

論文

弾性波の遷移層による反射と透過*

大好 直**・隋 広 軍***

Reflection and Transmission of Elastic waves by a Transition Layer

Tadashi OHYTSHI** and Guang Jun SUI***

Abstract

Basic analysis on reflection and transmission phenomena of elastic harmonic waves has been made, as a pilot study for ultrasonic non-destructive characterization of complex material such a functionally gradient material. A transition layer in this basic analysis is modeled by a homogeneous isotropic elastic layer, and the phenomena is explained by the reflection and transmission coefficients. Representative numerical examples of the coefficients to the soft layer and the hard layer show us some clues to evaluate the transition layer materials. Numerical results are made sure by the energy conservation law of wave motion. Perfect penetration of wave energy (Non-reflection phenomena) appears depending on the wavelength. The penetration accompanied by the resonance of the layer is caused even though the incident angle is larger than the critical angle of incidence. The basic analysis and formulation described here may be helpful to make further study of ultrasonic non-destructive evaluation of complex materials.

1. 緒 言

弾性波の反射と透過の問題は様々な分野で古くから扱われてきているが、機械材料の健全性や性状を定量的非破壊的に自動評価する技術開発に関連して、現在も重要な基礎研究となっている。昨今の種々の新開発材料の出現にともない、対応できる反射透過の解析を行うためには、材料の性質を正しく表現するため、構成関係式の適否を再検討しなければならない。たとえば一方向繊維強化複合材であれば異方性体の構成関係式を、また多孔質焼結材であればその特徴の表現できる構成関係式を利用するのが妥

当であろう。しかし、一般に詳細な構成関係を用いて材料評価のための解析をするならば、多くの場合その取扱いは複雑になる。そこで、そのような解析へのステップとして、まず基本である均質等方弾性体の扱いにおいて、見通しの良い整理が出来ていることが望ましい。

本報告は、以上の考えを踏まえて、均質等方弾性遷移層による超音波の反射透過解析を整理してみた。いくつかの代表的な計算例⁽¹⁾を基にして、波動伝播特性からの説明を行ってみた。今後、それぞれの材料の特質に忠実な構成関係式に基づいて解析を進める際の基礎的知見としたい。

2. 遷移層により生成する波

\mathbf{u} を変位ベクトル、 \mathbf{x} を位置ベクトルとして振幅 A の平面調和波を次のように表す。

$$\mathbf{u} = A d \exp [i \xi] \quad (1)$$

$$\xi = k (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - c t) \quad (2)$$

\mathbf{d} と \mathbf{p} はそれぞれ運動方向と伝播方向を与える単位ベクトル、 k は波数、 c は位相速度である。等方

1991年6月26日受理

*日本機械学会東北支部講演会にて一部講演(1990年6月9日, 八戸)

**秋田大学鉱山学部機械工学科, Department of Mechanical Engineering, Mining College, Akita University.

***東北大学流体科学研究所, Institute of Fluid Science, Tohoku University. (秋田大学大学院鉱山学研究科機械工学専攻平成2年度修士課程修了)

性材料では \mathbf{d} と \mathbf{p} の間に $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$ となるととき、内積 $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p} = 0$ となるとときがあり、それぞれ順に縦波 (P 波) と横波 (S 波) に対して成り立つ。ここで変位ひずみ関係を均質等方な構成関係式 (Hooke の法則の式) に代入して得られる応力成分は次式によって与えられる。

$$\tau_{im} = [\lambda \delta_{im} d_j p_j + \mu (d_i p_m + d_m p_i)] i k A \exp [i \xi] \quad (3)$$

ここに各項に複数現れる添字 j については総和規約を適用する。 λ と μ はラメの弾性定数で、 δ_{im} はクロネッカのデルタである。

異なる材料の界面では応力と変位が連続でなければならない。したがって反射波や透過波はそれらの条件を満たすように生成される。便宜上界面から生ずるいくつかの平面波を、上添字番号 (n) を付けて区別して表記すれば

$$\mathbf{u}^{(n)} = A^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} \exp [i \xi^{(n)}] \quad (4)$$

$$\xi^{(n)} = k^{(n)} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(n)} - c^{(n)} t) \quad (5)$$

となるから、界面の任意の場所、任意の時刻において連続の条件を満足するためには、生成するすべての波に対して $\xi^{(n)}$ が等しくなければならない。また領域によらず調和波動場の周波数 $\omega (= k^{(n)} c^{(n)})$ が共通であるから、式(5)を次の様に書き換えておくこと便利である。

$$\xi^{(n)} = \exp [i \omega (\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}^{(n)} - t)] \quad (6)$$

ここに $\mathbf{q}^{(n)}$ は

$$\mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} / c^{(n)} \quad (7)$$

で定義されるスローネス・ベクトル (slowness vector) で波の速度と伝播方向に依存する。界面で $\xi^{(n)}$ が等しいことから $\mathbf{q}^{(n)}$ の層に平行な成分 $q_1^{(n)}$ は界面で連続であり、このことから反射波と透過波の伝播方向が決定できる⁽²⁾。すなわち P 波の入射角を $\theta^{(0)}$ とし、Fig. 1 のように伝播方向 $\theta^{(n)}$ を

$$p_1^{(n)} \equiv \sin \theta^{(n)}$$

で定義すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} p_1^{(0)} &= p_1^{(1)} = \sin \theta^{(0)} \\ p_1^{(2)} &= \sin \theta^{(0)} / \kappa^I \\ p_1^{(3)} &= p_1^{(5)} = (c_L^{II} / c_L^I) \sin \theta^{(0)} \\ p_1^{(4)} &= p_1^{(6)} = (c_L^{II} / c_L^I) \sin \theta^{(0)} / \kappa^{II} \\ p_1^{(7)} &= (c_L^{III} / c_L^I) \sin \theta^{(0)} \\ p_1^{(8)} &= (c_L^{III} / c_L^I) \sin \theta^{(0)} / \kappa^{III} \end{aligned} \quad (9)$$

$$p_2^{(n)} = [1 - (p_1^{(n)})^2]^{1/2}; p_1^{(n)} \leq 1$$

$$p_2^{(n)} = i [(p_1^{(n)})^2 - 1]^{1/2}; p_1^{(n)} > 1 \quad (10)$$

ただし、 κ は縦波と横波の速度比 c_L / c_T で、上添字 I, II, III はそれぞれ入射域、層域、透過域に対する量であることを示す。反射率 R と透過率 T は、そ

れぞれ反射波振幅と透過波振幅の入射波振幅 $A^{(0)}$ に対する比として定義され、本問では次式で与える。

$$R_P = A^{(1)} / A^{(0)} \quad (11)$$

$$R_S = A^{(2)} / A^{(0)} \quad (12)$$

$$T_P = A^{(7)} / A^{(0)} \quad (13)$$

$$T_S = A^{(8)} / A^{(0)} \quad (14)$$

ここに上添字によって反射波と透過波の種類を示す。

3. 波動エネルギーの保存

次に波動エネルギーの流れを考える。応力ベクトル \mathbf{t} による単位時間の仕事 (パワー密度 \mathcal{S}) は、体素の運動速度 (粒子速度) \mathbf{v} すなわち $\dot{\mathbf{u}}$ との内積で与えられる

$$\mathcal{S} = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (15)$$

ただしパワー密度は、 \mathbf{t} も $\dot{\mathbf{u}}$ も実ベクトルによって定義する。面素の法線方向を単位ベクトル \mathbf{n} で与えれば、

$$\mathcal{S} = \tau_{im} n_m \dot{u}_i \quad (16)$$

従って P 波によるパワー密度は、振幅 A が実数ならば式(1)(3)(16)より

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_L &= (\lambda + 2\mu) c_L k^2 A^2 \text{Re} [i \exp (i \xi)] \\ &\quad \times \text{Re} [i \exp (i \xi)] \end{aligned} \quad (17)$$

ここでパワー変動の一周期を τ として、時間平均 (以下 $\langle \cdot \rangle$ を付けて表わす) を求めれば

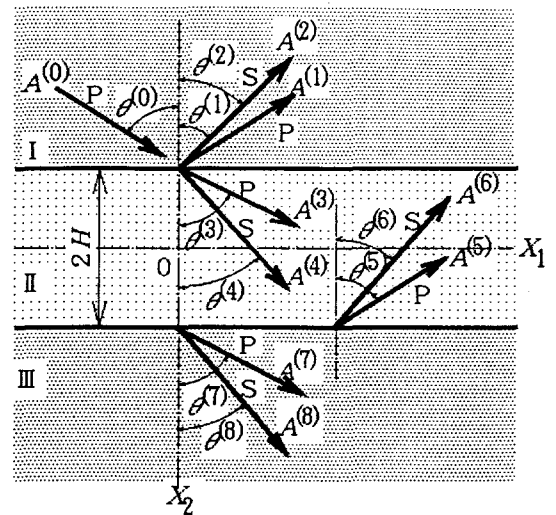


Fig. 1 Geometry and generating waves

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}_L \rangle &= \tau^{-1} \int_0^\tau \mathcal{S} \, dt \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) c_L k^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho c_L \omega^2 A^2 \quad (18) \end{aligned}$$

一方、S波に対しては

$$\langle \mathcal{S}_T \rangle = \frac{1}{2} \rho c_T \omega^2 A^2 \quad (19)$$

これらの時間平均表示を用いれば、波動エネルギーの保存則に基づいて解析結果を確かめることが出来る。入射波の照射する界面の面積を Ω とし、それぞれの波束の関与する断面積を $\Omega^{(n)}$ とする (Fig. 2)。この時、波動エネルギーの保存則より次式が成り立たなければならない。

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}^{(1)} \rangle \Omega^{(1)} + \langle \mathcal{S}^{(2)} \rangle \Omega^{(2)} + \langle \mathcal{S}^{(7)} \rangle \Omega^{(7)} \\ + \langle \mathcal{S}^{(8)} \rangle \Omega^{(8)} = \langle \mathcal{S}^{(0)} \rangle \Omega^{(0)} \quad (20) \end{aligned}$$

式(18)(19)をそれぞれの波に適用し、Fig.2の幾何学的関係

$$\Omega^{(n)} = \Omega \cos \theta^{(n)} \quad (21)$$

を考慮すれば、式(20)は

$$\begin{aligned} \{ R_P^2 \cos \theta^{(1)} + R_S^2 \cos \theta^{(2)} / \kappa^I + T_P^2 \Gamma_1 \Gamma_2 \cos \theta^{(7)} \\ + T_S^2 \Gamma_1 \Gamma_2 \cos \theta^{(8)} / \kappa^{III} \} / \cos \theta^{(0)} = 1 \quad (22) \end{aligned}$$

ただし Γ_1 と Γ_2 は音響インピーダンスの比で

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (\rho^{II} c_L^{II}) / (\rho^I c_L^I) \\ \Gamma_2 &= (\rho^{III} c_L^{III}) / (\rho^{II} c_L^{II}) \quad (23) \end{aligned}$$

4. 問題の呈示と連立式

波動場が入射領域 I と層厚 $2H$ の弾性遷移層 II と透過領域 III によって構成されるとき、直角座標の原点 0 を層の中央面に、 x_2 座標軸が層平面に垂直になるようにとる (Fig. 1)。 x_2 座標軸に対して任意の角度 $\theta^{(0)}$ で入射する平面波を考えるならば、すべての生成波の伝播ベクトル $\mathbf{p}^{(n)}$ が $x_1 x_2$ 座標面に含まれるように座標系を選定することができるので、面

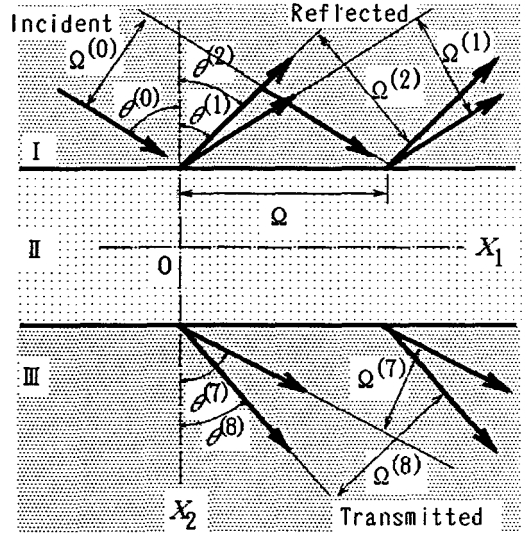


Fig. 2 Energy conservation

内変形の 2 次元波動問題になる。遷移層の上面 ($x_2 = -H$) と下面 ($x_2 = H$) における応力と変位の連続条件より、それぞれの波による寄与の総和を考えて、

$$x_2 = -H :$$

$$u_j^{(0)} + u_j^{(1)} + u_j^{(2)} = u_j^{(3)} + u_j^{(4)} + u_j^{(5)} + u_j^{(6)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau_{2j}^{(0)} + \tau_{2j}^{(1)} + \tau_{2j}^{(2)} \\ = \tau_{2j}^{(3)} + \tau_{2j}^{(4)} + \tau_{2j}^{(5)} + \tau_{2j}^{(6)} \quad (25) \end{aligned}$$

$$x_2 = H :$$

$$u_j^{(3)} + u_j^{(4)} + u_j^{(5)} + u_j^{(6)} = u_j^{(7)} + u_j^{(8)} \quad (26)$$

$$\tau_{2j}^{(3)} + \tau_{2j}^{(4)} + \tau_{2j}^{(5)} + \tau_{2j}^{(6)} = \tau_{2j}^{(7)} + \tau_{2j}^{(8)} \quad (27)$$

式(24)-(27)は $j=1, 2$ に対して成り立つので合計 8 本の式となる。式(4)と(3)を(24)から(27)までに代入し、具体的に行列表示で整理すれば式(28)となる。

$$\begin{pmatrix} p_1^{(1)} & p_2^{(2)} & -p_1^{(3)}e^{(3)} & p_2^{(4)}e^{(4)} & -p_1^{(5)} & -p_2^{(6)} & 0 & 0 \\ -p_2^{(1)} & p_1^{(2)} & -p_2^{(3)}e^{(3)} & -p_1^{(4)}e^{(4)} & p_2^{(5)} & -p_1^{(6)} & 0 & 0 \\ -S^{(1)}r^{(1)} & -C^{(2)}r^{(2)} & -S^{(3)}r^{(3)}e^{(3)} & C^{(4)}r^{(4)}e^{(4)} & S^{(5)}r^{(5)} & C^{(6)}r^{(6)} & 0 & 0 \\ K^{(1)}r^{(1)} & -S^{(2)}r^{(2)} & -K^{(3)}r^{(3)}e^{(3)} & -S^{(4)}r^{(4)}e^{(4)} & -K^{(5)}r^{(5)} & S^{(6)}r^{(6)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1^{(3)} & -p_2^{(4)} & p_1^{(5)}e^{(5)} & p_2^{(6)}e^{(6)} & -p_1^{(7)} & p_2^{(8)} \\ 0 & 0 & p_2^{(3)} & p_1^{(4)} & -p_2^{(5)}e^{(5)} & p_1^{(6)}e^{(6)} & -p_2^{(7)} & -p_1^{(8)} \\ 0 & 0 & S^{(3)}r^{(3)} & -C^{(4)}r^{(4)} & -S^{(5)}r^{(5)}e^{(5)} & -C^{(6)}r^{(6)}e^{(6)} & -S^{(7)}r^{(7)} & C^{(8)}r^{(8)} \\ 0 & 0 & K^{(3)}r^{(3)} & S^{(4)}r^{(4)} & K^{(5)}r^{(5)}e^{(5)} & -S^{(6)}r^{(6)}e^{(6)} & -K^{(7)}r^{(7)} & -S^{(8)}r^{(8)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)}E_+^{(1)} \\ A^{(2)}E_+^{(2)} \\ A^{(3)}E_+^{(3)} \\ A^{(4)}E_+^{(4)} \\ A^{(5)}E_+^{(5)} \\ A^{(6)}E_+^{(6)} \\ A^{(7)}E_+^{(7)} \\ A^{(8)}E_+^{(8)} \end{pmatrix} = -A^{(0)}E^{(0)} \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ S^{(0)} \\ K^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

ただし、次のような置き換えをしている。

$$p_1^{(n)} = \sin \theta^{(n)}$$

$$p_2^{(n)} = \cos \theta^{(n)}$$

$$S^{(n)} = \sin 2\theta^{(n)}$$

$$C^{(n)} = \cos 2\theta^{(n)}$$

$$K^{(n)} = (\kappa^{(n)} - 1) + C^{(n)}$$

$$\kappa^{(n)} = c_L^{(n)} / c_T^{(n)}$$

$$e^{(n)} = \exp[-2ik^{(n)}H p_2^{(n)}]$$

$$r^{(n)} = \{\rho^{(n)} c_T^{(n)}\} / \{\rho^{(0)} c_T^{(0)}\}$$

$$E_+^{(n)} = \exp[ik^{(n)}H P_2^{(n)}]$$

したがって、入射波の振幅 $A^{(0)}$ が与えられれば式(28)により $A^{(1)}$ から $A^{(8)}$ までの8個の未知振幅が決

定できるので、式(11)-(14)から反射率 R_p , R_s と透過率 T_p , T_s が得られる。

ここで、反射透過特性と変位応答特性の関連を調べるために、生ずる波の変位ベクトル和を次のようにとれば、それぞれの領域の合変位を求めることが出来る。

$$u^I = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} \quad (29)$$

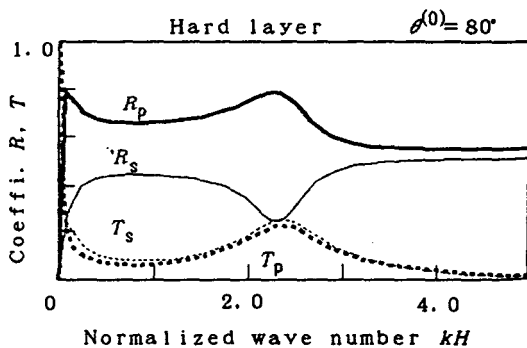
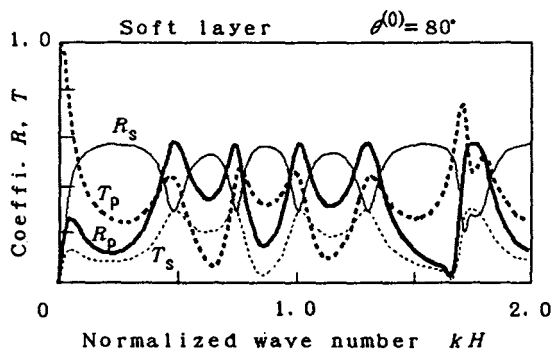
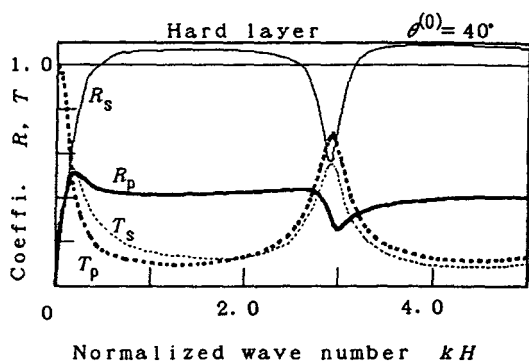
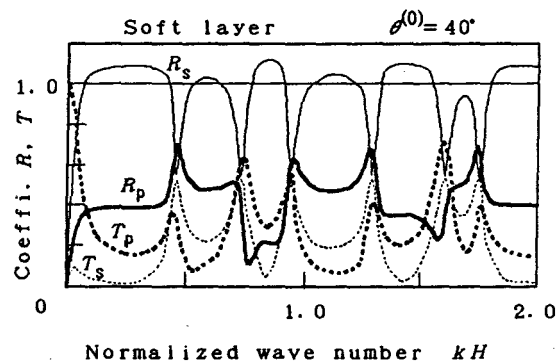
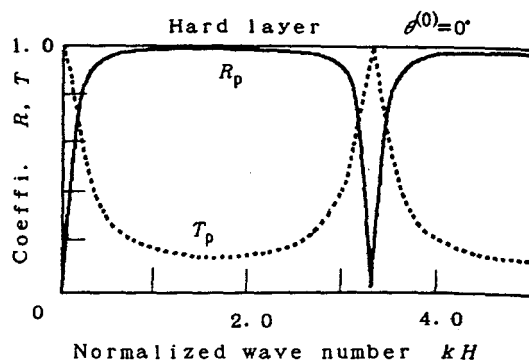
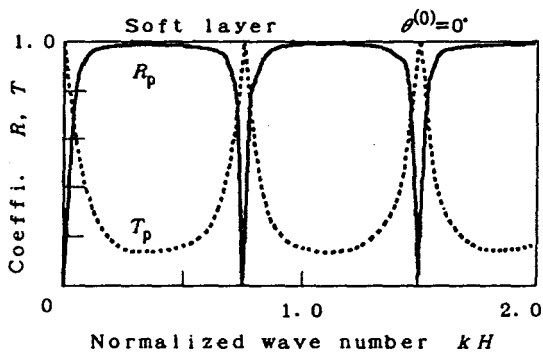


Fig. 3 Reflection and transmission coefficients vs. normalized wave number

$$\mathbf{u}^{\text{II}} = \mathbf{u}^{(3)} + \mathbf{u}^{(4)} + \mathbf{u}^{(5)} + \mathbf{u}^{(6)} \quad (30)$$

$$\mathbf{u}^{\text{III}} = \mathbf{u}^{(7)} + \mathbf{u}^{(8)} \quad (31)$$

5. 数値計算例と反射透過特性

Table 1 に計算に用いたパラメータのリストを示す。反射と透過の現象は周囲媒体と遷移層の音響インピーダンスの違いに起因しているので、その代表計算例として周囲媒体に対する層のインピーダンス値が小さいとき（ソフト層）と大きいとき（ハード層）を選んで計算した。具体的には、ハード層の場合とソフト層の場合の材料定数は層の内と外との定数を入れ換えたものである。

Fig. 3 は反射率と透過率の波数に対するスペクトルである。 k は入射側媒体における P 波の波数である。右側にハード層を左側にソフト層の場合の結果を示す。入射角 $\theta^{(0)}$ は、上段が 0° 、中段が 40° 、下段が 80° である。太線と細線をそれぞれ生成した P 波と S 波に対応させ、実線で反射率を点線で透過率を表わす。垂直入射 ($\theta^{(0)}=0$) では波数が

$$kH = \frac{1}{2} n \pi c_L^{\text{II}} / c_L^{\text{I}} \quad (32)$$

となる時、理論的に反射波がなくなるので、ソフト層では kH が 0.75 増加するごとに、ハード層では kH が 3.29 増加するごとに $R_p=0$ となる。計算例はその様相をよく表している。ハード層に対しては層内に P 波、もしくは S 波の消失する臨界角があり、本計算ではそれぞれ 28.4° と 55.7° になる。波数依存性を見ればソフト層で変動が激しい。 40° 入射に対する S 波の反射率の最大値は 1 を超えている。これは同一振幅ならば P 波よりも S 波のパワーが小さいためであり、エネルギー保存式(22)によっても裏付けられる。ハード層の場合に kH に対する変動が緩やかなのは層内の波速が大きいため、あたかも薄い層と置き換わったようになるためである。

Fig. 4 は無次元波数 $kH=2$ のときの入射角依存性を検討したものである。入射波が P 波であってもソフト層の時 60° と 75° 近辺で反射 P 波が無くなり、反射波は S 波のみとなる。すなわち透過波は小さいので入射 P 波の反射 S 波へのモード変換と見ることができる。ハード層の時、 30° を少し超えたところで急変している。この近辺の入射角においては層内で伝播し得る波は S 波のみとなるので、S 波の重なりによるモードが生成されて、局所的に透過波が急増し反射波が急減しているものと見られる。波の伝播速度の速い半無限体へある角度で入射する時、臨

Table 1 Physical parameters for the computation

	(Soft layer case)			(Hard layer case)		
	c_L km/s	c_T km/s	ρ g/cm ³	c_L km/s	c_T km/s	ρ g/cm ³
Medium I	5.66	3.27	8.03	2.70	1.56	1.15
Medium II	2.70	1.56	1.15	5.66	3.27	8.03
Medium III	5.66	3.27	8.03	2.70	1.56	1.15

界角を超えているならば、波は全反射するかまたは一部が界面に沿うように伝播し、深さ方向には指数関数的に減衰する。しかし層状体に対しては臨界角を超えた入射であっても裏面まで多少の影響が生じているので、透過領域に伝播し得る波が生成されている。したがって、臨界角入射であっても、それぞれの波の透過率は $\theta^{(0)}$ に対して連続に変化している。

Fig. 5 は遷移層からの距離に対する変位振幅の変化を示したものである。それぞれの図の中央の網掛けした領域 ($-1 < x/H < 1$) が遷移層で、その左側が入射側の領域である。それぞれの図のパラメータは入射角であり、 $\theta^{(0)}=0^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ を選んだ。図中の曲線のパラメータは波数で、 $kH=1, 2, 3$ を選んだ。

縦軸のスケールがソフト層の時とハード層の時では異なることに注意すれば、明らかにソフト層の場

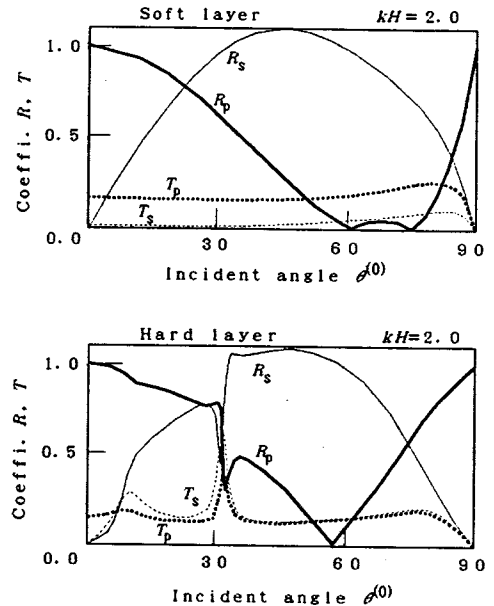


Fig. 4 Reflection and transmission coefficients vs. incident angle

合には遷移層内の振幅が全体に大きくなっている。入射角 0° のソフト層を例にとれば kH が3の時他に比べて非常に大きい。これは式(3)で $n=4$ の時に当たりほぼ反射無し($R_p=0$)で入射波が透過側に素通りする状態($T_p=1$)となっている。すなわち遷移層が共振状態の時にあたる。しかしエネルギー保存則から透過側の振幅が増幅される事はない。ハード層

の時、計算の範囲内では透過側の合成変位は小さくなる。垂直入射で $kH=3$ の時、遷移層の中程で変位振幅が0になり振動位相が反転している。

Fig. 6は入射角をパラメータとして表現したものである。ハード層にたいする臨界角より大きな入射角 $\theta^{(0)}=80^\circ$ であっても透過側には波動として伝播しう事が分かる。以上の計算結果は、エネルギー保存

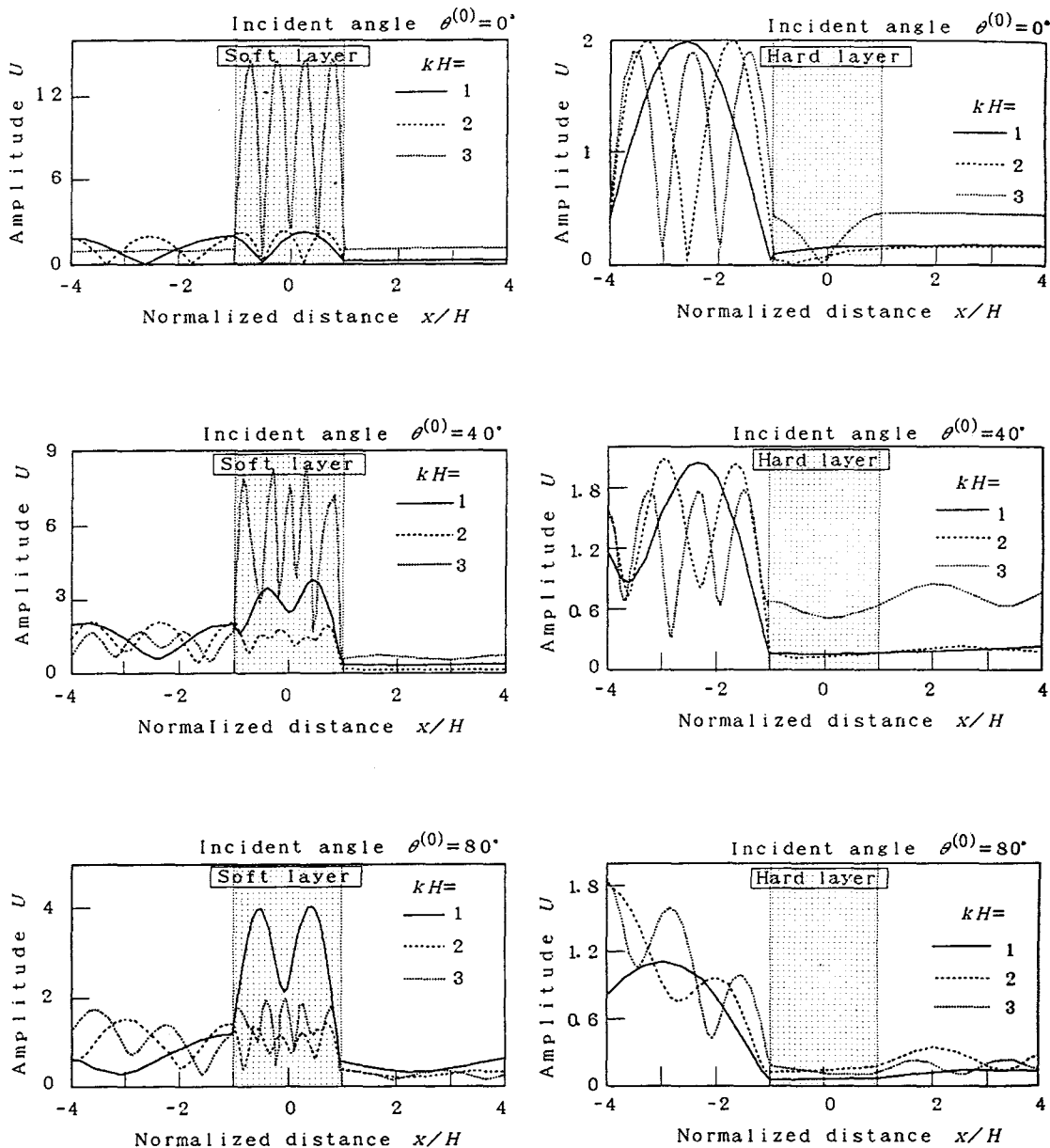


Fig. 5 Distribution of the amplitude with the parameter of normalized wave number kH

式の成り立つ事を数値的に確かめている。

6. 結 言

弾性遷移層に縦波が入射するときの反射透過現象を解析して代表的な計算例を示し、その結果をまとめれば次のようになる。

波動エネルギーは速度の遅い媒質に集まる傾向があ

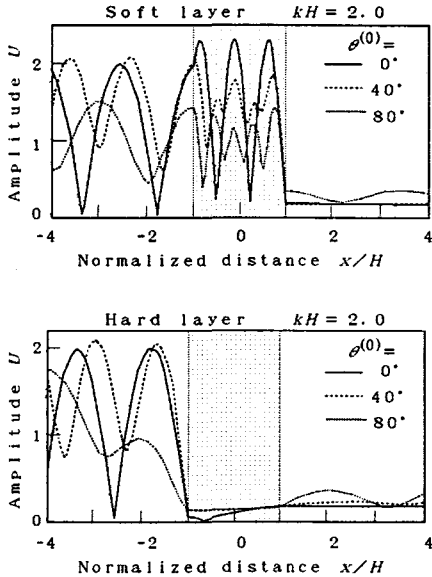


Fig. 6 Distribution of the amplitude with the parameter of incident angle

り、そのような場合には層内のモード振動が顕著になる。モード振動に応じて層が見かけ上、硬くなったり柔らかくなったりして反射率や透過率の変動を引き起こしている。反射波が極めて小さくなる時は遷移層内の振幅が大きくなり（共振状態となり）、この時波は素通りし、入射振幅とほぼ等しい振幅で透過側に伝達される。

ハード層に比べれば、ソフト層では層内の波動振幅が大きくなり、反射率と透過率は周波数もしくは無次元波数 kH に敏感である。

入射角度依存性を調べれば、ハード層の時は層内へ伝わる臨界角が存在する。しかし、このようなときであっても kH の値に応じて、透過側にエネルギーの伝達が行われる。

なお将来、より複雑な遷移層の力学的な特徴を明らかにする解析の吟味のために、等方性の層に対する式(28)が利用できる。さらに、エネルギー保存式(22)は遷移層の材質や厚さによらず成立する式であり、そのまま用いて計算結果を検討する事が出来る。

参 考 文 献

- (1) 隋広軍 (1991) : 弾性波の遷移層による反射と透過の解析, 秋田大学大学院鉱山学研究科平成2年度修士論文
- (2) 大好直 (1990) : 弾性波動の力学, 日本機械学会編「衝撃破壊工学」, 第2章 29-58, 技報堂出版