秋田大学教育文化学部研究紀要　教育科学部門　69　pp.　1～6　2014

数学教育における教材開発の研究Ⅱ

―小学校算数科における補数の定義の拡張的扱い―

佐　藤　　　学

Research on Development of teaching materials in Mathematical Education Ⅱ

―Expansion of the definition of the Complement Number in Elementary Mathematics―

Manabu SATO

Abstract

We have studied the handling expansively complement the definition of "a+b=u.a and b are natural numbers. a is the complement number of b.b is the complement number of a".

I have examined "Need as viewed from the system of number calculation", "Expectations that learning toexpand" and "Specific pattern of decomposition of addend".

The unit numbers are 10 and 20,30,100,1000.

Future issues are considered from the aspect of learning and transition state of understanding of children.

Key words : complement number,unit number

Ⅰ　はじめに

小学校算数科において，数と計算領域は重要な内容として位置付いてきた。しかし，その意味合いは，計算技能に習熟する従来のものから，計算の意味理解と見積もりを重視することへと変わっている。

科学技術の急速な発展にあって，我々は計算という営みを機械に委ねつつあるが，全てを譲り渡すわけにはいかない。家庭生活ではごく簡単な計算はやはり手計算で行うことがあろうし，仮に機械に委ねたとしてもその結果の正誤の判断は自ら成すことである。無数のデータが氾濫する時代にあって，計算についての見通しや判断力はより重視されよう。技能的習熟だけに手立てを結論付けず，数に対する認識を高める指導を考えなければならない。ましてや，実質陶冶の視点に立てば，数の性質や計算の仕組みを基に計算を考えることは，数学的な考え方をはぐくむこと他ならない。

このように，本研究は，数に対する認識を高める計算指導の充実を図るという立場から，計算指導の改善の視点として，「筆算至上的な指導観を見直すこと」と「補数の考えを用いた計算の指導を取り入れること」の２点を述べてきた。（佐藤・椎名，2013）

本稿では，計算指導の改善として挙げた「補数の考えを用いた計算の指導を取り入れること」に関わり，指導の対象とする補数を検討することが目的である。

Ⅱ　補数

1　小学校算数科における一般的な定義

補数とは，ある数ａに加えると和の桁がひとつ上がる最小の数と定義する場合もあるが，本研究では，小学校算数科の計算指導における一般的な定義を採用する。

自然数ａ，ｂがａ＋ｂ＝10のとき，ａはｂの補数，またはｂはａの補数という。ａ＋ｂ＝10の関係において用いられることから，ａ，ｂのそれぞれを「10の補数」ともよんでいる。（本研究においても，ａ，ｂ，それぞれを「10の補数」とよぶ。）

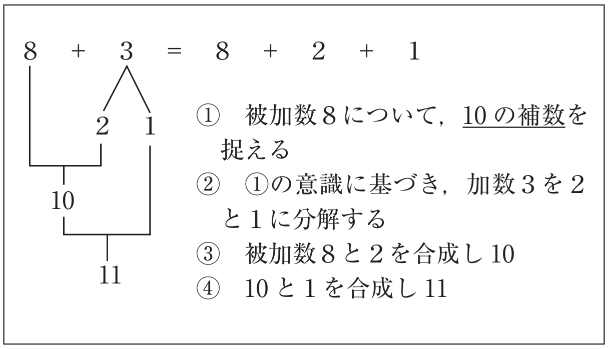

図１：（１位数）＋（１位数）の加法（加数分解の場合）

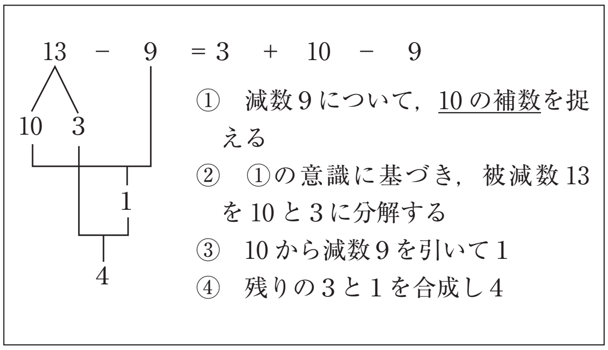

図２：（１位数）－（１位数）の減法（減加法の場合）

この補数を捉えることによって，「８＋３」のような（１位数）＋（１位数）で繰り上がりのある加法や，「13－９」のような（１位数）－（１位数）で繰り下がりのある減法の計算を処理することが可能となる。

具体的には，図１，図２のような思考過程において補数が用いられている。

２　本研究の視点－補数の定義の拡張的扱い－

補数の一般的な定義では，ａ＋ｂが10の場合である。ａ＋ｂの和が10であることは，全くもって，10という数のまとまりのよさにある。

数をまとめるという考えは，対象とする数が大きくなっても処理を可能にするための得策である。10のまとまりだけでなく，100のまとまり，1000のまとまりの例があるように，十進数の考えに従って拡張性を持つ。しからば，数と計算の密接な関係性を踏まえると，上述の定義にある「ａ＋ｂ＝10のとき」は限定的である。数と同様に，計算についても，十進数の考えに従って，ａ＋ｂの和を100，1000，…と拡張的に捉えようと所望することは荒誕でもない。

ここで，数との関係で計算指導の目的を，計算の必要とする場面から整理しておく。１つには，買い物に代表される日常生活における必要性がある。２つ目には経済，政治，文化の営みを行うための実務や技術における必要性がある。３つ目には，今後の学習を進めていくための必要性がある。これら３つの必要性に共通することの１つに，数の存在があることを確認しておきたい。日常生活，実務や技術，学習と場面こそ異なるが，それぞれの営みの上で数は重要な意味を持つ存在であり，我々は自らの意志によって，新たな数を生み出すための計算という操作を行っているのである。

図１に示した「８＋３」の計算は，扱える数範囲がごく20までの整数であった段階において学習するものである。しかし，扱える数範囲が100まで拡張されると，「80＋30」の計算を学習する。この計算は，10を単位とした数の見方により，「８＋３」と同じ計算とみることの他に，ａ＋ｂ＝100のときの補数を考えて計算することもできる。このように，数の拡張に伴って，補数の定義の「ａ＋ｂ＝10のとき」の10にあたる数（本研究では，まとまりのよい数をつくる意味から，単位数と呼び，ｕと表すことにする。）も拡張的に扱うことは，自然な流れである。

そこで，小学校算数科における必要な計算という枠組みの中で，単位数を拡張的に扱う可能性を検討したいと思う。

Ⅲ　小学校算数科における数計算指導の内容から見た単位数の拡張的扱いとその適正の検討

１　検討の視点

小学校算数科における数計算指導の内容から見た単位数の拡張的扱いとその適正の是非にあたっては，次の３点を考慮する必要がある。

(1)　数計算の系統性から見た必要性
(2)　学習の拡張性の期待
(3)　加数分解のパターンの特定

(1) 数計算の系統性から見た必要性

平成20年告示学習指導要領では，第１学年において「具体物をまとめて数えたり等分したりし，それを整理して表す活動（算数的活動，(1) ア）」（文部科学省，2008）が加えられた。この活動の１つに，具体物を，２ずつ，５ずつ，10ずつなどまとめて数えることがある。これらの活動が素地的経験となって，乗法の意味や十進位取り記数法を理解していくことが可能となる。したがって，２ずつ，５ずつ，10ずつなどまとめて数える活動は，少なくとも，乗法や十進位取り記数法について学習する前でなければならない。また，まとめて数えることを乗法に用いて終わりでは物足りない。繰り返し繰り返し用いることのできる重宝さ，必要性が重要である。

(2) 学習の拡張性の期待

小数1.2の見方を例にすると，0.1の12個分と見たり，１と0.2を合わせた数と見たりすることができる。これは，１の12個分を12，10と２を合わせた数を12と，整数における数の見方が小数の場合に拡張しているという。0.1を単位と見ることと，１を単位と見ることや乗法的構成，加法的構成が，同一の方法として存在するので拡張できるのである。さらに，0.12，0.012と示せば，先と同様に，単位の見方や乗法的構成，加法的構成の同一を捉え，これらの数にも拡張していける。

算数科の指導では，整数12の場合から小数1.2へと拡張させる段階では，液量図や数直線などを使って，何

が同一かを捉えることができるよう丁寧な指導を行う。しかし，0.012や0.0012といった小数を1つ1つ取り上げることはしない。1.2や0.12などの経験を踏まえ，児童自ら拡張をしていると考えられる。

学習したことの拡張に期待することは，こうした能力を向上させるとともに，指導の効率化にもつながる。学習したことの拡張を可能とする経験を精選することが重要と考える。

(3) 加数分解のパターンの特定

大正から昭和初期にかけて，乗法九九の指導において，総九九（1×1～9×9の81通りの九九）と制限九九（半九九ともいう。）のどちらで指導するかという論争（伊藤，2012）があった。制限九九は，交換法則を適用するため，九九の総数は36通りを省いた45通りの九九である。当時，制限九九を支持する理由の1つに，九九を暗記することが少なく児童の学習の負担が軽減されるというものがあった。最小限の知識で，最大限の学びを生み出すという視点に立てば，一理ある考えである。（実際には，制限九九では被乗数・乗数の混乱を避けることや，乗法の意味の重視すること，九九を完結させるとの達成感，九九の統一的な促え方などの理由から，総九九の採用に落ち着いた。）

これを補数の検討にあてはめると，単位数uの加数分解のパターンをいくつ経験させるかという問題になる。例えば，単位数が20の場合（後述，2－(1)を参照），分解のパターンは，1と19，2と18，3と17，…，19と1までの19種類ある。単位数がさらに大きくなればその種類も大きくなり，それら全ての種類を指導の対象にすること，経験させることには，無意味さしか残らない。そこで，数計算の系統性から見た必要性との関連から，数多くあるパターンから経験することに値する加数分解のパターンの特定が重要だと考える。

2 検討

(1) 単位数が20，30の場合

① 数計算の系統性から見た必要性

平成20年告示学習指導要領では，第1学年において，（1位数）＋（1位数）の加法及びその逆の減法の数計算を指導し，そこでは，単位数が10のときの補数が働く。

次の第2学年では，2位数の加法及びその逆の減法を指導する。この数計算で働く補数の対象とは何か，検討してみたい。

小学校学習指導要領解説は，2位数の加法の計算について，（1位数）＋（1位数）の計算と，10のまとまりの加法の（何十）＋（何十）の計算を基にするとしている。筆算は，それの形式化したものである。

（1位数）＋（1位数）の計算を基にするのだから，2位数の加法及びその逆の減法でも，単位数が10のときの補数が働く。つまり，単位数が10のときの補数を，2位数の加法及びその逆の減法まで使うことができる。習熟段階の実際に目を向けると，筆算は，各位の数の大きさを意識することなく，（1位数）＋（1位数）の加法及びその逆の減法を繰り返すだけになるので，さらに，第3学年の整数の加法及びその逆の減法（3位数や4位数）にまで，単位数が10のときの補数を使うことができる。この意味において，単位数が10のときの補数は，高い汎用性があるといえる。

今度は，第3学年の整数の乗法（2位数や3位数など）に注目してみる。

（2位数）×（1位数）」の筆算の指導では，図3のように行う。※印の534は，

① 9×6＝54。十の位の5は繰り上げて，一の位に4を書く。

② 80×6＝480。十の位以上の数字に注目して48＋5＝53。百の位に5，十の位に3を書く。

の過程を踏んで，通常は一段で書く。

```
    8 9
  × 7 6
  5 3 4……※
6 2 3
6 7 6 4
```

図3：89×76の筆算

しかし，このように一段に534と書くことは，これまでの計算を踏まえると，無理がある。②の48＋5＝53の計算は繰り上がりがあり，これまでの計算に従えば，8＋5の計算と，4＋1の計算と二段に分けて書くしかない。しかし，そのように計算過程を細かく分けて書くと，段数の多さから煩雑さが増し，誤処理を誘発することになる。したがって，534と一段で表す方がよい。534と一段で表すためには，48＋5の式について，48があと2で50になることを捉え，5を3と2に分解して48＋2＝50をし，それに，3を加えて53とする。ここで働く補数とは，単位数が50のときの補数である。補数の働きによって，わざわざ筆算を使わなくても，容易く計算できることになる。この点について，佐藤・椎名（2013）は，48＋5のような（2位数）＋（1位数）の加法及びその逆の減法を基本的な計算として捉えて指導することの意義を述べている。

② 学習の拡張性への期待

（2位数）＋（1位数）の加法及びその逆の減法は，被加数の一の位と加数を変えない場合でも，図4のとおり数多くある。また，これに付随して単位数も様々である。したがって，補数の考えを重視するとはいえ，網羅的に指導することは指導時間数が潤沢だとしても難しい。

18＋5を，筆算によらないで計算するためには，18

・8 ＋ 5 ＝ 8 ＋（2 ＋ 3）＝（8 ＋ 2）＋ 3 ＝ 13
…単位数 10 の働きによる計算
・18 ＋ 5 ＝ 18 ＋（2 ＋ 3）＝（18 ＋ 2）＋ 3 ＝ 23
…単位数 20 の働きによる計算
・28 ＋ 5 ＝ 28 ＋（2 ＋ 3）＝（28 ＋ 2）＋ 3 ＝ 33
…単位数 30 の働きによる計算
・38 ＋ 5 ＝ 38 ＋（2 ＋ 3）＝（38 ＋ 2）＋ 3 ＝ 43
…単位数 40 の働きによる計算
・48 ＋ 5 ＝ 48 ＋（2 ＋ 3）＝（48 ＋ 2）＋ 3 ＝ 53
…単位数 50 の働きによる計算
・58 ＋ 5 ＝ 58 ＋（2 ＋ 3）＝（58 ＋ 2）＋ 3 ＝ 63
…単位数 60 の働きによる計算
・68 ＋ 5 ＝ 68 ＋（2 ＋ 3）＝（68 ＋ 2）＋ 3 ＝ 73
…単位数 70 の働きによる計算
・78 ＋ 5 ＝ 78 ＋（2 ＋ 3）＝（78 ＋ 2）＋ 3 ＝ 83
…単位数 80 の働きによる計算
・88 ＋ 5 ＝ 88 ＋（2 ＋ 3）＝（88 ＋ 2）＋ 3 ＝ 93
…単位数 90 の働きによる計算
・98 ＋ 5 ＝ 98 ＋（2 ＋ 3）＝（98 ＋ 2）＋ 3 ＝ 103
…単位数 100 の働きによる計算

図４：48 ＋ 5 ＝ 53 に準じた計算とそこで働く単位数（u ≦ 100）

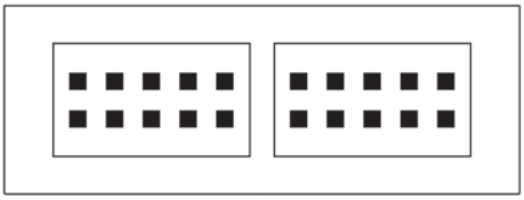

図５：20 の構成モデルの例

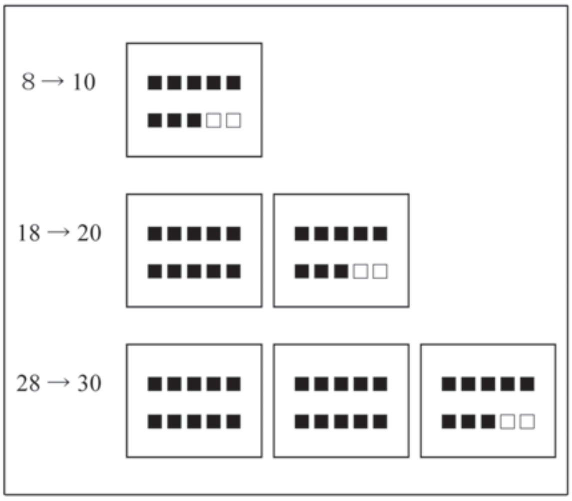

図６：20 の構成モデルの例

が単位数 20 に近い，または，あと 2 で単位数 20 になるといった見方が必要である。しかしながら，18 ＋ 5 を計算する段階までは，10 というまとまりで捉えることの経験は豊かにしてきているが，20 というまとまりで捉えるということはしてきていない。例えば，20 という数の構成では，図 5 のようなモデルを使うことがある。

図 5 は，一見 20 というまとまりを表しているかに見えるが，既習の 10 という数を基にして数を構成としていくため，この段階では 10 と 10 で 20 である。

また，20 に先だって，10 を超える数の捉え方も，10 と 1 で 11，10 と 2 で 12，10 と 3 で 13，…，10 と 9 で 19 と，10 のまとまりで数を捉えており，また 20 という数のまとまりで捉えていないため，あといくつで 20 になるかという見方もできない。8 ＋ 5 と 18 ＋ 5 は，被加数部分の表記は十の位に 1 が加わっただけで，単位数を 10 から 20 へと転移することなど容易に思えるが，20 という数のまとまりは全くの未経験なのである。したがって，単位数が 20 の場合は意図して指導する必要がある。

さらに，単位数が 30 の場合も意図的指導が必要なのか。

図 6 のように，8 のときはあと 2 で単位数 10 になる，18 のときはあと 2 で単位数 20 になる，28 のときはあと 2 で単位数 30 になる，と類似の経験を重ねていけば，38 ＋ 5 のときは 38 があといくつで直ぐ上の単位数になるか類推することができるであろう。当然，児童の実態によれば単位数が 40 の場合のモデルを表し理解させるというスタンスでも丁寧で悪くない。しかし，算数を創り出す学習者を願うならば，児童自らが，被加数が 8，18，28 のときの経験を基に，何十の単位数を定め，補数を捉えることを，積極的に期待しなければならない。

さらに望めば，被加数が 8 や 18 の経験から，被加数が 28 のときの単位数を定め，その補数を捉えることができて欲しいものである。これについては，児童の実態調査から改めて可能性を検討してもよい。

③　加数分解のパターンの特定

単位数が 10 の場合では，その分解は，1 と 9，2 と 8，3 と 7，…，9 と 1 と，9 通りであった。同じように，単位数が 20 の場合を考えると，1 ＋ 19，2 +18，3 と 17，…19 ＋ 1 と，19 通りとなる。

全ての場合を指導の対象とするのは，とても多い。そこで，実際の計算式から被加数について考えると，必要な分解のパターンは容易に特定できる。

図 7 に示すように，単位数が 20 の場合は，被加数が 11 ～ 19 の 9 通りしかない。被加数が 10 の場合は，10 ＋ b の計算であるから，補数の考えを必要とせず処理できる。また，被加数がさらに下回って 9 の場合は，単位数が 10 の計算となり，単位数が 20 の議論から離れてし

被加数		加数		
19	+	b	→単位数：20	加数分解：1 と n
18	+	b	→単位数：20	加数分解：2 と n
17	+	b	→単位数：20	加数分解：3 と n
16	+	b	→単位数：20	加数分解：4 と n
		…	…	…
12	+	b	→単位数：20	加数分解：8 と n
11	+	b	→単位数：20	加数分解：9 と n

図7：単位数が20のとき，特定される加数分解のパターン

まう。

単位数が 30 の場合も，被加数が 21 ～ 29 の 9 通りしかない。

(2) 単位数が 100，1000 の場合

① 数計算の系統性から見た必要性

(1)は，2位数＋1位数の加法及びその逆の減法であった。次に，2位数＋2位数の加法及びその逆の減法について考えて見る。日常生活における卑近な計算や概算との関係から，これを暗算でできるよう，平成 20 年告示学習指導要領では第3学年で指導することにしている。

$$\begin{aligned}100 - 43 &= 100 - (40 + 3)\\ &= \underline{(100 - 40)} - 3\\ &= 60 - 3\end{aligned}$$

図8：100 － 43 の暗算の仕方

第3学年で指導する暗算のうち，100 － 43 というような計算がある。この計算は，図8のように行う。

暗算は，数の大きさを意識した計算方法である。100 － 43 という式を見たとき，100 からまず 40 を引くことをし，正しい答えに接近するようにする。それが下線部の 100 － 40 である。

100 － 40 は，単位数が 100 の場合である。単位数が 100 については，図4に示す 98 ＋ 5 の計算（補数が1～9の計算）もあるが，100 － 40 の場合は補数の捉え方が相対的である。（図9参照。ただし，100 － 93 については，あと7で 100 という考えでも計算することができる。）

$$\begin{aligned}
&\cdot\ 100 - 13 = 100 - (10 + 3) = \underline{(100 - 10)} - 3\\
&\cdot\ 100 - 23 = 100 - (20 + 3) = \underline{(100 - 20)} - 3\\
&\cdot\ 100 - 33 = 100 - (30 + 3) = \underline{(100 - 30)} - 3\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
&\cdot\ 100 - 83 = 100 - (80 + 3) = \underline{(100 - 80)} - 3\\
&\cdot\ 100 - 93 = 100 - (90 + 3) = \underline{(100 - 90)} - 3
\end{aligned}$$

図9：100 － 43 に類似する計算の暗算の仕方

相対的な見方を伴う補数は，加法の場合でも必要とする。（図 10 参照。）

$$\begin{aligned}
35 + 27 &= 35 + (20 + 7)\\
&= \underline{(35 + 20)} + 7 \quad \cdots ア\\
&= \underline{\{(30 + 5) + 20\}} + 7 \quad \cdots ア'\\
&= \underline{\{(30 + 20) + 5\}} + 7 \quad \cdots ア''\\
&= 55 + 7 \qquad \cdots イ
\end{aligned}$$

図 10：100 － 43 の暗算の仕方（通常は，斜体文字部分のア’の段階，ア”の段階は省いて行う）

図 10 のアの段階とイの段階の間には，ア’の段階，ア”の段階がある。ア”の段階で（何十）＋（何十）を行っていることが，相対的な見方を伴うものである。

平成 20 年告示学習指導要領では，第1学年において，「簡単な場合について，2位数などの加法及び減法の計算の仕方を考えること。（A (2) 加法，減法，ウ）」（文部科学省，2008）とあり，具体的には，ここで述べた十を単位としてみられる数の加法，減法を行うとされているが，数と計算との密接な関連からいうと，その前提となる 100 までの数の理解において，相対的な見方を伴う補数を経験していることが望ましいと考える。

② 学習の拡張性への期待

学年が上がるにつれ，扱う数はさらに拡張し，付随して計算も拡張した数を処理するようになる。そうすると，単位数が 100 の場合だけでなく，1000 の場合，10000 の場合，…と扱っておく方がよいのか問題となる。

内容の3割削減がなされた平成 10 年告示学習指導要領では，皮を剥ぐかのように厳選の作業が行われた。平成 20 年告示学習指導要領では，これを反省し，第1学年の数範囲をおおよそ 120 までとし，記数法のルールをパターン化できるようにしている。120 までの記数法を経験することで，121 以降の数もそれまでの記数法と同じようにしていけると学習が拡張されるのである。

数の相対的な見方を伴う補数について学習の拡張性を考えると，数の拡張に伴って補数も指導することが望ましい。その際，10 の合成・分解のように，9種類全てをいつも扱うのではなく，800 と 200 で 1000 や 600 と 400 で 1000 などの数例から，10 の合成・分解と同じように捉えることや 100，1000 など十進法による数のまとまりで数を捉えることが拡張されていくことを期待したい。これは，児童も発達段階を上げているので，大いに期待できる。

これらのことから，少なくとも，単位数が 100，1000 の場合は扱うことがよいと考える。ただし，単位数が

1000 の場合は数例のみ扱うこととする。

③　加数分解のパターンの特定

この場合は，数の相対的な見方を伴うので，加数分解のパターンは，単位数が 10 の場合に類似する。単位数が 100 の場合では，10 と 90，20 と 80，30 と 70，…，90 と 10 の９種類であるし，単位数が 1000 の場合でも，100 と 900，200 と 800，300 と 700，…，900 と 100 の９種類である。学習の拡張性でも述べたように，これら全てを指導の対象にするのではなく，単位数が 10 の場合と類似することが捉えられる程度に扱うことがよいと考える。

Ⅳ　終わりにー補数の定義の拡張的扱いについての整理と今後の課題

補数の一般的な定義「自然数 a， b が a + b = 10 のとき， a は b の補数，または b は a の補数という」について，小学校算数科における必要な計算という枠組みから，「a + b = 10 のとき」の 10 にあたる単位数の拡張的扱いを検討してきた。

数と計算との密接な関係を強く意識すると，単位数を拡張的に扱っていくことは自然な流れである。

単位数の拡張的扱いの検討にあたっては，「数計算の系統性から見た必要性」「学習の拡張性の期待」「加数分解のパターンの特定」の３点から検討し，図 11 のように指導の対象を整理することができた。ただし，これらの指導にあたっては，単位数が 10，20，100 のように補数の考えが十分でない段階は全ての場合を取り上げる丁寧さは必要と考えものの，単位数が 30，1000 は単位数が 10，20，100 の場合の経験から類推させて捉えるよう学習の拡張性に期待することが，指導の効率性だけでなく，算数を創り出すという視点でも重要だと考える。

a ＋ b ＝ u	指導対象とする単位数
⋮　⋮　⋮	u ＝ {10，20，30，100，1000}
補数　補数　単位数	

図 11：補数と単位数との関係式及び指導対象の単位数

指導の対象化とした，単位数が 20，30，100，1000 について，児童にとっての困難度や学習の拡張性の様相を捉えることが，その適正を確実にすることだと考えており，今後の課題としたい。

文献

伊藤真治（2012）：大正・昭和初期における九九教授実践－教授案・指導案を手がかりとして－，滋賀大学教育学部紀要教育科学第 62 号，45 ～ 58

文部科学省（2008）：小学校学習指導要領解説算数編，57 ～ 58

佐藤学・椎名美穂子（2013）：数学教育における教材開発の研究－小学校算数科「補数」教材の開発意義－，秋田大学教育文化学部研究紀要教育科学第 68 集，17 ～ 24

佐藤学・椎名美穂子（2013）：小学校算数科における基本的な計算の範囲の再検討－その範囲を規定する児童の思考の負担の実際－，東北数学教育学会第 18 回初夏研究会（於：宮城教育大学），1 ～ 12