

スペクトル・エレメント法による立方体容器内自然対流の安定性*

足立 高弘

Stability of Natural Convection in a Cubic Cavity by Spectral Element Method*

Takahiro ADACHI

Department of Mechanical Engineering, Akita University, 1-1 Tegata-Gakuen, Akita, 010-8502 Japan

Three dimensional linear stability analysis for onset of natural convection flow in a cubic cavity is performed by using the spectral element method. The cubic cavity is placed horizontally and is heated from the bottom surface and cooled from the upper one. The lateral boundaries are assumed to be rigid and in a thermally medium state between conducting and insulating which can be established by introducing Biot number. The fluid is in a motionless state if the Rayleigh number is small. On the other hand, natural convection occurs if the Rayleigh number exceed a critical value. The critical Rayleigh numbers for the onset of the natural convection are evaluated numerically for various Biot numbers by constituting eigenvalue problem using linear stability theory. In addition, the velocity and temperature fields at the critical state are obtained and discussed.

Key Words : Stability, Natural Convection, Spectral Element Method, Critical Rayleigh Number, Cubic Cavity, Eigenvalue Problem

1. 緒 言

密閉容器の中に生じる熱対流現象は、工業装置のみならず自然界においてもしばしば観察される重要な現象である。容器の下面を加熱し上面を冷却することにより一定の温度差を供給する場合には、温度差が小さいと流体は静止し熱平衡状態になる。一方、温度差がある値を超えると静止状態は不安定になり自然対流が発生する。この臨界点を求める問題は、基本的ではあるが重要な問題としてこれまでも研究が行われてきた。

2次元性を仮定した矩形領域中での熱対流の発生条件については、側壁が完全熱伝導（等温）条件の場合や完全断熱条件の場合について、Velte⁽¹⁾, Kurzweg⁽²⁾, Cliffe and Winters⁽³⁾, Lee et al.⁽⁴⁾や Mizushima⁽⁵⁾により詳しく調べられている。その結果、容器の縦横比が自然対流の発生条件に大きく影響することが示されている。

一方、完全に周囲を側壁で取り囲まれた領域での熱対流の臨界点を3次元的に求める問題は容易ではなく、Davis⁽⁶⁾と Davies-Jones⁽⁷⁾による研究の他には

ほとんど行われて来なかった。最近、Mizushima and Matsuda⁽⁸⁾は、すべての境界面が完全熱伝導という条件の下で立方体容器に発生する熱対流の臨界点をスペクトル法により精度良く求めている。一方、側壁が断熱条件の下で、柳瀬ら⁽⁹⁾はある初期条件に対する発展方程式の数値シミュレーションを差分法を用いて行い自然対流の遷移を調べている。また、Mizushima and Nakamura⁽¹⁰⁾は、側壁が断熱条件の場合にもスペクトル法を用いて臨界点の値を精度よく求めている。

より現実的で一般性のある側壁の温度条件として、熱伝導と断熱の中間の条件が考えられる。しかし、この場合には正確な臨界点の値は未だに求められていない。また、臨界状態における速度場や温度場の詳細も明らかでない。そこで、本報においては水平に置かれた立方体容器に満たされた流体を下面加熱し上面冷却したときに生じる自然対流の発生条件を一般的な側壁温度条件の下で調べる。すなわち、側壁の温度条件が、完全熱伝導と完全断熱との中間の条件の場合を取り扱う。線形安定性理論とスペクトル・エレメント法を用いた固有値解析により臨界点を3次元的に求める。さらに、臨界状態における速度場と温度場についての考察を行う。

* 原稿受付 2003年5月12日
秋田大学工学資源学部機械工学科 (〒010-8502 秋田市
手形学園町1-1)
Email: adachi@ipc.akita-u.ac.jp

Bi : ビオ数

d^* : 立方体容器の1辺の長さ, 代表長さ

\mathbf{k} : z 方向の単位ベクトル

g^* : 重力加速度

h^* : 熱伝達係数

p : 圧力

\tilde{p} : $\tilde{p} = p/Pr$

Pr : プラントル数

Ra : レイリー数

t : 時間

T : 温度

T_0^* : 参照温度

$\mathbf{u} = (u, v, w)$: 速度ベクトルとその成分

$\mathbf{x} = (x, y, z)$: 座標成分

β^* : 体膨張係数

ΔT^* : 上面と下面の温度差

κ^* : 温度伝導率

ν^* : 動粘性係数

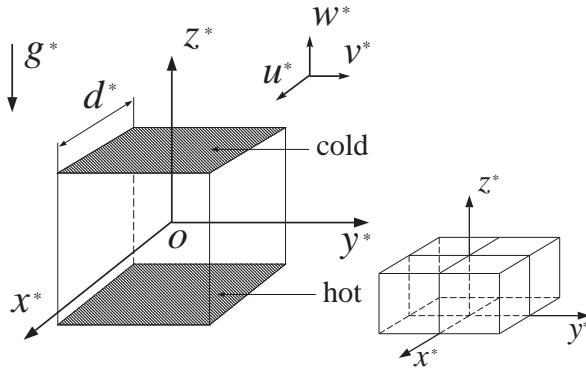
ρ^* : 密度

θ : 平衡温度場からのずれ温度, $T = -z + \theta$

λ^* : 容器の熱伝導率

* : 次元を有する物理量を表す添え字

2. 定式化



(a) Whole geometry (b) 4 spectral elements

Fig. 1 Geometry and co-ordinates.

2.1 基礎方程式 図1(a)に示すように, 水平に置かれた1辺の長さが d^* の立方体容器の中心を原点とし, 水平方向の一辺に沿って x^* 軸をとり, 他の一辺に沿って y^* 軸, 鉛直方向に z^* 軸をとる. 容器の下面を等温加熱し, 上面を等温冷却することにより各々の温度を $T_0^* \pm \Delta T^*/2$ に保つ. T_0^* は参照温度で一定

値である. このとき, 無次元変数を以下のように定義する.

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{d^*}, \quad t = \frac{t^*}{(d^{*2}/\kappa^*)}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{(\kappa^*/d^*)},$$

$$T = \frac{T^* - T_0^*}{\Delta T^*}, \quad p = \frac{p^*}{(\rho^* \kappa^{*2}/d^{*2})}. \quad (1)$$

ここで, κ^* , β^* , ρ^* はそれぞれ流体の温度伝導率, 体膨張係数, 密度であり, g^* は重力加速度である. アスタリスク*の付いた物理量は次元を有することを意味する. 流れは非圧縮粘性流とし, 上記の無次元変数とブジネスク近似を用いると, 基礎方程式となる連続の式, ナビエ・ストークス方程式およびエネルギー方程式は次式ようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Ra Pr T \mathbf{k}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (4)$$

ここで, Ra と Pr はそれぞれ, レイリー数およびプラントル数であり, 次式のように定義される.

$$Ra = \frac{\beta^* g^* d^{*3} \Delta T^*}{\kappa^* \nu^*}, \quad Pr = \frac{\nu^*}{\kappa^*}. \quad (5)$$

2.2 線形攪乱方程式 熱対流の発生限界においては, 安定性交替の原理が成り立つので, $\partial/\partial t \sim 0$ とすることができる⁽¹¹⁾. このとき, 式(2)~(4)を線形化すれば, 熱対流の発生条件に関する線形攪乱方程式は次式ようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \tilde{p} = \nabla^2 \mathbf{u} + Ra \theta \mathbf{k}, \quad (7)$$

$$w + \nabla^2 \theta = 0. \quad (8)$$

ここで, $\tilde{p} = p/Pr$ である. 温度場 T は, 熱伝導による平衡温度場 $-z$ と攪乱温度場 θ に分解し, $\theta = T + z$ としている. 式(6)~(8)から, 熱対流の発生条件を支配する無次元パラメータはレイリー数のみでありプラントル数に依らないことがわかる.

2.3 境界条件 立方体容器の壁面は固体壁であるとし, 壁面上で流速はゼロとする. 温度に関しては, 上下壁面間の無次元温度差が1となるように, 下壁面では等温加熱し上壁面では等温冷却とする. 側壁については, 完全熱伝導条件と完全断熱条件の中間の温度条件を考える. これらの条件を整理すると以下のようなになる.

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{1}{2}, \quad y = \pm \frac{1}{2}, \quad z = \pm \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$$Bi\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$Bi\theta + \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{1}{2}, \quad (11)$$

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2}. \quad (12)$$

ここで, $Bi = h^*d^*/\lambda^*$ はビオ数であり, h^* は流体側の熱伝達係数, λ^* は容器の熱伝導率である. $Bi \rightarrow \infty$ で完全熱伝導条件, $Bi = 0$ で完全断熱条件となる.

3. 計算方法

3.1 数値計算法 数値計算は, スペクトル・エレメント法を用いて行う. スペクトル・エレメント法は, スペクトル法の高い精度と有限要素法の柔軟な領域分割特性や境界条件の取り扱い易さとを併せ持つ計算法である⁽¹²⁾⁽¹³⁾. 一般に, スペクトル法は高精度ではあるが複雑な境界を持つ問題には適用が難しい. 一方, 有限要素法は領域分割に柔軟性はあるが精度は低い. したがって, それら2つの方法の長所を併せ持つスペクトル・エレメント法は, 複雑な境界を持つ問題を高精度に取り扱う場合に最も威力を発揮する方法である⁽¹⁴⁾. ここでは, 高い精度と境界条件の取り扱い易さの点からスペクトル・エレメント法を用いる.

対流発生時においては, z 方向に渦が一つ発生するので, 速度および温度は次式に示す z 方向に関する対称性を有する.

$$u(o), v(o), w(e), \theta(e). \quad (13)$$

ここで, 例えば $u(o)$ は z 方向に奇関数で表されることを示す. このとき, 図1(b)に示すように計算領域を $1/2$ に減らすことができる. その計算領域を4つの立方体要素に分割する. そして, 各々の要素を座標変換によって $[-1,1]$ を定義域とする局所計算座標系に変換する. 例えば, 第 k 番目の要素が x 方向の長さ L^k で, $[a^k, b^k]$ の区間とすると, 局所計算座標計 \bar{x} への座標変換式は次式となる.

$$\bar{x} = \frac{2}{L^k}(x - a^k) - 1. \quad (14)$$

第 k 要素の内部で, 速度, 温度および圧力を $N+1$ 個のチェビシェフ・ロバット点を通るラグランジュ多項式で近似すると

$$\begin{pmatrix} u^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ v^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ w^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \theta^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix} = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \begin{pmatrix} u_{lmn}^k \\ v_{lmn}^k \\ w_{lmn}^k \\ \theta_{lmn}^k \end{pmatrix} h_l(\bar{x})h_m(\bar{y})h_n(\bar{z}), \quad (15)$$

$$\tilde{p}^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{p}_{lmn}^k h_l(\bar{x})h_m(\bar{y})h_n(\bar{z}), \quad (16)$$

$$(k = 1, \dots, 4)$$

となる. ラグランジュ多項式は次式のように定義される.

$$h_i(\bar{\zeta}) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \frac{1}{\bar{c}_j \bar{c}_n} T_n(\bar{\zeta}_j) T_n(\bar{\zeta}), \quad (17)$$

$$\bar{c}_l = \begin{cases} 1, & l \neq 0, N \\ 2, & l = 0, N \end{cases}$$

ここで, T_n は n 次のチェビシェフ多項式であり, $i = l, m, n$ および $\bar{\zeta} = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ である. なお, チェビシェフ・ロバット点は次のように定義される.

$$\bar{\zeta}_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (18)$$

展開式(15)および(16)を式(6)~(8)に代入し, 弱形式を作りガレルキン法を用いると, 展開係数である節点値ベクトル $(u_{lmn}^k, v_{lmn}^k, w_{lmn}^k, \theta_{lmn}^k, \tilde{p}_{lmn}^k)$ に関する第 k 番目の要素における代数方程式が得られる. それらを $k = 1, \dots, 4$ まで加えあわせれば全体の代数方程式が行列の形で

$$Aa = RaBa \quad (19)$$

のように得られる. 式(19)を行列の固有値問題としてQR法により数値的に解くことにより, 臨界レイリー数 Ra_c とその固有ベクトルを求める. 安定性交替の原理が成り立つことから, 固有値はすべて実数として得られる. 得られた固有値の中で最も小さい値を持つものが臨界レイリー数となる.

4. 計算結果

4.1 臨界レイリー数 得られた固有値の収束性を調べるために, 代表的な場合として, 完全熱伝導 $Bi \rightarrow \infty$, 完全断熱 $Bi = 0$ および完全熱伝導と完全断熱の中間の $Bi = 5$ の3通りのビオ数に対して得られた臨界レイリー数と展開の打ち切り項数 N および全節点数との関係を表1に示す. 比較のために, Mizushima and Matsuda⁽⁸⁾と Mizushima and Nakamura⁽¹⁰⁾の結果も示す.

項数 N の値が増加するにつれて臨界レイリー数が収束していることがわかる. $Bi = 0$ および $Bi \rightarrow \infty$ については, $N = 6$ でほぼ5桁程度まで収束しており, 収束性は良好であると見なすことができる. $Bi = 5$ の場合には少し収束性は劣るが, $N = 6$ で3桁程度収束しており, $N = 6$ と7では相対残差が0.5%以内に収まっている.

Table 1 Critical Rayleigh numbers with truncation parameters N .

N	Nodes	$Bi \rightarrow \infty$	$Bi = 0$	$Bi = 5$
4	1728	6776.41	3386.34	4566.64
5	3160	6792.91	3387.82	5034.68
6	5232	6797.73	3388.50	5128.14
7	8064	6797.74	3388.53	5150.04
Ref.(8,10)	—	6798	3389	—

本研究で得られた完全熱伝導条件の場合の臨界レイリー数の収束値は、 $Ra_c = 6797.7$ であり、完全断熱条件の場合の臨界レイリー数の収束値は、 $Ra_c = 3388.5$ である。これらの値は、Mizushima and Matsuda⁽⁸⁾ および Mizushima and Nakamura⁽¹⁰⁾ により得られた値と有効数字 4 桁の精度で非常によく一致している。一方、柳瀬ら⁽⁹⁾ は、完全断熱条件の場合の臨界レイリー数を $Ra_c = 6050$ と求めている。しかし、彼ら自身この値は臨界レイリー数の上限値であり、真の値はさらに小さい可能性が高いと述べている。以上のことから、本研究で得られた値は信頼のおける結果であると見なすことができ、これ以後は打ち切り項数 $N = 6$ として計算を行う。

ピオ数をゼロから無限大まで変化させたときの臨界レイリー数を求める。図 2 に臨界レイリー数とピオ数との関係を示す。臨界レイリー数はピオ数の値に依存して不連続に変化する。すなわち、臨界レイリー数は、(i) $Bi < 1.914$, (ii) $1.914 < Bi < 3.883$, (iii) $3.883 < Bi < 4.211$, (iv) $4.211 < Bi < 6.873$, (v) $6.873 < Bi$ の範囲にある 5 本の異なる曲線で表されている。これらの曲線は線形中立安定曲線であり、曲線よりも小さなレイリー数に対しては容器内の流体は静止している。一方、曲線よりも大きなレイリー数に対しては、静止状態は不安定になり対流が発生することを示している。また、それぞれの曲線は、次節で詳しく述べるように発生する対流のパターンの違いを示すものである。

ピオ数がおおよそ $Bi > 100$ の範囲においては、臨界レイリー数は完全熱伝導条件の臨界レイリー数の値に漸近し、 $Bi < 0.1$ の範囲においては完全断熱条件の値に漸近していることがわかる。ピオ数が $1 < Bi < 10$ の範囲においては、臨界レイリー数はピオ数の値に依存して複雑な挙動を示し、 $Bi = 4$ 近傍において最も小さくなり $Ra_c \sim 1000$ 程度になる。これは、無限に広い平行平板間に発生する熱対流の臨界条件 $Ra_c = 1708$ ⁽¹¹⁾ よりも小さな値になっている。一般に側壁の存在は、

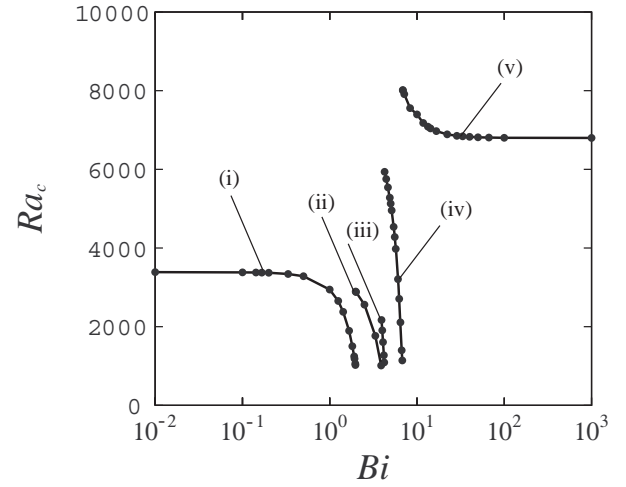


Fig. 2 Critical Rayleigh number against Biot number.

流れを安定化させ無限平行平板間の場合よりも臨界レイリー数を大きくすると考えられる。しかし、本研究では側壁が存在するにもかかわらず、臨界レイリー数は $Ra_c = 1708$ よりも小さくなっている。これは、温度条件に依存するところが大きく、温度条件を熱伝導と断熱の間の条件にした場合には流れを不安定にさせる効果があることを示している。

4.2 臨界状態における速度場と温度場 固有値解析で得られた固有値に対する固有ベクトルは、臨界状態における流れ場と温度場に対応している。その流れ場と温度場の可視化を行う際に、本研究では可視化ツールの AVS を用いる。

図 3 に完全熱伝導条件 ($Bi \rightarrow \infty$) と完全断熱条件 ($Bi = 0$) の場合における流線および等温線を示す。図 3(a) に完全熱伝導条件の場合における流線を示す。この場合には、容器の中心に $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ 方向に中心軸を持つ一つのロールが全領域を占めるような流れになっている。対応する温度場を図 3(b) に示す。この温度場は、熱伝導状態からの温度のずれ θ を等温線 ($z = 0$ 平面) で表している。温度場では、2 個の同心楕円球が並んだような構造になっている。

図 3(c) に完全断熱条件の場合の、臨界状態における流線を示す。この場合には流れの構造は、容器の中心に $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ 方向に中心軸を持つ一つのロールが全領域を占めるような流れになっている。図 3(d) に、断熱条件の場合の温度場を示す。温度場では、同心楕円半球 2 個が、速度場のロール軸を挟んで並んだような構造になっている。

方程式 (6) ~ (8) および境界条件 (9) ~ (12) は、 x と

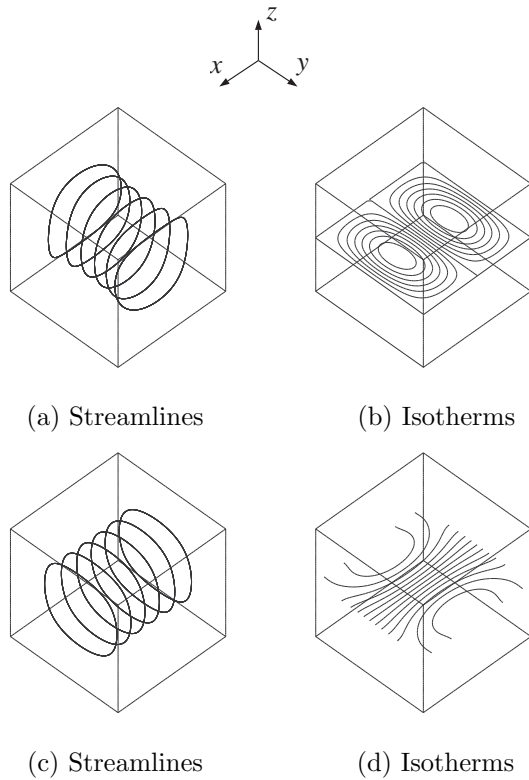


Fig. 3 Flow and Temperature Fields. (a),(b) $Bi \rightarrow \infty$, (c),(d) $Bi = 0$.

y の交換 ($x \rightarrow y, y \rightarrow x, u \rightarrow v, v \rightarrow u$) に関して不変である．すなわち， x 方向に軸を持つロールと y 方向に軸を持つロールは同じモードとなる．したがって，本研究で得られた， $Bi \rightarrow \infty$ と $Bi = 0$ の臨界状態における流れ場および温度場は同じモードである．このようは描像は，Mizushima et al.^{(8) (10)} により示された結果と一致している．

図 4 に中立曲線 (i) と (v) 上の例として， $Bi = 0.1$ と $Bi = 100$ の場合における流線と等温線を示す．この場合の臨界レイリー数の値は， $Bi = 0$ と $Bi \rightarrow \infty$ の値にそれぞれ漸近している．しかし，流れ場と温度場は， Bi が厳密にゼロあるいは ∞ の場合とは異なっている．図 4 に見られる流れ場と温度場においては， x と y の交換に関して不変であると同時に，流れ場と温度場は $y = x$ に関して対称な構造になっていることがわかる．また，これらの場はロール軸の方向が $Bi = 0$ および $Bi \rightarrow \infty$ の場合のものとはずれており， $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ 方向に軸を持つロール構造となっている．

中立曲線 (ii), (iii), (iv) 上の代表例として， $Bi=2.5$, 4 および 5 の場合の流線と等温線を図 5 にそれぞれ示す． $Bi = 4$ と 5 の場合には，流れ場と温度場は $y = x$

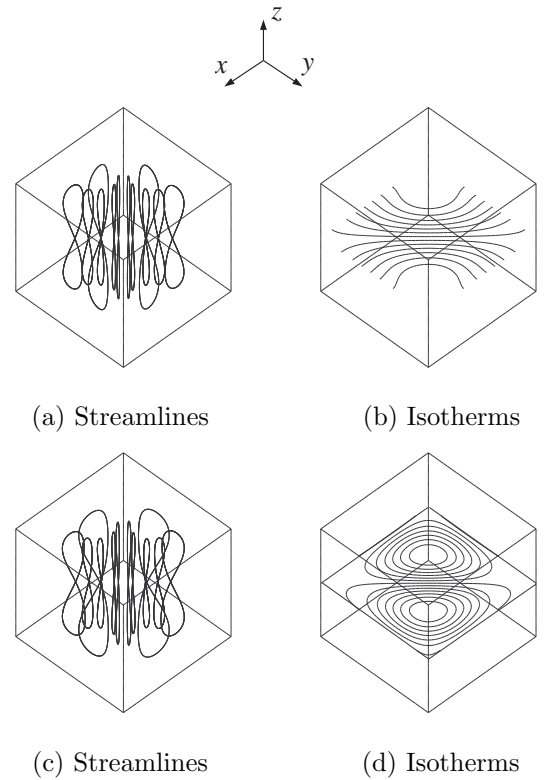


Fig. 4 Flow and Temperature Fields. (a),(b) $Bi = 0.1$, (c),(d) $Bi = 100$.

に関して対称となっている． $Bi = 4$ の場合には，容器の中心に 4 個の円錐の頂点が集まるような構造を持つ場になっている．他方， $Bi = 5$ の場合の場の様子は， $y = -1/2$ 平面の中心から $x = -1/2$ 平面の中心まで 90° 曲がった軸を有するロール構造として特徴づけることが出来る．一方， $Bi = 2.5$ の場合には，流れ場と温度場は $y = x$ に関して反対称となっている．この場合には， $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ 方向に軸を持つロール構造であると特徴づけることが出来る．

5. 結 言

水平に置かれた立方体容器の下面を加熱し上面を冷却するとき自然対流が発生する条件を線形安定性理論を用いて調べた結果，以下の結論が得られた．

1. ビオ数を導入することにより，側壁の温度境界条件を完全熱伝導条件，完全断熱条件およびそれらの中間的な条件にした場合について，臨界レイリー数をスペクトル・エレメント法を用いて高精度に求めた．
2. 臨界レイリー数はビオ数の値に依存し，異なる 5 通りの線形中立安定曲線で与えられることがわ

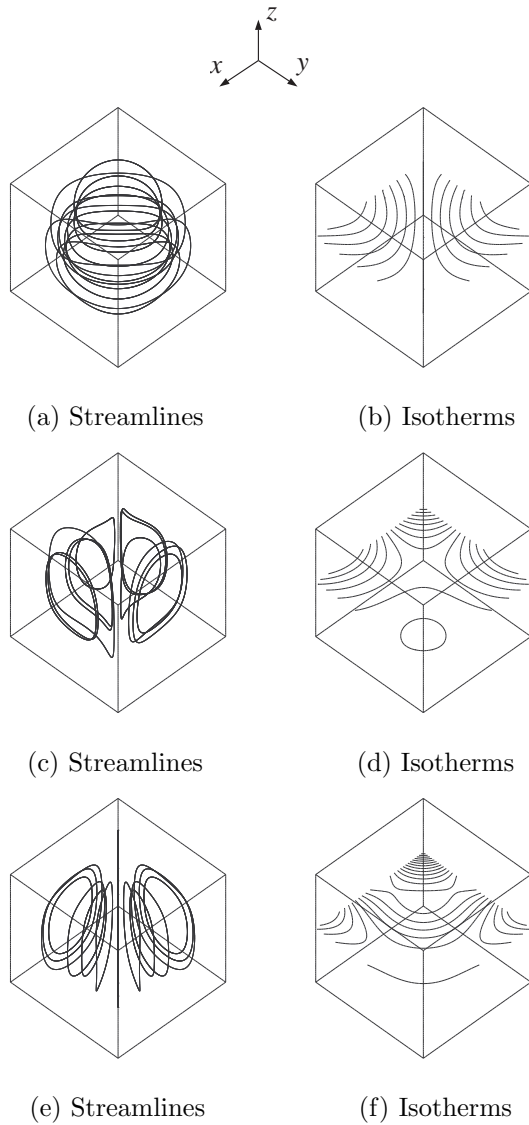


Fig. 5 Flow and Temperature fields. (a),(b) $Bi = 2.5$. (c),(d) $Bi = 4$. (e),(f) $Bi = 5$.

かった。

3. 側壁の温度条件が完全熱伝導条件と完全断熱条件との中間的な条件の場合には，臨界レイリー数の値が無限平行平板間の場合の値よりも小さくなることがわかった．($Bi \sim 3.88$ のときに $Ra_c \sim 1016$)
4. 臨界状態における流れ場と温度場のパターンは，ピオ数の値により線形中立安定曲線で示される5通りに分類されることがわかった．そして，それぞれのパターンの詳細を明らかにした．

参考文献

- (1) W. Velte, Arch. Ration. Mech. Analysis, **16**, (1964), 97-124.
- (2) U. Kurzweg, Int. J. Heat and Mass Transf., **8**, (1965), 35-41.
- (3) K. A. Cliffe and K. H. Winters, J. Compt. Phys., **67**, (1986), 310-326.
- (4) N. Y. Lee, et al., Int. J. Heat Mass Transf., **32**, (1989), 513-520.
- (5) J. Mizushima, J. Phys. Soc. Jpn., **64**, (1995), 2420-2432.
- (6) S. H. Davis, J. Fluid Mech., **30**, (1967), 465-478.
- (7) R. P. Davies-Jones, J. Fluid Mech., **44**, (1970), 695-704.
- (8) J. Mizushima and O. Matsuda, J. Phys. Soc. Jpn., **66**, (1997), 2337-2341.
- (9) 柳瀬眞一郎・他2名, 機論, **68-668**, B(2002), 1022-1029.
- (10) J. Mizushima and T. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn., **72**, (2003), 197-200.
- (11) P. G. Drazin and W. H. Reid, Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, (1981), §2.
- (12) A. T. Patera, J. Compt. Phys., **54**, (1984), 468-488.
- (13) G. E. Karniadakis and S. J. Sherwin, Spectral/hp Element Methods for CFD, Oxford University Press, (1999), §2.
- (14) T. Adachi and H. Uehara, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **41**, (2003), 601-613.