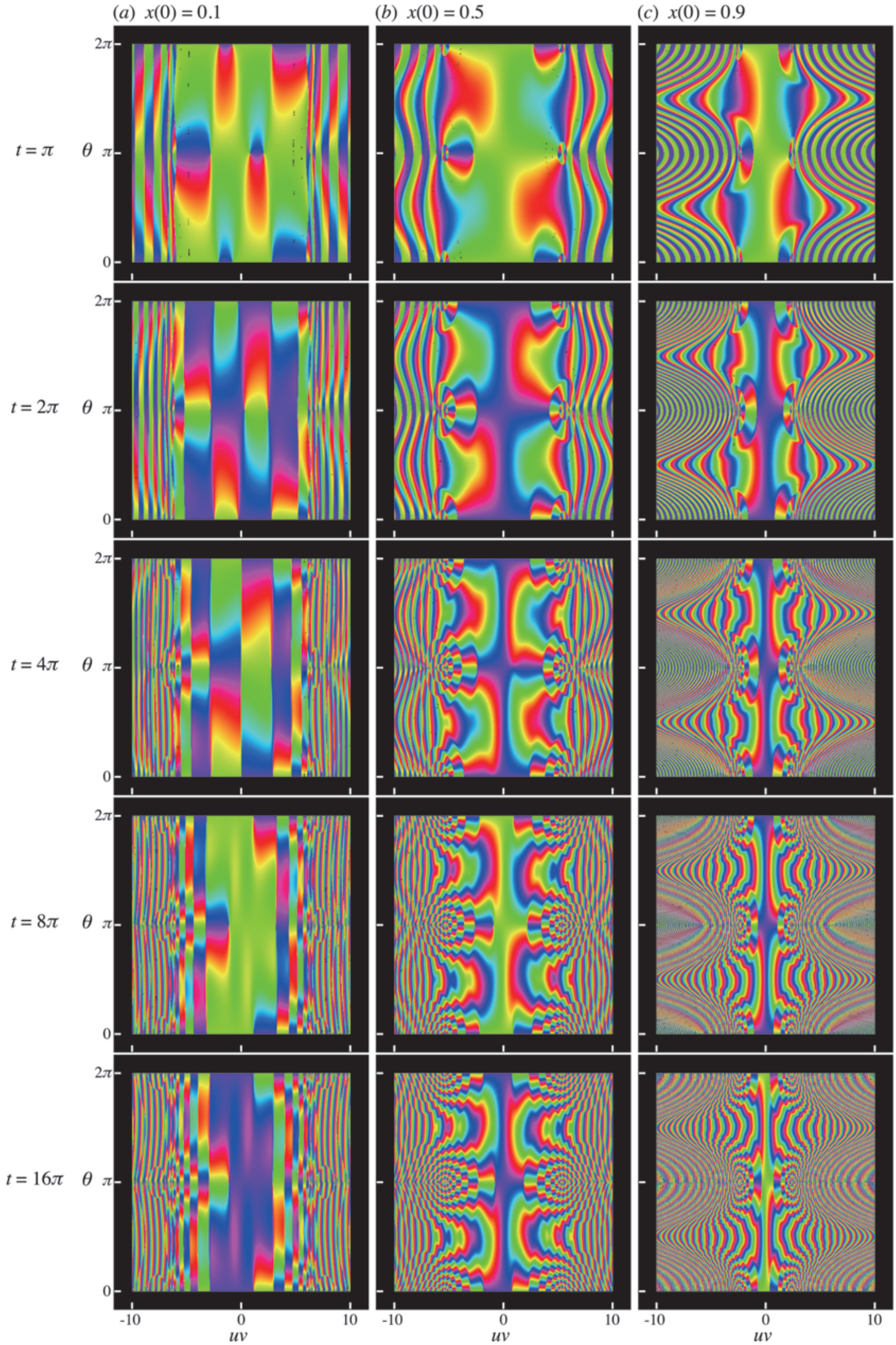


図８　*x(t) - v(t)*

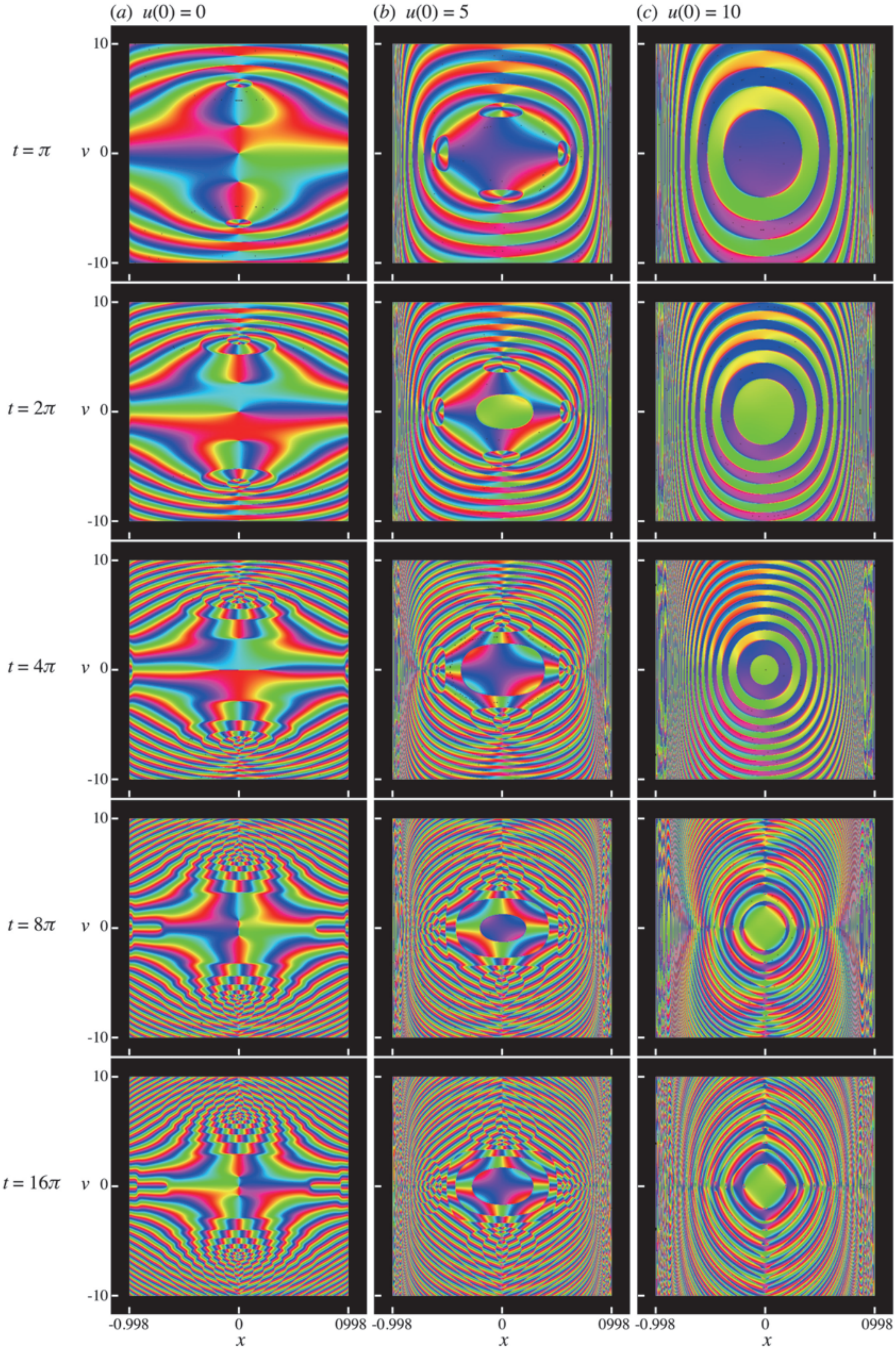
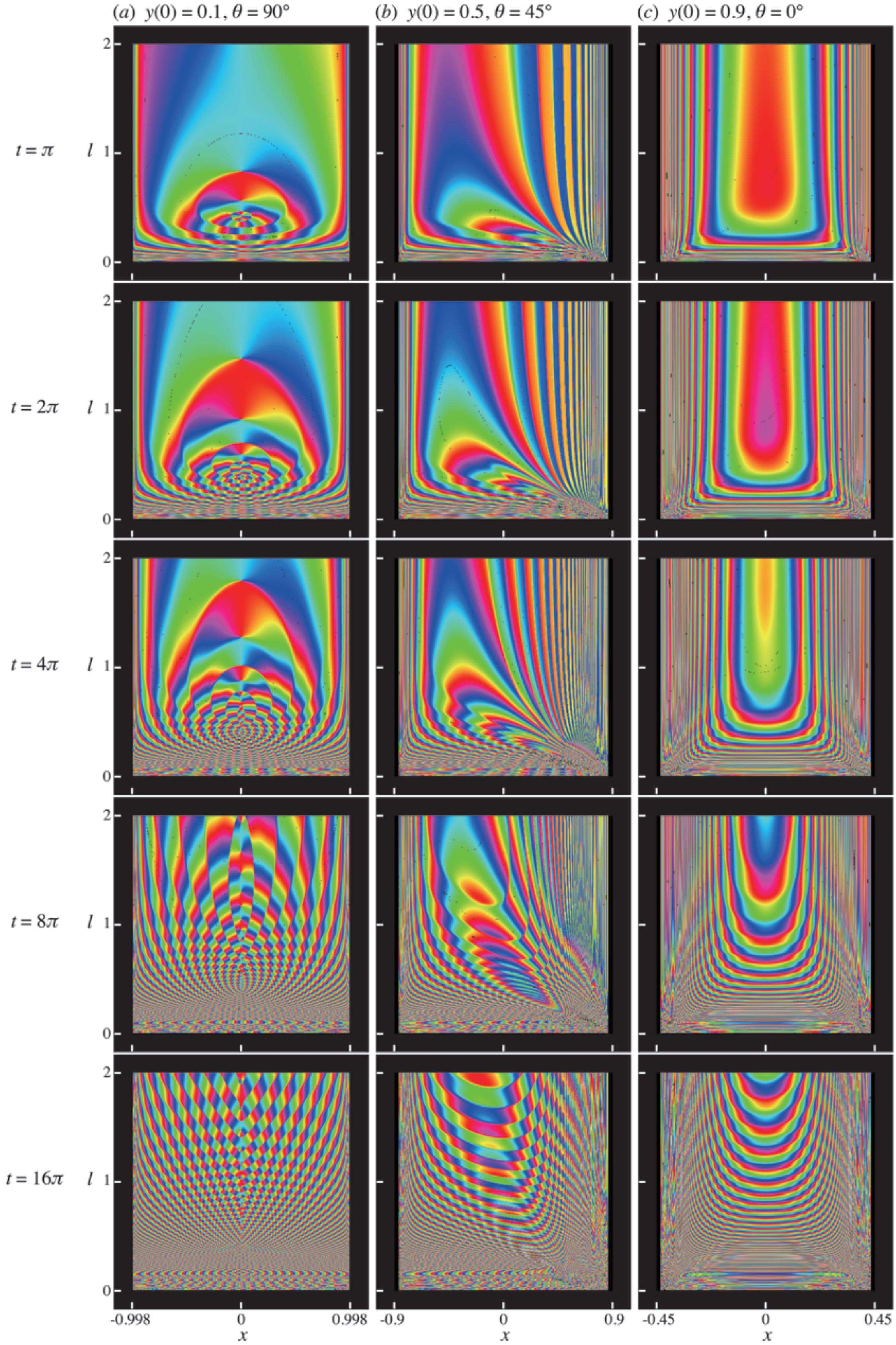


図９　*x(t) - l*



(a) y(0) = 0.1, θ = 90°
(b) y(0) = 0.5, θ = 45°
(c) y(0) = 0.9, θ = 0°
t = π
t = 2π
t = 4π
t = 8π
t = 16π
l
2
1
0
-0.998
0
0.998
-0.9
0.9
-0.45
0.45
x