論　文

異方性材料界面における弾性波の反射と透過*

大好　直**・三浦公久**

Reflection and Transmission of Elastic Waves at an Interface of Anisotropic Materials*

Tadashi OHYOSHI** and Kimihisa MIURA**

Abstract

Coefficients of reflection and transmission of elastic waves to a non-symmetric boundary surface of anisotropy are obtained. The analysis shows mainly on a characteristic slowness surface. A normal vector on the slowness surface indicates power flow direction of characteristic waves. This is the important clue to construct the formal solutions by the selection of proper characteristic waves. The selection is made by power flow direction of the waves. The formal solutions should compensate the continuity conditions at the interface disturbed by incident waves. For a general anisotropic composite material, the analysis is apt to complex. Therefore, the application of slowness surface to the selection is very influential to avoid confusion in the analysis. Numerical examples are presented for the surface coupled with water. Those results show us the effect of deviation angle of the principal axis from the boundary normal on the coefficients of reflection and transmission power.

1. 緒　　　言

複合材料には異方性を示すものが多い．そのような部材の動的応答解析の基礎として，異方性主軸に傾斜する面における弾性波の反射透過現象を考える．弾性層や円柱などの導波体では，伝播モードや周波数成分により，エネルギが逆行する例外もある[1]が，等方性体中であれば波動エネルギの移動方向と位相面の伝播方向とは，ほとんどの場合に一致している．しかし，異方性体中では両者の方向は一般に一致せず，互いにある角度を成す．このため，界面を透過した波の位相面が，界面から遠ざかる形であっても，波動エネルギは逆に界面に向かって到来する場合が起こり得る[2]．外界の擾乱に対応して界面に生成する二次波源は，界面における応力と変位の連続性を補償するものであり，波動エネルギはその波源から遠ざかるものでなければならない．従って異方性体の境界値問題を，エネルギ方向と一致しない位相面の移動を手がかりにして，形式的に解く事は出来ない．このことが異方性体の動的境界値問題解析を難しくしている．波動エネルギの流れ方向や応答の有限性を考慮して解を選択し，整然と定式化する方法が必要であるので，本論文はその手がかりを考えたものである．本研究に関連する報告として Rokhlin 等による異方性結晶材の超音波解析[3]が参考になる．

解の選択の例として，応答の有限性を考慮して解析した異方性体における表面波の報告[4]があげられる．これに対し，本報ではエネルギの流れ方向に基づいて解の選択を行い，水中におかれた異方性材料の異方性非対称面による反射と透過の問題を解析する．異方性体の動的問題は複雑になりがちであるが，

1992年6月25日受理

*日本非破壊検査協会第2分科会にて一部講演（1992年1月24日，千葉市）

**秋田大学鉱山学部機械工学科，Department of Mechanical Engineering, Mining College, Akita University.

見通し良く整理して解析するために，スローネス特性曲面を用いる[5]．すなわち，スローネス曲面の法線方向がエネルギの流れ方向となることを手がかりにし，界面からエネルギが遠ざかる波動のスローネス特性根を選んで境界値問題の解を構成する．なお，水中の等方性材料面による反射と透過の結果は文献6に見られる．

2. スローネス面

均質な異方性材料の構成関係は

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

または　$D_{ijkl}\sigma_{ij}=\varepsilon_{kl}$ (2)

ただし，C_{ijkl} と D_{ijkl} は弾性スティフネスとコンプライアンスである．ひずみと変位は

$$\varepsilon_{kl}=(u_{k,l}+u_{l,k})/2 \tag{3}$$

そして，運動方程式は体積力を考慮しない場合

$$\sigma_{ij,j}=\rho u_{i,tt} \tag{4}$$

よって変位場を支配する方程式は次式となる[7]．

$$C_{ijkl}u_{k,jl}=\rho u_{i,tt} \tag{5}$$

次に，波動の基本である平面調和波の形を

$$u_i=Ad_i\exp\left[i(kp_m x_m-\omega t)\right] \tag{6}$$

$$=Ad_i\exp\left[i\omega(q_m x_m-t)\right] \tag{7}$$

で与える．ただし d_i と p_i は要素の運動方向と伝播方向を示す単位ベクトル，q_i は大きさが位相速度 v の逆数に等しいスローネスベクトル（$=p_i/v$）である。式(7)を(5)に代入すれば

$$(C_{ijkl}q_j q_l-\rho\delta_{ik})d_k=0 \tag{8}$$

d_k は単位ベクトルであるから，式(8)が成立するためには

$$\det(C_{ijkl}q_j q_l-\rho\delta_{ik})=0 \tag{9}$$

でなければならない．従って，異方性体を伝播する平面波は式(9)を満たすベクトル値 q_i のときに存在する．さらにクリストッフェル・スティフネス Γ_{ik}[8] を用いれば

$$\det(\Gamma_{ik}-qv^2\delta_{ik})=0 \tag{10}$$

$$\Gamma_{ik}=C_{ijkl}p_j p_l \tag{11}$$

Γ_{ik} の要素は実数で対称であるので，その固有値として定まる v^2 は3つの実数である．また歪エネルギ関数が正値形式をとることから，Γ_{ik} を対角化して得られる v^2 は正の値を有する[9]．したがって，6つの v のうち3つの正実数値を選ぶことができ，これらに対する $q_i(=p_i/v)$ は，位相の伝播方向ベクトル p_i をパラメータとして3重構造のスローネス曲面をつくっている．

3. 波動エネルギの流れ方向

後述の便宜のために，スローネス曲面の法線が波動エネルギの流れる方向[10]に一致することを示しておく．パワーフロー密度の時間平均を次式で定義する．

$$\langle P_j\rangle=-\frac{1}{T}\int\mathrm{Re}(\dot{u}_i)\mathrm{Re}(\sigma_{ij})dt \tag{12}$$

積分は1周期 T にわたる時間積分であり，上添字の・は時間微分を示す．特に調和波動場であれば式(12)は次式に書換えられる．

$$\langle P_j\rangle=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\ [\dot{u}_i{}^*\sigma_{ij}] \tag{13}$$

上添字の＊は複素共役を示す．次に，式(2)(4)を満足する2つの接近した任意の波動状態；

$(\dot{u}_i,\ \sigma_{ij},\ q_i)$ と $(\dot{u}_i',\ \sigma_{ij}',\ q_i')$

について考える．それらを微小増分 δ により関係づけて

$$\dot{u}_i'=\dot{u}_i+\delta\dot{u}_i,$$
$$\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij}$$
$$q_i'=q_i+\delta q_i \tag{14}$$

と置く．平面調和波が式(7)で与えられるとき，時間微分と空間微分は，それぞれ $-i\omega$ と $i\omega q_i$ を乗ずることと等価なので，式(4)より2つの波動状態は

$$q_j\sigma_{ij}+\rho\dot{u}_i=0 \tag{15}$$

$$q_j'\sigma_{ij}'+\rho\dot{u}_i'=0 \tag{16}$$

それぞれの差をとり，高次の微小量を省略すれば

$$(\delta q_j\sigma_{ij}+q_j\delta\sigma_{ij})+\rho\delta\dot{u}_i=0 \tag{17}$$

さらに，共役量 $\dot{u}_i{}^*$ を乗じて

$$\dot{u}_i{}^*(\delta q_j\sigma_{ij}+q_j\delta\sigma_{ij})+\rho\dot{u}_i{}^*\delta\dot{u}_i=0 \tag{18}$$

一方，式(2)の両辺を時間微分すれば，2つの状態に対し

$$D_{ijkl}\sigma_{ij}+q_l\dot{u}_k=0 \tag{19}$$

$$D_{ijkl}\sigma_{ij}'+q_l'\dot{u}_k'=0 \tag{20}$$

差をとってから $\sigma_{kl}{}^*$ を左作用させると

$$\sigma_{ij}{}^*D_{ijkl}\delta\sigma_{ij}+\sigma_{kl}{}^*(\delta q_l\dot{u}_k+q_l\delta\dot{u}_k)=0 \tag{21}$$

式(18)と(21)の和をとり，指標の付け替えをして整理すれば

$$(\dot{u}_i{}^*q_j+\sigma_{ij}{}^*D_{ijkl})\delta\sigma_{ij}$$
$$+(\sigma_{ij}{}^*q_j+\rho\dot{u}_i{}^*)\delta\dot{u}_i$$
$$+\delta q_j(\dot{u}_i{}^*\sigma_{ij}+\sigma_{ij}{}^*\dot{u}_i)=0 \tag{22}$$

式(22)の左辺第1項と第2項は式(19)(15)の左辺の共役量となっており0となる．したがって

$$2\delta q_j\mathrm{Re}[\dot{u}_i{}^*\sigma_{ij}]=0 \tag{23}$$

式(23)は式(13)より

$$4\delta q_j\langle P_j\rangle=0 \tag{24}$$

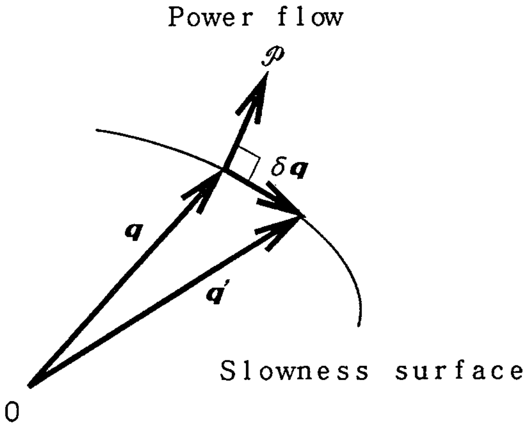

Fig. 1 Power flows normal to the slowness surface.

Fig. 1のように任意の増分ベクトル δq_j がスローネス面に含まれているから，式(24)はベクトル$\langle P_j\rangle$がスローネス面に垂直となっていることを示している．したがって，任意の異方性体に対して，波動エネルギの伝播方向をスローネス曲面から知ることが出来る．

4. 主軸に傾斜する界面の考慮

直交異方性体の主軸に一致する直角座標系 $\hat{X}_i$ のスローネスベクトルを $\hat{q}_i$ とすれば，回転後の座標系 x_i のスローネスベクトル q_i は

$$q_i=\beta_{ij}\hat{q}_j \tag{25}$$

ただし β_{ij} は座標回転にともなう変換マトリックスである．式(25)の変換を用いれば，主軸座標系 $\hat{X}_i$ 上のスローネス解析結果を基にして，異方性非対称な界面に合わせてとった座標系 x_i 上で，連続条件を満足させることが出来る．

具体例で考える．主軸座標系の平面（$\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$）に入射波の伝播方向ベクトル p_i と界面法ベクトル n_i が含まれる時，スローネスベクトルの第3成分 $\hat{q}_3$ は0となるので，二次元の取扱いが出来る．そこでこの様な場合を考えれば，$\hat{X}_3$ 軸回りに角 ϕ だけ回転して得られる新しい直角座標系 x_j の x_2 軸が，界面の法線方向となる時（Fig. 2），式(25)の β_{ij} は

$$\beta_{ij}=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

で与えられる．次に便宜上主軸座標上の弾性定数を

$$C_{1111}=\hat{G}_{11},\qquad C_{1122}=\hat{G}_{12},$$
$$C_{1112}=C_{2212}=0,$$

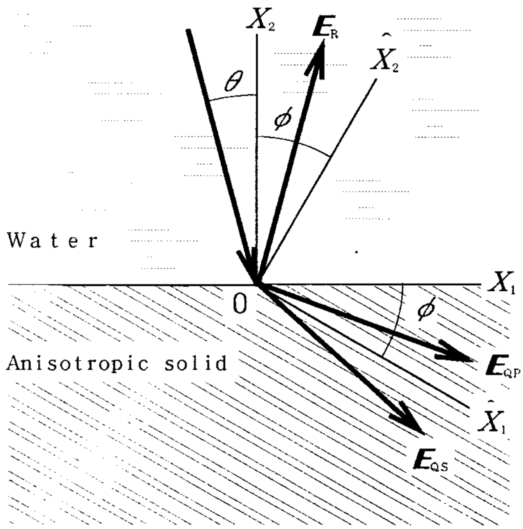

Fig. 2 Coordinates on the surface of an immersed anisotropic solid.

$$C_{2222}=\hat{G}_{22},\qquad C_{1212}=\hat{G}_{66}$$

と添字を減らして $\hat{G}_{ij}$ に書き換えれば構成関係式は

$$\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{11}\\ \hat{\sigma}_{22}\\ \hat{\sigma}_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} & 0\\ \hat{G}_{12} & \hat{G}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \hat{G}_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\varepsilon}_{11}\\ \hat{\varepsilon}_{22}\\ 2\hat{\varepsilon}_{12}\end{pmatrix} \tag{27}$$

この場合の特性式(9)を書き下せば

$$\Omega(\hat{q}_1,\ \hat{q}_2)=H_{11}H_{22}-H_{12}H_{12}=0 \tag{28}$$

ただし $H_{11}=\hat{G}_{11}\hat{q}_1{}^2+\hat{G}_{66}\hat{q}_2{}^2-\rho$ (29)

$$H_{12}=(\hat{G}_{12}+\hat{G}_{66})\hat{q}_1\hat{q}_2 \tag{30}$$

$$H_{22}=\hat{G}_{66}\hat{q}_1{}^2+\hat{G}_{22}\hat{q}_2{}^2-\rho \tag{31}$$

式(28)は空間（$\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$）のスローネス曲面を与える．さらに，この式を式(26)の回転操作により界面に合わせた座標系で表示すれば

$$\Omega(s_1,\ s_2)=0 \tag{32}$$

ここに

$$\begin{aligned}\Omega(s_1,\ s_2)=&\ b_{04}s_2{}^4+b_{13}s_1s_2{}^3+b_{22}s_1{}^2s_2{}^2\\ &+b_{02}s_2{}^2+b_{31}s_1{}^3s_2+b_{11}s_1s_2\\ &+b_{40}s_1{}^4+b_{20}s_1{}^2+1\end{aligned} \tag{33}$$

ただし

$$b_{04}=a_1m^4+a_2l^2m^2+a_3l^4 \tag{34}$$

$$b_{13}=-2lm[2a_1m^2+a_2(l^2-m^2)-2a_3l^2] \tag{35}$$

$$b_{22}=6(a_1+a_3)l^2m^2+a_2(l^4-4l^2m^2+m^4) \tag{36}$$

$$b_{02}=-(a_1m^2+a_3l^2+1) \tag{37}$$

$$b_{31}=-2lm[2a_1l^2-a_2(l^2-m^2)-2a_3m^2] \tag{38}$$

$$b_{11}=-2lm(a_3-a_1) \tag{39}$$

$$b_{40}=a_1l^4+a_2l^2m^2+a_3m^4 \tag{40}$$

$$b_{20}=-(a_1 l^2+a_3 m^2+1) \tag{41}$$
$$l=\cos\phi \tag{42}$$
$$m=\sin\phi \tag{43}$$
そして無次元変数
$$s_j{}^2=(\hat{G}_{66}/\rho)q_j{}^2 \tag{44}$$
$$a_1=\hat{G}_{11}/\hat{G}_{66} \tag{45}$$
$$a_2=(\hat{G}_{11}\hat{G}_{22}-\hat{G}_{12}{}^2-2\hat{G}_{12}\hat{G}_{66})/\hat{G}_{66}{}^2 \tag{46}$$
$$a^3=\hat{G}_{22}/\hat{G}_{66} \tag{47}$$
を用いた．式(32)は二次元に縮退した空間（s_1，s_2）の二重構造のスローネス曲面を表している．

一方，回転後の座標系 x_i 上の弾性定数 C_{ij} を主軸系の弾性定数 $\hat{G}$ により表現すれば
$$C_{11}=\hat{G}_{11}l^4+2(\hat{G}_{12}+2\hat{G}_{66})l^2m^2+\hat{G}_{22}m^4 \tag{48}$$
$$C_{12}=(\hat{G}_{11}+\hat{G}_{22}-4\hat{G}_{66})l^2m^2+\hat{G}_{12}(l^4+m^4) \tag{49}$$
$$C_{16}=-[(\hat{G}_{11}-\hat{G}_{12}-2\hat{G}_{66})l^2 +(\hat{G}_{12}-\hat{G}_{22}+2\hat{G}_{66})m^2]\,lm \tag{50}$$
$$C_{22}=G_{11}m^4+2(\hat{G}_{12}+2\hat{G}_{66})l^2m^2+\hat{G}_{22}l^4 \tag{51}$$
$$C_{26}=-[(\hat{G}_{11}-\hat{G}_{12}-2\hat{G}_{66})m^2 +(\hat{G}_{12}-\hat{G}_{22}+2\hat{G}_{66})l^2]\,lm \tag{52}$$
$$C_{66}=(\hat{G}_{11}+\hat{G}_{22}-2\hat{G}_{12}-2\hat{G}_{66})l^2m^2 +\hat{G}_{66}(l^4m^4) \tag{53}$$
したがって，界面に生ずる応力 σ_{2j} は式(7)の波動場に対して
$$\sigma_{21}=Ai\omega\{C_{16}d_1q_1+C_{26}d_2q_2+C_{66}(d_2q_1+d_1q_2)\} \exp[i\omega(q_mx_m-t)] \tag{54}$$
$$\sigma_{22}=Ai\omega\{C_{12}d_1q_1+C_{22}d_2q_2+C_{26}(d_2q_1+d_1q_2)\} \exp[i\omega(q_mx_m-t)] \tag{55}$$
で与えられる．

さて，入射波によって擾乱を受けても常に界面の連続条件が満たされているためには，界面で生成するすべて波の指数関数因子 $\exp[i\omega(q_ir_i-t)]$ が恒等的に等しくなければならない（Snell の法則）．ただし r_i は界面を与えるベクトルである．したがってベクトル q_i の界面への正射影 $q_i-(q_jn_j)n_i$ は波の種類によらず全て一致し共通である．n_i は界面の法ベクトルである．生成波は界面を波源とする波であるから，その正射影が共通となるもののうち，界面からエネルギの流出する波のみを選んで解を構成しなければならない．そこで，第3節で述べたスローネス面の法線方向がエネルギ流れ方向であることを手がかりにして解を選択する．

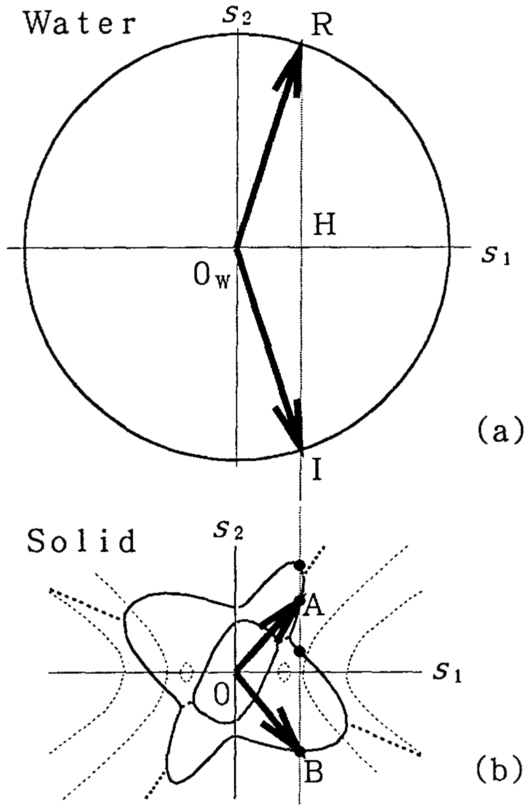

Fig. 3 Solwness curve for water (upper) and an anisotropic solid (lower).

Fig. 3 (a)(b)のそれぞれは入射側の流体に対するスローネス円と透過側の異方性体に対するスローネス曲線である．入射波のスローネスベクトル $s_j{}^{(0)}$ (Fig. 3 の O_wI) の界面への正射影を O_wH とすれば，共通な正射影を持つ反射波と透過波のスローネスベクトルは，点 H を通る s_2 軸に平行な直線とスローネス曲線との交点で求められる．その交点におけるスローネス曲線の法線方向がエネルギの流れる方向なので，透過側の4つの交点のうち，界面からエネルギの流出する波を与える点は，点 A と点 B のみになる．従って透過側には OA と OB のスローネスベクトルを持つ透過波のみが適合する波として生成する．Fig. 3 (b)は主軸偏角 30° のスローネス曲線であるが，位相面の伝播方向が OA 方向となる透過波は，エネルギ方向とは逆に向かう波となっている．なお，O_wH の大きさによっては透過側の曲線と交点が得られない場合があるが，複素スローネス曲線（太い破線が実部を，細い破線が虚部を示す）との交点から，界面に沿うモードの波が得られる[11]．入射側の O_wR は反射波のスローネスベクトルである．

5. 反射波と透過波

便宜のため入射波，反射波，そして選ばれた2つ

の透過波のそれぞれの量に上添字$^{(0),(1),(3),(4)}$をつけて表記して，振幅 $A^{(1)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ を求める．界面における応力と変位の連続条件：

$$u_1^{(0)}+u_1^{(1)}=u_1^{(3)}+u_1^{(4)} \tag{56}$$

$$\sigma_{22}^{(0)}+\sigma_{22}^{(1)}=\sigma_{22}^{(3)}+\sigma_{22}^{(4)} \tag{57}$$

$$0=\tau_{21}^{(3)}+\tau_{21}^{(4)} \tag{58}$$

を考慮すれば，次の様に連立式が得られる．

$$\begin{pmatrix} -d_2^{(1)} & d_2^{(3)} & d_2^{(4)} \\ -D^{(1)} & D^{(3)} & D^{(4)} \\ 0 & \delta^{(3)} & \delta^{(4)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_2^{(0)} \\ D^{(0)} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{59}$$

ただし，次の無次元量を用いて整理した．

$$D^{(0)}=\rho_w C_w/\sqrt{(\rho\hat{C}_{66})} \tag{60}$$

下添字 w は水に関する量を示す．そして次の置換をしている．

$$D^{(1)}=D^{(0)} \tag{61}$$

$$D^{(3)}=c_{12}d_1^{(3)}s_1^{(3)}+c_{22}d_2^{(3)}s_2^{(3)} + c_{26}(d_2^{(3)}s_1^{(3)}+d_1^{(3)}s_2^{(3)}) \tag{62}$$

$$D^{(4)}=c_{12}d_1^{(4)}s_1^{(4)}+c_{22}d_2^{(4)}s_2^{(4)} + c_{26}(d_2^{(4)}s_1^{(4)}+d_1^{(4)}s_2^{(4)}) \tag{63}$$

$$\delta^{(3)}=c_{16}d_1^{(3)}s_1^{(3)}+c_{26}d_2^{(3)}s_2^{(3)} + c_{66}(d_2^{(3)}s_1^{(3)}+d_1^{(3)}s_2^{(3)}) \tag{64}$$

$$\delta^{(4)}=c_{16}d_1^{(4)}s_1^{(4)}+c_{26}d_2^{(4)}s_2^{(4)} + c_{66}(d_2^{(4)}s_1^{(4)}+d_1^{(4)}s_2^{(4)}) \tag{65}$$

$$c_{ij}=C_{ij}/\hat{C}_{66} \tag{66}$$

式(59)より $A^{(j)}$ を求めれば

$$A^{(1)}=(-d_2^{(0)}\delta^{(3)}D^{(4)}+d_2^{(0)}\delta^{(4)}D^{(3)} - d_2^{(3)}\delta^{(4)}D^{(0)}+d_2^{(4)}\delta^{(3)}D^{(0)})/\Delta \tag{67}$$

$$A^{(3)}=(d_2^{(0)}-d_2^{(1)}\delta^{(4)}D^{(0)})/\Delta \tag{68}$$

$$A^{(4)}=-(d_2^{(0)}-d_2^{(1)}\delta^{(3)}D^{(0)})/\Delta \tag{69}$$

$$\Delta=(d_2^{(1)}\delta^{(3)}D^{(4)}-d_2^{(1)}\delta^{(4)}D^{(3)} + d_2^{(3)}\delta^{(4)}D^{(0)}-d_2^{(4)}\delta^{(3)}D^{(0)}) \tag{70}$$

したがって，式(7)(54)(55)を考慮して式(13)より界面をよぎるパワー成分

$$\langle P_2^{(0)}\rangle=\frac{1}{2}|A^{(0)}|^2\omega^2 D^{(0)}\mathrm{Re}[d_2^{(0)}] \tag{71}$$

$$\langle P_2^{(1)}\rangle=|A^{(1)}|^2 d_2^{(1)}\langle P_2^{(0)}\rangle/d_2^{(0)} \tag{72}$$

$$\langle P_2^{(3)}\rangle=|A^{(3)}|^2(\delta^{(3)}d_1^{(3)}+D^{(3)}d_2^{(3)}) \times\langle P_2^{(0)}\rangle/(D^{(0)}d_2^{(0)}) \tag{73}$$

$$\langle P_2^{(4)}\rangle=|A^{(4)}|^2(\delta^{(4)}d_1^{(4)}+D^{(4)}d_2^{(4)}) \times\langle P_2^{(0)}\rangle/(D^{(0)}d_2^{(0)}) \tag{74}$$

が得られる．計算結果は界面をよぎるエネルギの保存則より

$$-\langle P_2^{(0)}\rangle+\langle P_2^{(1)}\rangle+\langle P_2^{(3)}\rangle+\langle P_2^{(4)}\rangle=0 \tag{75}$$

が成り立つことから確かめられる．

6. 計算結果の例

計算例のための入力データとして，水に対する質量密度比 ρ/ρ_w を 2.00, そして水中音速 v_w に対する異方性材の主軸方向横波速度の比 $\sqrt{(C_{66}/\rho)}/v_w$ を 1.73 とする．また主軸座標における異方性弾性定数の比が $\hat{C}_{11}/\hat{C}_{66}=20.7$, $\hat{C}_{22}/\hat{C}_{66}=5.91$, $\hat{C}_{12}/\hat{C}_{66}=2.07$ となる場合を考える[12]．その時の算出結果を Fig. 4 から Fig. 6 にまとめた．いずれの結果も式(75)が成り立つことを数値的に確認している．

Fig. 4 はパワー反射率 E_R（太実線）と 2 つの波のパワー透過率 E_{QP}, E_{QS}（細実線）の入射角 θ 依存性を示したもので，パラメータとして主軸偏角 ϕ を−30° から 90° まで 15° 刻みに選んだ結果である．本計算例では臨界角が 40° 未満なので，θ の表示範囲を 0° から 45° に選んだ．いずれも異方性体内の 2 つの波に対するそれぞれの臨界入射角で，曲線が急変している．透過波の曲線に付けた下添字の QP と QS は，それぞれ Fig. 3 の異方性体に対する 2 つのスローネス曲線の，内側のものと外側のものの特性波に対応することを示す．これらの下添字による区別は，異方性が弱いときに等方性体の縦波（P 波）と横波（S 波）に準ずることに由来するが，異方性の強い複合材の様な場合には，波の伝播方向と粒子の運動方向との関係が等方性の場合とかなりかけ離れた状態になる．そのために，いわゆる縦波と横波としての区別は本質的でなくなる．また $\phi=45°$ のグラフの $\theta=20°$ 近辺では E_{QS} 曲線が 2 つ現れている．これは外側のスローネス曲線が非凸状であるとき，Fig. 3 の様にスローネスベストル OA と OB に対応する波が生成されるためである．このことから，異方性体の境界によって生成する波は，無限異方性体で論ずる特性波と異なり，単に速い波（P 波）と遅い波（S 波）により区別整理することは出来ないことが分がる．したがって本論文では，波に対応する実スローネス曲線が内側の曲線か外側の曲線かによって区別し，それぞれに対して従来用いられてきた記号 QP と QS を援用して表記した．

主軸偏角が正と負の時の E_R 曲線の比較から（たとえば Fig. 4 の $\phi=-30°$ と $\phi=30°$ における E_R 曲線）ϕ の絶対値が等しいならばパワー反射率は同値となるが，異方性体内に透過する波が 2 つ生成されるときは，その波によって運ばれるパワー配分の入射角依存在は異なっている．

Fig. 5 はパワー反射率 E_R（太実線）と 2 つの波のパワー透過率 E_{QP}, E_{QS}（細実線）の主軸偏角 ϕ 依存

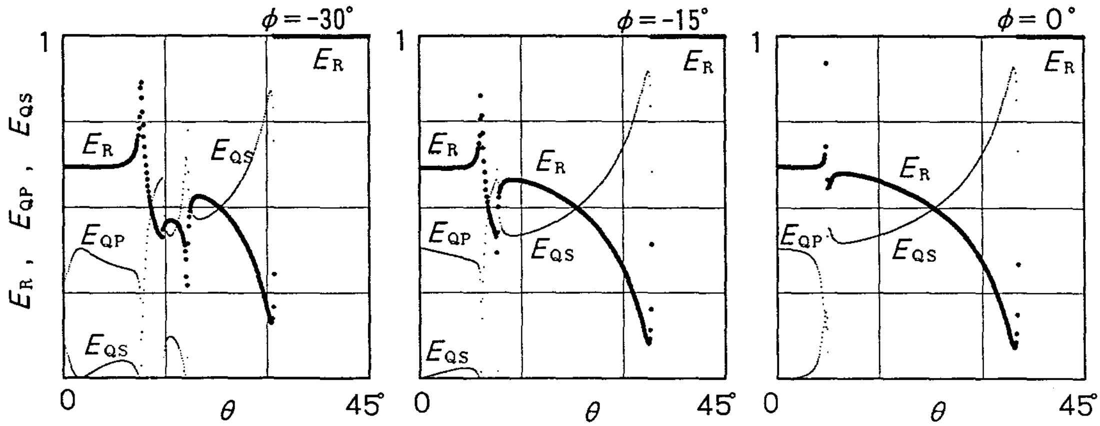

Fig. 4(a) Coefficients of power reflection, E_R, and Power transmissions, E_{QP} and E_{QS}, to the incident angle θ for the off-angle $\phi=-30°$, $-15°$, $0°$.

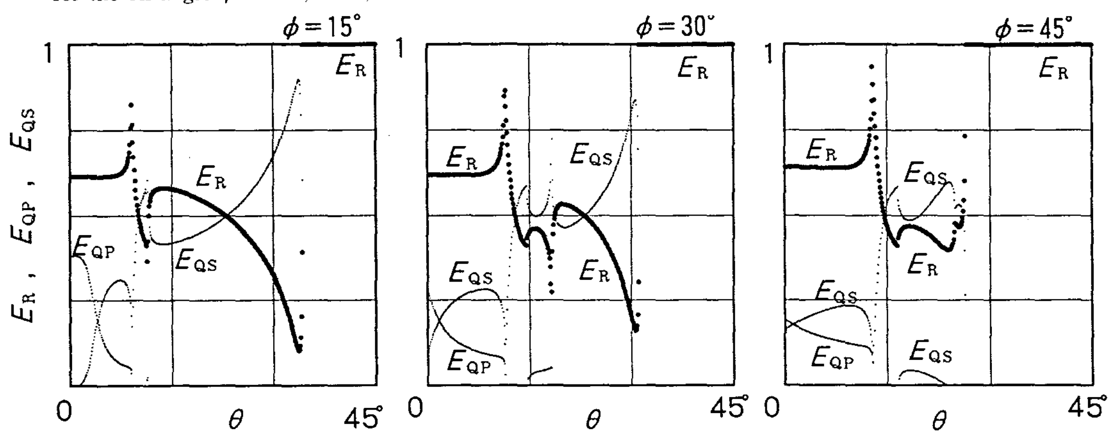

Fig. 4(b) Coefficients of power reflection, E_R, and Power transmissions, E_{QP} and E_{QS}, to the incident angle θ for the off-angle $\phi=15°$, $30°$, $45°$.

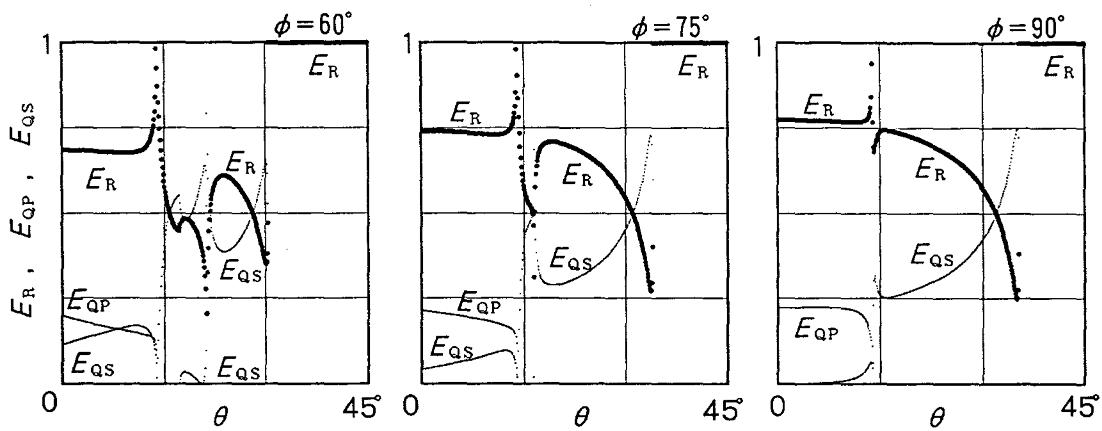

Fig. 4(c) Coefficients of Power reflection, E_R, and Power transmissions, E_{QP} and E_{QS}, to the incident angle θ for the off-angle $\phi=60°$, $75°$, $90°$.

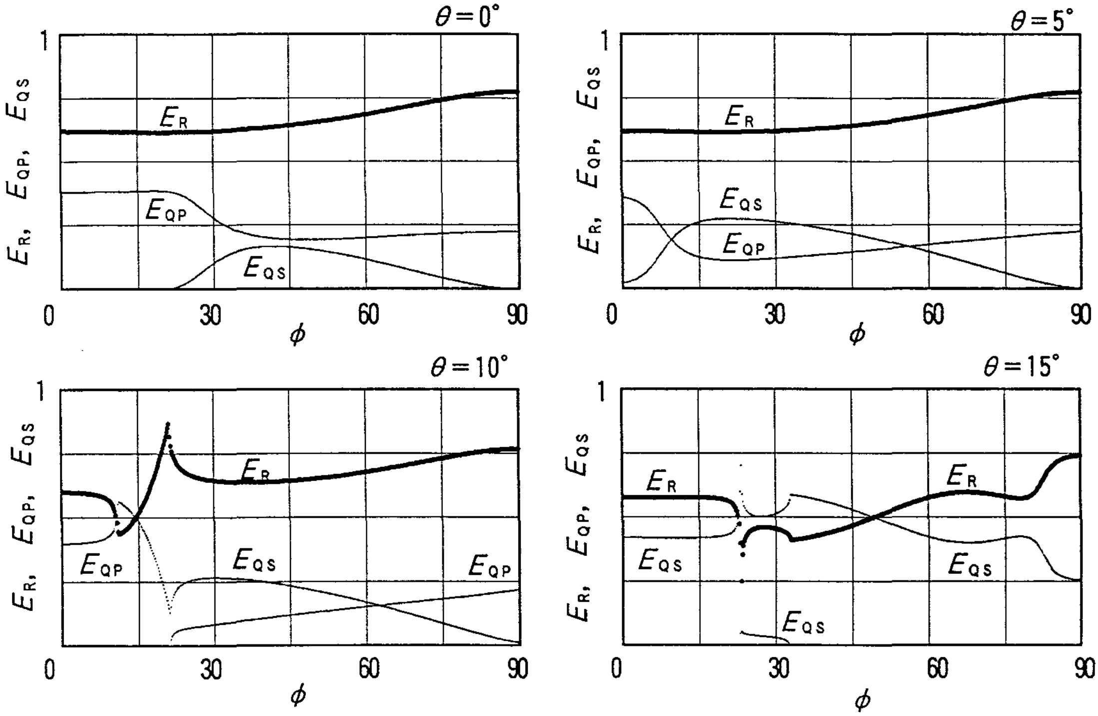

Fig. 5(a) Coefficients of power reflection, E_R, and Power transmissions, E_{QP} and E_{QS}, to the off-angle ϕ for the incident angle $\theta=0°$, 5°, 10°, and 15°.

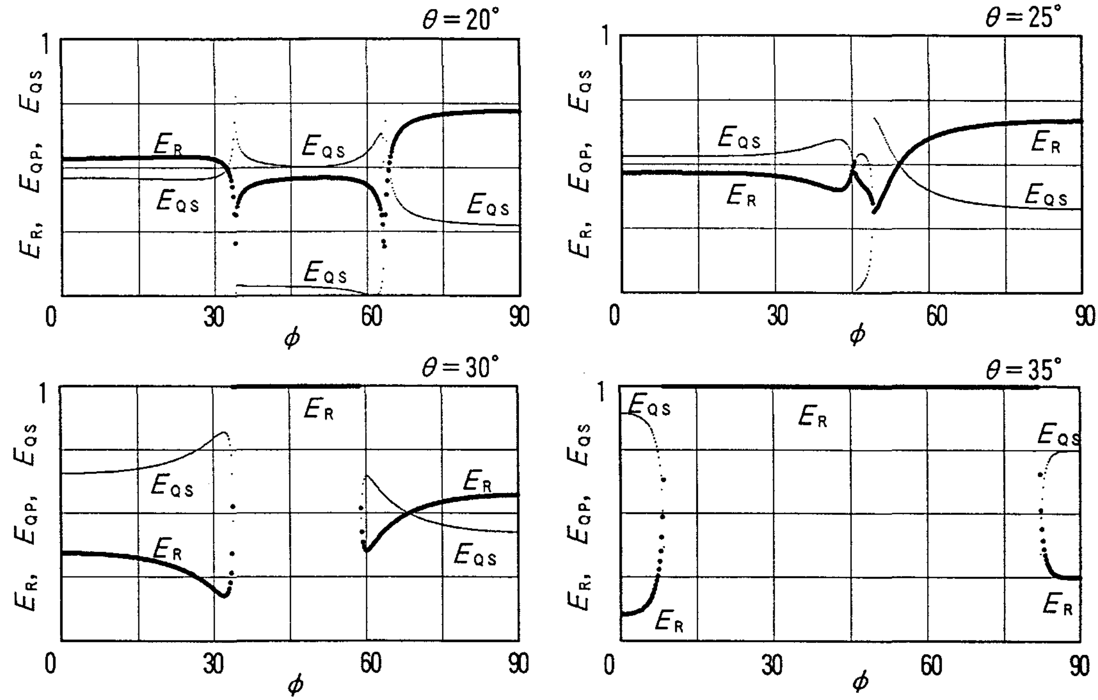

Fig. 5(b) Coefficients of power reflection, E_R, and Power transmissions, E_{QP} and E_{QS}, to the off-angle ϕ for the incident angle $\theta=20°$, 25°, 30°, and 35°.

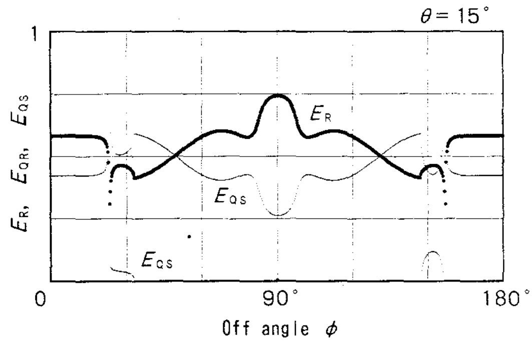

Fig. 6　Symmetric curves of the coefficient E_R.

性を 0° から 90° に渡って示したものである．パラメータは入射角 θ である．θ が 0° の時は，反射波による E_R が最も大きく，そして透過波の E_{QP} は E_{QS} より大きい．しかし入射角に角度がついてくるにつれ E_{QS} の割合がかなり占めるようになる．なお，$\theta=15°$ から $\theta=35°$ までのグラフには E_{QP} 曲線は現れず，$\theta=20°$ のグラフでは 2 つの E_{QS} 曲線が現れている．

Fig. 6 はパワー反射率 E_R（太実線）と 2 つの波のパワー透過率 E_{QP}，E_{QS}（細実線）の主軸偏角 ϕ 依存性を 0° から 180° に渡って示し，E_R 曲線が $\phi=90°$ に関して左右対称形になることを確かめたものである．2 つの透過波が生ずる場合は，E_{QP} と E_{QS} の曲線は $\phi=90°$ に関して左右対称形にはならない．

7. 結　　言

本解析は，異方性複合材料の衝撃応答解析や超音波評価解析につながる基礎解析として行ったものである．複合材料の切断面が異方性対称面とならない場合，弾性波の伝播挙動は非常に複雑である．これを境界値問題としてとらえ，波動場の解を形式的に構成することも可能であろうが，異方性体内の波動現象に対する考察がなければ，解の選択が困難となるので，解析は非常に難しくなってしまう．そこで見通しよく取り扱う方法として，スローネス特性面とパワーフローベクトルの利用法を述べた．そして，具体的に異方性非対称面による弾性波のパワー反射率とパワー透過率を算出し，グラフに例示した．これらの扱い方は，異方性体の動的応答解析のために参考となるだろう．

謝　　辞

本研究の遂行に当たり，著者の一人は日本機械学会研究分科会を通し，山形大学の渡辺一実教授より有益な討論を，また一部池谷科学技術振興財団よりご援助頂いた．ここに記して衷心から謝意を表します．

参 考 文 献

(1) Ohyoshi, T. (1985) : "Energy propagation velocity of elastic waves in sandwich layer", *Trans. ASME, Jour. of Vibration, stress, and Reliability in Design*, Vol. 107, pp. 235-242.

(2) Rokhlin, S.I. *et al*. (1986) : "Splitting of domain of angles for incident wave vectors in elstic anisotropicmedia", *Jour. Appl. Phys*., Vol. 59, No. 11, pp. 3672-3677.

(3) Rokhlin, S.I. *et al*. (1986) : "Reflection and refraction of elstic waves on a plane interface between two generally anisotropic media", *Jour. Acoust. Soc. Am*., Vol. 79, No. 4, pp. 906-913.

(4) 大好 (1979) :「繊維強化複合材の異方性対称軸に傾斜不整合な切断面を伝播するレイリー波」, 日本機械学会論文集, 45 巻 349 号, 629 頁.

(5) Henneke, E.G. (1972) : "Reflection-refraction of a stress wave at a plane boundary between anisotropic media", *Jour. Acoust. Soc. Am*., Vol. 51, No. 1 pp. 210-217.

(6) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F. (1957), *Elastic Waves in Layered Media*, p. 82, McGraw-Hill.

(7) Liu, G.R., Tani, J., Watanabe, K. and Ohyoshi, T. (1990) : "Lamb wave propagation in anisotropic laminates", *Trans. ASME, Jour. Appl. Mech*., Vol. 57, No. 4, pp. 923-929.

(8) Hearmon, R.F.S. (1961) : *An introduction to Applied anisotropic elasticity*, p. 68, Oxford university press.

(9) Kraut, E.A. (1963) : "Advances in the theory of anisotropic elastic wave propagation", *Reviews of Geophysics*, Vol. 1, No. 3, pp. 401-448.

(10) Auld, B.A. (1973) : *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Vol. 1, Chap. 7, John Wiley & Sons., New York.

(11) 大好 (1990) :「平面境界における波の伝播」, 日本機械学会編「衝撃破壊力学」, 40-58 頁, 技報堂

(12) Van Der Hijden, J.H.M.T. (1987) : *Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media*, p. 216, North-Holland.