氏名（本籍）	湯本　純（茨城）
専攻分野の名称	博士（理学）
学 位 記 番 号	理博　第　11　号
学位授与の日付	令和　　6 年　3 月　22 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理工学研究科　総合理工学専攻
学位論文題目（英文）	グラフ理論とトポロジーに基づく格子フェルミオンの研究（Research on lattice fermions based on graph theory and topology）
論文審査委員	（主査）教授　小野田　勝 （副査）教授　河上　肇 （副査）教授　山村　明弘

論文内容の要旨

素粒子物理学とは，物質を構成する最小単位である素粒子の性質やこれらの間に生じる相互作用などを加速器実験や宇宙観測，理論的探究に基づいて研究する学問である．この素粒子物理の現象を記述することが可能な理論が場の量子論である．しかしながら，場の量子論は通常では連続的な時空上の理論として構築されるが，発散の問題などから理論を解析することが困難である．さらに理論の定式化で重要な経路積分においては非可算無限重の積分であるため，数学的に厳密な定義への障壁となる側面を内包している．一方で格子上の場の理論は時空間を離散化（格子化）し，格子点やそれらを繋ぐ線上に自由度を置くことで厳密に定義された場の量子論の定式化を提供している．加えて，原子核や核子を作る力である強い力を記述する量子色力学（QCD）の非摂動現象において，数値計算に基づく格子QCDは現実の物理を高精度に再現している．このように格子理論は場の理論の数学的に厳密な定式化を与え，かつ素粒子の非摂動現象を第一原理的に解析することができる唯一の理論である．

しかしながら，格子理論には「fermion　doubling」と呼ばれる難問が存在している．こ

れはQCDに必要な性質（カイラル対称性や並進対称性など）を格子上のfermionに対して課した際に，物理的なfermion自由度の他に余分な自由度も出現してしまうという問題である．これらの自由度はspecies（またはdoubler）と呼ばれ，各方向に周期的境界条件を課した4次元立方格子上のfermionについては16個のspeciesが出現することが知られている．これを回避する手法として（Wilson fermionやDomain-wall fermionなど）は存在するが，格子作用においてカイラル対称性を破る，または高価な計算コストを要するなどの課題点も存在している．

本博士論文は，speciesに関する以下の2点の新しい結果についてまとめたものである．

⑴ 有限体積格子上におけるDirac行列は，その格子fermionに対応するグラフのanti-symmetrized adjacency matrixとして表現することが可能であり，speciesの個数はこの行列のゼロモード（ゼロ固有値の個数と等価）として導出される．これにより多様体を格子離散化した格子においてもfermion speciesの個数は，対応するグラフのanti-symmetrized adjacency matrixの固有方程式を解くこと で導出されることが可能となった．

⑵ 先行研究からspeciesの最大個数が背景時空（格子）に依存するという状況証拠［下表参照］が豊富に発見されていることから，「fermion speciesの最大個数は，背景時空における各次Betti数の和に等しい」という新たな予想を提唱した．また，予想に関して前述の結果1で用いたspectral graph theoryの視点から証明の足がかりを提案した．

Table: Betti numbers and Maximal numbers of species

manifold M	sum of $\beta_r(M)$	maximal # of species
1-d torus	$1+1$	2
2-d torus	$1+2+1$	4
3-d torus	$1+3+3+1$	8
4-d torus	$1+4+6+4+1$	16
Torus T^D	$(1+1)^D$	2^D
Hyperball B^D	$1+0+0+\cdots$	1
Sphere S^D	$1+0+0+\cdots+1$	2
$T^D\times B^d$	$2^D\times 1$	2^D

本博士論文は申請者が筆頭著者である3つの論文［論文目録内の論文1,2,3］の内容を整理し，系統的に関連付け，さらにその後の進展について補筆したものであり，以下の構成となっている．

第一章では研究背景について述べる．特に格子上の場の理論に関する歴史的な背景や本研究の動機に関する部分について言及し，本論文に関する章立てと各章の簡単な説明についても触れる．

第二章においては格子上の場の理論の基礎的な内容について言及する．具体的には本論文において重要なnaive fermion のspecies について運動量空間における導出の方法を示す．また，fermion doublingを回避する手法であるWilson fermion やDomain-wall fermion についても触れ，species をどのように物理的，非物理的な自由度に分離するかを説明する．

第三章に関してはspectral graph theory としての格子上の場の理論を議論していくために，グラフやそれから得られる諸行列を定義する．また読者の理解の助けとなるように，各定義に関する具体例も併せて示した．

第四章では，前節で定義した spectral graph theory の概念を用いて以下の 3 つのグラフの場合におけるfermion species の個数を解析的に導出する．(1) cycle digraph のみで構成されたグラフ（各方向に周期的境界条件を課した格子），(2) simple directed path のみで構成されたグラフ（各方向に Dirichlet 型境界条件を課した格子），(3) これらを複合したグラフ（2 つの境界条件を複合した格子）の3つについて議論する．また前述したグラフにおける anti-symmetrized adjacency matrix の退化次数がそれぞれの境界条件における fermion species の個数と一致することを示す．

第五章では fermion species と背景時空の topology との関係について議論する．これまで得られた状況証拠をまとめ，それらに基づいた新たな予想について提唱する．また本章の最後には，この予想の証明への足がかりを提案する．

最終章はこれまでで得た結果をまとめ，今後の展望などを議論する．特に証明に関する部分について言及する．

論文審査結果の要旨

1　論文審査結果の要旨

個々の素粒子の性質やそれらの間に働く相互作用によって引き起こされる物理現象は，場の量子論を用いて精緻に記述することができる。しかし，連続時空上の場の量子論は，非可算無限自由度に起因する発散を内包しており，「くりこみ」と呼ばれる方法で発散を処理する必要がある。くりこみを系統的に施せるかどうかは，理論の舞台となる時空の次元やそこに導入される場の構成に依存するため，整合性のとれた理論が常に構築できるとは限らない。一方，格子上の場の理論（格子理論）は，時空を格子状に離散化し，格子点やそれらを繋ぐ線上に自由度を置くことで正則化されており，時空の次元や場の構成に依らずに厳密にその量子論を構築することができる。数値解析との相性が良く，シミュレーションにより非摂動現象を高精度に再現できることが知られてい

る。原子核や核子を作る強い力の原因となる強い相互作用は，量子色力学（QCD）により記述することができ，QCDを格子上で定義した格子QCDを用いた数値解析は，強い相互作用による非摂動現象を第一原理的に解析することができる唯一の方法である。しかし，本来のQCDが持つべき対称性（カイラル対称性や並進対称性など）を格子理論に課すと，低エネルギー領域のエネルギー固有モードにおいて，物理的に意味のあるモードの他にも不要なモードが余分に出現することが知られており，フェルミオン・ダブリング問題または略してダブリング問題と呼ばれている。

前述のエネルギー固有モードは，γ行列の自由度に応じた個数のモードを一つのまとまりとして，speciesと呼ばれる組を形成する。余分なspeciesの個数を減らすこと，または無くすことが，ダブリング問題を緩和または回避する処方となる。代表的な処方として，Wilsonフェルミオンや Domain-wall フェルミオンなどの方法が知られている。しかし，これらの方法にはいつかの欠点が存在し，例えば，自発的対称性の破れが起きる以前にカイラル対称性を明示的に破ってしまう，高い計算コストを要求するなどの点が問題視されている。

本論文は，グラフ理論および位相幾何学における諸概念を用いてspeciesの個数と時空のトポロジーとの関係を調べ，その知見をもとにダブリング問題に対する従来とは異なる処方を提案するものである。主な成果を以下にまとめる。

(1) 有限格子上に定義されたフェルミオン系のDirac演算子の表現行列は，その模型に対応するグラフの反対称隣接行列を用いて効率的に構成することができ，この行列のゼロ固有値の数をγ行列の階数で割った数としてspeciesの個数を導出することができる。つまり，様々な境界条件を持つ格子に対応するグラフを考えることで，そのような格子上のフェルミオン系に現れるspeciesの個数を効率的に導出することができる。

(2) 様々な格子上のフェルミオン系に対するspeciesの最大個数を調べ，「ある格子上のフェルミオン系のspeciesの最大個数は，その格子の連続極限に対応する連続時空のBetti数の総和と等しい」という予想を導き出した。さらに，この予想の証明に向けた足がかりを示し，スペクトルグラフ理論の観点からその妥当性を考察している。なお，この予想が正しければ，Betti数の総和が小さい連続時空を選び，それを極限とする格子を構成することで，ダブリング問題を緩和または回避できることになる。

最後に，論文全体の構成について述べる。第一章では，格子理論の歴史的背景や研究

の動機について説明し， 第二章および第三章では，後の議論の準備として順に，格子上の場の理論およびグラフ理論の基礎事項が説明されている。第四章では，グラフ理論を用いて前述の結果(1)が示されている。また，この結果をsimple directed path（Dirichlet型境界条件と対応），及びcycle digraphとsimple directed graphの複合型（周期的境界条件とDirichlet型境界条件の複合型に対応）に適用し，様々な格子上のフェルミオン系に対してspeciesの最大個数の依存性が調べられている。 第五章では，前記以外の事例も含めて，speciesの最大個数と時空のトポロジーとの対応についてまとめ，結果(2)が示されている。最終章では，全体のまとめと今後の展望が議論されている。

以上より，本論文は，博士（理学）の学位論文として価値があるものと認められる。

２　最終試験結果の要旨

博士論文公聴会において，申請者が本論文について口頭発表を行った後，その内容について質疑応答を実施し最終試験とした。質問の内容は以下の通りである。

(1) 格子点とそれらをつなぐ辺だけからなる格子で時空連続体のトポロジーや対称性を表現するためには,本来は連続極限をとる必要がある。有限な格子上のspeciesの個数が,連続極限の時空の位相不変量と関係づけられるのはどうしてか。
(2) 高次元多様体の高次のBetti数は高次のチェインの情報を含む。一方，グラフは点と辺だけからなるので，高次元のグラフでも１次までのBetti数しか現れない。にもかかわらず両者が関係付けられるのは，どのような仕組みによるものか。
(3) 本論文で取り上げた格子上のフェルミオン系はいずれもグラフ理論と対応付けられるとのことであるが，対応付けられない事例も存在するのか。存在する/しないのそれぞれの場合に応じて，対応付けられない/付けられる理由を述べよ。
(4) 結果(2)の予想の証明への足がかりとして示された議論は，すべての方向でフーリエ変換が可能であることを前提としている。この前提が成り立たない時空に対しても，証明への足がかりと見なせるのか，あるいは何らかの修正や拡張が必要なのか説明せよ。

いずれにも的確な説明がなされたので，学位審査委員会は最終試験を合格と判断した。