秋田大学鉱山学部研究報告，第６号，1985年10月

論　文

半無限弾性体における衝撃エネルギ分布

三浦公久*・大好　直*

Energy distributions Produced by a Mechanical Impact in an Elastic Half-space.

Kimihisa MIURA* and Tadashi OHYOSHI*

Abstract

The present work deales with an theoretical analysis on the transient problem of normal line loadings varying with time as Heaviside step function on an elastic half-space. The formal solutions are obtained by using Fourier-Laplace double integral transforms. Their inverse transforms are effectively evaluated by the Cagniard's method. This method is interpreted here by making use of mappings of integral contours on the Riemann surface to yield the exact solutions. Numerical calculations of three stress components and a strain energy density are carried out within a disturbed region. Their results are arranged for 3-D graphic representations.

The concluding remarks deduced from the graphics are summarized as follows:

[1] The contribution to the surface response of the energy of the Rayleigh wave becomes predominant as the response time passes, because of the weak attenuation.

[2] The energy components due to dilatational waves and shear waves become prominent in the restricted locations. Amplitudes of shear waves are especially large within the 'shear window' the region of which extends in the direction about 50° underneath the impact surface.

[3] There is little contribution of the von Schmidt wave.

1. 緒　　　言

半無限弾性体表面に垂直荷重が時間に関してステップ関数状に作用する問題はラムによって1904年に発表された(1)のでラムの問題と呼ばれている．ラムはこの問題を解くにあたり，フーリエ・ラプラス二重変換形で与えられる応力解をCagniardの手法を用いて逆変換し，閉じた形の解を導くことに初めて成功した．それ以後，弾性体内部の波源による衝撃解析(2)，爆発による弾性体の応答(3)，弾性平板の衝撃境界値問題(4)など過渡的な境界値問題の多くにこの手法が応用されている．一方，この手法を用いた解析の数値結果を見てみると，その多くが媒質表面および震央における変位および応力を調べたものであり，表面波であるRayleigh波の影響は十分に調べられているが，媒質内部について応力を詳しく計算したものや，エネルギ伝播の様相を調べたもの，膨張波とせん断波の干渉によって生ずるフォンシュミット波の影響を調べたものはほとんど見あたらないようである．

一般に弾性体内の波動伝播を考える場合，特殊な状態を除けば波動の境界反射に伴い波動成分のモード変換が生ずる．このことは水中や空気中の波動伝播と異なり弾性体の理論衝撃解析を非常に難しいものにしている．そのため，基本的な半無限弾性体の衝撃波伝播の様子を調べる解析を示すことは，媒質内に亀裂や介在物のある場合の衝撃波散乱解析や，分散性のある平板や積層材の過渡応答解析のためにも重要となる．そこで本報は平面歪状態のラムの問題をCagniard法により理論解析して，媒質内の応力とエネルギ分布を求め，表面衝撃による応答の詳細を調べたものである．その結果として，自由表面ではRayleigh表面波の，衝撃点直下では膨張波の，表面から50度付近の方向ではせん断波の，各エネルギ成分が衝撃応答に大きな寄与を与えることを定量的

1985年７月30日受理

*秋田大学鉱山学部機械工学科．Department of Mechanical Engineering, Mining College, Akita University.

に明らかにした．

2. 理 論 解 析

2.1 問題設定と基礎式

Fig.1に示すように均質等方な半無限線形弾性体の自由表面 $y=0$ に時間 $t=0$ で垂直に，しかも z 軸に沿って一様な集中線荷重を急激に加える．従って変形状態は平面歪であり，変位 u, v は z 座標に依存しない．ポテンシャルを使って波動方程式を表わすと次のようになる．

$$\nabla^2\phi=1/c_L^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\Psi=1/c_T^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad\cdots\cdots(1)$$

ここで

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad\cdots\cdots(2)$$

であり，c_L, c_T はそれぞれ膨張波とせん断波の位相速度である．また，ポテンシャルを使って表わした応力成分は

$$\sigma_{yy}=\lambda\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yx}=\mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\sigma_{xx}=\lambda\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)$$

であり，λ, μ はそれぞれラメの定数と横弾性係数である．境界条件は

$$\sigma_{yy}(x,0,t)=\sigma_0\delta(x)H(t)$$

$$\sigma_{yx}(x,0,t)=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

となり，初期条件は

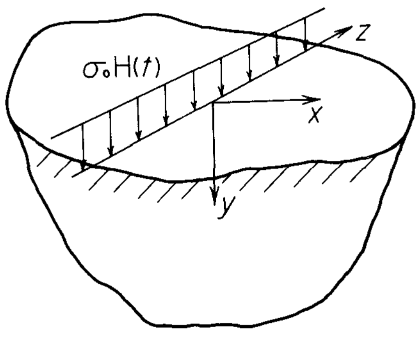

Fig.1 Transient line load on a half-space.

$$\phi(x,y,0)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,y,0)=0$$

$$\Psi(x,y,0)=\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,y,0)=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

として表わされる．ここで，σ_0 は衝撃応力振幅，$\delta(\bullet)$, $H(\bullet)$ はそれぞれディラックのデルタ関数とヘビサイドのステップ関数である．また，積分変換は次のように定義される．

フーリエの積分変換対

$$\mathscr{F}[f(x)]\equiv f^{\mathrm{F}}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-is\xi x}dx$$

$$\mathscr{F}^{-1}[f^{\mathrm{F}}(\xi)]\equiv f(x)=\frac{s}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f^{\mathrm{F}}(\xi)e^{is\xi x}d\xi \quad\cdots\cdots(6)$$

ラプラスの積分変換対

$$\mathscr{L}[f(t)]\equiv f^{\mathrm{L}}(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathscr{L}^{-1}[f^{\mathrm{L}}(s)]\equiv f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}}f^{\mathrm{L}}(s)e^{st}ds \quad\cdots\cdots(7)$$

波動方程式に式(6), (7)の積分変換を施し，ポテンシャル ϕ, ψ の変換解を求めると

$$\phi^{\mathrm{FL}}(\xi,y,s)=A(\xi,s)e^{-s\eta_1(\xi)y}$$

$$\Psi^{\mathrm{FL}}(\xi,y,s)=B(\xi,s)e^{-\eta_2(\xi)y} \quad\cdots\cdots(8)$$

ここで

$$\eta_1(\xi)=\sqrt{\xi^2+v_1^2},\quad \eta_2(\xi)=\sqrt{\xi^2+v_2^2},$$

$$\mathrm{Re}\,\eta_i\geqq 0(i=1,2)$$

$$v_1=1/c_{\mathrm{L}},\quad v_2=1/c_{\mathrm{T}} \quad\cdots\cdots(9)$$

である．応力成分と境界条件を積分変換し，式(8)を代入することにより，未定係数 A, B が定まり，これらを使って整理すると応力成分の形式解は

$$\sigma_{yy}{}^{\mathrm{FL}}(\xi,y,s)=\frac{\sigma_0}{s}\{(2\xi^2+v_2^2)^2e^{-s\eta_1y}-4\xi^2\eta_1\eta_2e^{-s\eta_2y}\}/\Delta$$

$$\sigma_{yx}{}^{\mathrm{FL}}(\xi,y,s)=-2i\frac{\sigma_0}{s}\xi\eta_1(2\xi^2+v_2^2)(e^{-s\eta_1y}-e^{-s\eta_2y})/\Delta$$

$$\sigma_{xx}{}^{\mathrm{FL}}(\xi,y,s)=\frac{\sigma_0}{s}\{(2\xi^2+v_2^2)(v_2^2-2v_1^2-2\xi^2)e^{-s\eta_1y}$$

$$+4\xi^2\eta_1\eta_2e^{-s\eta_2y}\}/\Delta \quad\cdots\cdots(10)$$

として求まり，ここで分母の $\varDelta$ は

$$\varDelta=(2\xi^2+v_2^2)^2-4\xi^2\eta_1\eta_2 \quad\cdots\cdots(11)$$

として与えられ，$\varDelta=0$ は Rayleigh の方程式を表わす．

式(10)をフーリエ・ラプラス逆変換すれば本問の解が求まる．

2.2 Cagniard の手法

式(10)の逆変換は Cagniard の手法を用いて行う

こととし，それぞれの応力成分に対して同様に行えるのでここでは σ_{yy}^{FL} の逆変換手法のみを詳細に述べることにする．

まず式(10)にフーリエ逆変換を施すと

$$\sigma_{yy}{}^{L}=\frac{1}{2\pi}\sigma_0[I_1{}^L+I_2{}^L] \quad \cdots\cdots (12)$$

となる．ここで

$$\left.\begin{aligned} I_1{}^L&=\int_{-\infty}^{\infty}(2\xi^2+v_2{}^2)^2e^{-s\eta_1 y}/\Delta\cdot e^{is\xi x}d\xi \\ I_2{}^L&=-4\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,\eta_1\eta_2 e^{-s\eta_2 y}/\Delta\cdot e^{is\xi x}d\xi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

である．結局，式(13)のそれぞれのラプラス逆変換を求めればよいのであるが，直接逆変換積分を施せば二重積分形となり数値評価が非常にやっかいになる．ところが式(13)の両式の被積分関数には指数関数の指数部以外に，ラプラス変換パラメータ s が入っていない．この点に着目し，変数変換によりフーリエ逆変換形をラプラス変換形に置き換え，ラプラス逆変換を視察により行おうというのがCagniardの手法の妙味である．

式(13)の両式は，それぞれ被積分関数の特性が異なるために別々に逆変換することにする．

2.2.a I_1^L のラプラス逆変換　式(13)の第一式を書き直すと

$$I_1{}^L=\int_\Gamma(2\xi^2+v_2^2)^2/\Delta e^{-s(\sqrt{\xi_2+v_1^2}\,y-i\xi x)}d\xi \quad \cdots\cdots (14)$$

となる．この形をラプラス変換形にするには，その積分を t の積分になるように変数変換しなければならないので

$$t=\sqrt{\xi^2+v_1{}^2}\,y-i\xi x \quad \cdots\cdots (15)$$

とすると

$$\xi_{1\pm}=\frac{\pm y\sqrt{t^2-v_1{}^2R^2}+ixt}{R^2} \quad \cdots\cdots (16)$$

となる．ここで

$$R=\sqrt{x^2+y^2} \quad \cdots\cdots (17)$$

である．この変数変換によって積分路の変化を調べたものがFig. 2 (a)である．横軸に Reξ，縦軸に Imξ をとっており，対称性より虚部の正の領域だけをとっている．描かれた曲線は ReI_1^L, ImI_1^L の等高線であり，虚軸上の×印は下から iv_1, iv_2 の分岐点を示しており，曲線が集中している部分がRayleighの極である．この図から ReI_1^L は領域全体で連続となるが，ImI_1^L は虚軸上の iv_1 より大きな領域で不連続となっており，被積分関数が多価性を持っていることを示している．そこで iv_1 より大きな虚軸上に切断を入れることによって解析的な一価の面を作ることができる．またフーリエ逆変換積分路 Γ と式(16)で与えられる積分路 Γ_1 との間には特異点が存在せず，また $\xi\to\infty$ のとき被積分関数は指数関数的に0に近づくため，$x\geqq0$ に対しては積分路 Γ からCagniard積分路 Γ_1 に置き換えることができる．よって全ての x に対して変数変換された積分は次のように表わされる．

$$I_1{}^L=\int_{v_1R}^{\infty}\left[M_{yy1}(\xi_{1+})\frac{\partial\xi_{1+}}{\partial t}-M_{yy1}(\xi_{1-})\frac{\partial\xi_{1-}}{\partial t}\right]e^{-st}dt \quad \cdots\cdots (18)$$

ここに

$$M_{yy1}(\xi)=(2\xi^2+v_2{}^2)^2/\Delta \quad \cdots\cdots (19)$$

である．式(18)はラプラス変換形となっているため，逆変換は視察によって求まり

$$I_1=\mathscr{L}^{-1}\mathscr{F}^{-1}[I_1{}^{FL}]=H(t-v_1R)\mathrm{Re}\left[M_{yy1}(\xi_{1+})\frac{\partial\xi_{1+}}{\partial t}-M_{yy1}(\xi_{1-})\frac{\partial\xi_{1-}}{\partial t}\right] \quad \cdots\cdots (20)$$

と表わされる．

2.2.b I_2^L のラプラス逆変換　次に式(13)の第2式を考える．これを書き改めると，

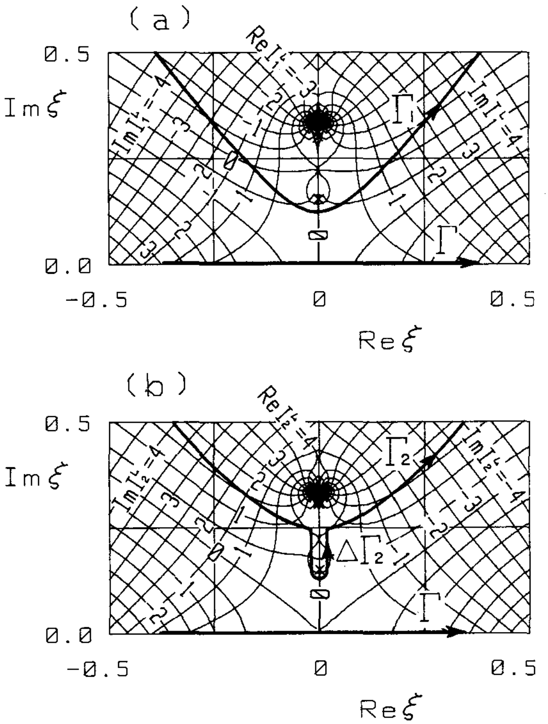

Fig.2 Cagniard's contour Γ_1 and Γ_2 on Riemann surface.

$$I_2^L=-4\int_\Gamma \xi^2\eta_1\eta_2/\Delta\cdot e^{-s(\sqrt{\xi^2+v_2^2}\,y-ix\xi)}d\xi \quad \cdots\cdots (21)$$

となり前項と同様に行うと

$$t=\sqrt{\xi^2+v_2^2}\,y-i\xi x \quad \cdots\cdots (22)$$

$$\xi_{2\pm}=\frac{\pm y\sqrt{t^2-v_2^2R^2}+ixt}{R^2} \quad \cdots\cdots (23)$$

と表わされる．式(22)，(23)は式(15)，(16)の v_1 を v_2 に置き換えただけであり $x\geqq 0$，$v_1\geqq v_2x/R$ のときには前項と全く同様に扱うことができ，逆変換解は

$$I_2=H(t-v_2R)\mathrm{Re}\left[M_{yy_2}(\xi_{2+})\frac{\partial\xi_{2+}}{\partial t}-M_{yy_2}(\xi_{2-})\frac{\partial\xi_{2-}}{\partial t}\right] \quad \cdots\cdots (24)$$

となる．ここに

$$M_{yy_2}(\xi)=-4\xi^2\eta_1\eta_2/\Delta \quad \cdots\cdots (25)$$

である．また $v_1<v_2x/R$ のときには Cagniard 変換積分路 Γ_2 と ξ の虚軸との交点が iv_1 と iv_2 の間に来るため，Fig.2(b)のように付加経路 $\Delta\Gamma_2$ を考える必要がでてくる．$\Delta\Gamma_2$ は2つの線分と1つの半円弧からなるが，半径を小さくすると半円弧の積分は0となるので $\Delta\Gamma_2$ に沿う左右の線分による積分の寄与だけを考えればよい．また，この付加経路を考えるにあたり偏角の定義をしておかなければならないが，解の有限性の条件より $\mathrm{Re}\,\eta_1\geqq 0$，$\mathrm{Re}\,\eta_2\geqq 0$ であることから，Fig.3のように動点Pに対する偏角を定義してやると，これらの条件が満足される．$\Delta\Gamma_2$ による η_1，η_2 の値を示せば Table. 1のように表わされる．よって $\Delta\Gamma_2$ に沿う積分は

Table.1 Value of η_1, η_2 along $\Delta\Gamma_2$.

Path	$\theta_{11}+\theta_{21}$	$\theta_{21}+\theta_{22}$	η_1	η_2
the left side of $\Delta\Gamma_2$	$-\pi$	0	$-i(r^2-v_1^2)^{1/2}$	$(v_2^2-r^2)^{1/2}$
the right side of $\Delta\Gamma_2$	π	0	$i(r^2-v_1^2)^{1/2}$	$(v_2^2-r^2)^{1/2}$

$$[I_2^L]_{\Delta\Gamma_2}=\int_{v_1x+\sqrt{v_2^2-v_1^2}\,y}^{v_2R}M_{yy\Delta\Gamma_2}(r_-)\frac{\partial r_-}{\partial t}e^{-st}dt \quad \cdots\cdots (26)$$

となる．ここで

$$r_-=\frac{xt-y\sqrt{v_2^2R^2-t^2}}{R^2} \quad \cdots\cdots (27)$$

$$M_{yy\Delta\Gamma_2}(r)=-\mathrm{Im}[(M_{yy_2})_{\mathrm{right}\ \Delta\Gamma_2}-(M_{yy_2})_{\mathrm{left}\ \Delta\Gamma_2}]$$
$$=-8r^2(2r^2-v_2^2)^2\sqrt{r^2-v_1^2}\sqrt{v_2^2-r^2}/\Delta_r \quad \cdots\cdots (28)$$

$$\Delta_r=(2r^2-v_2^2)^4+16r^4(r^2-v_1^2)(v_2^2-r^2) \quad \cdots\cdots (29)$$

である．従って解は閉じた形で表わされ，応力の最終的な解を各応力成分について整理して示せば次のようになる．

$$\sigma_{yy}=\frac{\sigma_0}{2\pi}\Bigg\{H(t-v_1R)\mathrm{Re}\left[M_{yy_1}(\xi_{1+})\frac{\partial\xi_{1+}}{\partial t}-M_{yy_1}(\xi_{1-})\frac{\partial\xi_{1-}}{\partial t}\right]+H(t-v_2R)\mathrm{Re}\Bigg[M_{yy_2}(\xi_{2+})\frac{\partial\xi_{2+}}{\partial t}$$
$$-M_{yy_2}(\xi_{2-})\frac{\partial\xi_{2-}}{\partial t}\Bigg]+H(t-v_1x-\sqrt{v_2^2-v_1^2}\,y)H(v_2R-t)\left[M_{yy\Delta\Gamma_2}(r_-)\frac{\partial r_-}{\partial t}\right]\Bigg\} \quad \cdots\cdots (30)$$

$$\sigma_{yx}=\frac{\sigma_0}{\pi}\Bigg\{H(t-v_1R)\mathrm{Im}\left[M_{yx_1}(\xi_{1+})\frac{\partial\xi_{1+}}{\partial t}-M_{yx_1}(\xi_{1-})\frac{\partial\xi_{1-}}{\partial t}\right]+H(t-v_2R)\mathrm{Im}\Bigg[M_{yx_2}(\xi_{2+})\frac{\partial\xi_{2+}}{\partial t}$$
$$-M_{yx_2}(\xi_{2-})\frac{\partial\xi_{2-}}{\partial t}\Bigg]+H(t-v_1x-\sqrt{v_2^2-v_1^2}\,y)H(v_2R-t)\left[M_{yx\Delta\Gamma_2}(r_-)\frac{\partial r_-}{\partial t}\right]\Bigg\} \quad \cdots\cdots (31)$$

$$\sigma_{xx}=\frac{\sigma_0}{2\pi}\Bigg\{H(t-v_1R)\mathrm{Re}\left[M_{xx_1}(\xi_{1+})\frac{\partial\xi_{1+}}{\partial t}-M_{xx_1}(\xi_{1-})\frac{\partial\xi_{1-}}{\partial t}\right]+H(t-v_2R)\mathrm{Re}\Bigg[M_{xx_2}(\xi_{2+})\frac{\partial\xi_{2+}}{\partial t}$$
$$-M_{xx_2}(\xi_{2-})\frac{\partial\xi_{2-}}{\partial t}\Bigg]+H(t-v_1x-\sqrt{v_2^2-v_1^2}\,y)H(v_2R-t)\left[M_{xx\Delta\Gamma_2}(r_-)\frac{\partial r_-}{\partial t}\right]\Bigg\} \quad \cdots\cdots (32)$$

ここで

$$M_{yx_1}(\xi)=-M_{yx_2}(\xi)=\xi(2\xi^2+v_2^2)\sqrt{\xi^2+v_1^2}/\Delta$$
$$M_{yx\Delta\Gamma_2}(r)=-2r(2r^2-v_2^2)^3\sqrt{r^2-v_1^2}/\Delta$$
$$M_{xx_1}(\xi)=(2\xi^2+v_2^2)(v_2^2-2v_1^2-2\xi^2)/\Delta$$
$$M_{xx_2}(\xi)=4\xi^2\sqrt{\xi^2+v_1^2}\sqrt{\xi^2+v_2^2}/\Delta$$
$$M_{xx\Delta\Gamma_2}(r)=8r^2(v_2^2-2r^2)^2\sqrt{r^2-v_1^2}\sqrt{v_2^2-r^2}/\Delta_r \quad \cdots\cdots (33)$$

である．

式(30)の任意時間 t 経過後の応答を調べるため，各領域を模式的な波形と対照させれば，Fig.4のようになる．図中 c_R は Rayleigh 波速度を示している．領域Iは式(30)の第一項目の影響を受けている部分，つまり，膨張波の寄与を示している．領域IIは第二項目，つまり，せん断波の影響を受けている．領域IIIは第三項目で表わされ，図で示したように膨張波の波頭が自由表面と交わる位置から発生し，ホイヘンスの原理で拡がってせん断波の波頭に吸収されていくフォンシュミット波を表わしている．また，IVで示した振幅は式(30)の第一，第二項目の分母に現れる Rayleigh 波の寄与を示したものであり，他の波頭と異なり表面波であるため二次元的な伝播形態を持っている．

2.3　歪エネルギ密度と静的な解

衝撃負荷による弾性体内のエネルギ伝播を考える

際には運動エネルギと歪エネルギを考えればよいが，本問のように応答変化が時間に関して相似形になるような場合には，単位時間に通過する運動エネルギ密度は歪エネルギ密度によって把握できるので歪エネルギ密度だけを調べることにする．

歪エネルギ密度Uは次式によって与えられる．

$$U=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{ij}\,de_{ij} \quad\cdots\cdots (34)$$

また平面歪状態における応力と歪の関係式は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yy}&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_{yy}+\nu e_{xx})\\ \sigma_{yx}&=\frac{E}{1+\nu}e_{yx}\\ \sigma_{xx}&=\frac{E}{1-\nu^2}(e_{xx}+\nu e_{yy})\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots (35)$$

となり，E, νはそれぞれ，縦弾性係数，ポアソン比を，e_{yy}, e_{yx}, e_{xx}は歪成分を表わしている．式(34), (35)より歪エネルギ密度は容易に計算でき最終的な結果だけを示すと次のようになる．

$$U=\frac{1}{E}\left[\frac{1-3\nu^2}{2(1-\nu^2)}(\sigma_{xx}{}^2-\sigma_{yy}{}^2)+\frac{2\nu^3}{1-\nu^2}\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\frac{1+\nu}{2}\sigma_{yx}{}^2\right] \quad\cdots (36)$$

また，文献5より静的な応力成分はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{yy}&=\frac{2\sigma_0}{\pi}\frac{y^3}{R^4}\\ \sigma_{yx}&=\frac{2\sigma_0}{\pi}\frac{xy^2}{R^4}\\ \sigma_{xx}&=\frac{2\sigma_0}{\pi}\frac{x^2y}{R^4}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots (37)$$

として与えられ，時間の十分経過した時の解の吟味に用いられる．

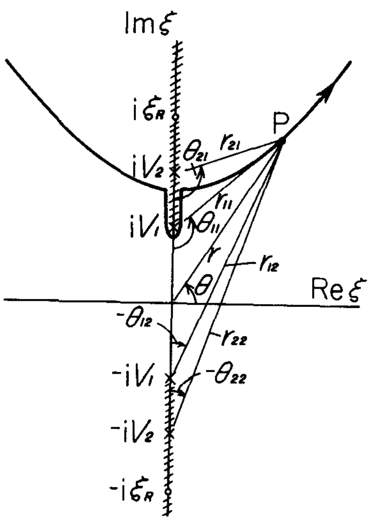

Fig.3 Definition of arguments.

3. 数値結果と検討

数値計算例はアルミ材について行い，ポアソン比を$\nu=0.34$, 膨張波速度を$c_L=6.5$km/secとした．また本問には固有寸法がないので膨張波到達時間で無次元化した時間τ（すなわち$\tau=c_Lt/R$）を与えて計算した．従って任意の位置への膨張波到達時間は$\tau_L=1$となり，これに対するせん断波，Rayleigh波の到達時間はそれぞれ$\tau_T=2.03$, $\tau_R=2.18$となる．また，この他に膨張波とせん断波の干渉によって現れるフォンシュミット波の到達時間は次式によって計算される．

$$\tau_F=c_L/R\{(x-y\cot\alpha)/c_L+y\,\mathrm{cosec}\,\alpha/c_T\} \quad\cdots\cdots (38)$$

ここで，$\alpha=\cos^{-1}(c_T/c_L)$である．

3.1 応力成分に対する結果と検討

Fig.5は座標(1, 0.2)において横軸に無次元時間τ, 縦軸に各応力成分値をとったものである．$\tau=1$で膨張波が到達し，続いて記号τ_F, τ_T, τ_R'で示すように，それぞれフォンシュミット波，せん断波，Rayleigh波が到達している．この場合，$\tau_F=1.33$である．また，この位置は自由表面近傍であるため，応力振幅に与えるRayleigh波の寄与が大きくなっている．図中に表示したプライムの付かない波頭到達時間は衝撃点から観測点までの最短距離で算出したものであるが，σ_{yy}の変動を見るとRayleigh波の最大振幅速度はτ_Rより速く，τ_R'の時間で到達している．τ_R'は衝撃点からRayleigh波が自由表面に沿って伝播し観測点真上に到達した時間なので，前述の結果は，この波が純粋に二次元的な伝播形態をとることを如実に示している．σ_{yx}はτが4以上でほぼ静的な値に

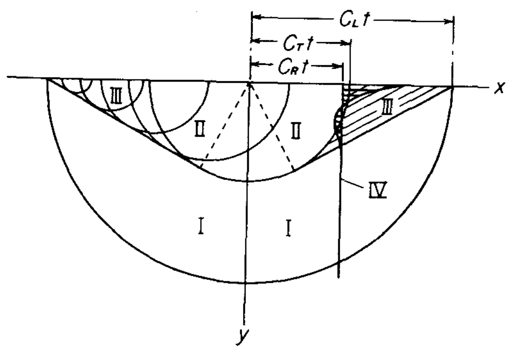

Fig.4 Pattern of wavefronts.

漸近し，図では示していないが σ_{yy}, σ_{xx} も $\tau=16$ 程度で静的な状態になることが確かめられた．Fig.6は衝撃が加えられてから任意時間経過後の，媒質内の擾乱を受けた領域の応力振幅を，x, y 座標に対してプロットし，三次元表示したものである．Fig.6(a)は σ_{yy} について示したものであり，対称性より $x=0$ で切り，左側部分のみを示した．この図は座標(0, 0)から(1, 1)までの領域を斜め上方から俯瞰した状態を示している．実際は，見やすいように高さの尺度を少し縮めており，応力振幅 σ_{yy}/σ_0 も -3 から8までで打ち切っている．図中，刺のある壁のように見える部分は膨張波とせん断波の波頭を示しており，この刺は，円筒波となる波頭を直角座標により離散化して表現したために生じたものである．図ではだいたいの分布の起伏を示すために0.5きざみの等高線を入れて分かりやすくしている．この図から，Fig.4で示した模式図で予想された通りの分布になっていることがわかり，$\nu=0.34$ では自由表面における各波頭の到達位置は膨張波，せん断波，Rayleigh波がそれぞれ1, 0.49, 0.46となっており，せん断波とRayleigh波頭がはほぼ同じような位置に来ており，応答は理論的に特異性を示す衝撃点，膨張波，せん断波の波頭の位置で大きな応答を示している．Rayleigh波の寄与は表面で $-\infty$ となるため図には現れていない．また，フォンミュミット波も有限な変化であるが不連続な寄与を与えていることがわかる．また，この図は垂直応力であるため $x=0$ の線上に衝撃の影響が強く現れている．Fig.6(b)は σ_{yx} に対する三次元分布図である．Fig.6(a)と同様に -3 から8までとって0.5きざみの等高線が入っている．この場合，Rayleighの自由表面における振幅は $+\infty$ となるため明瞭に現れている．また，σ_{yy} の場合とは異なり，衝撃点の左右で反対称分布になるので $x=0$ 上では応力が0となっており，せん断応力のため衝撃点からの影響も少なく，フォンシュミット波も明瞭には現れない．Fig.6(c)は σ_{xx} であり，σ_{yy}, σ_{yx} と同様な作図をしているが，自由表面近傍の応力変動が他の2つより顕著に現れている．

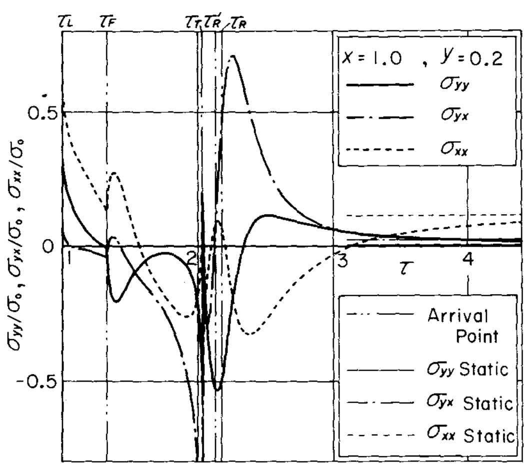

Fig. 5 Time response curves of the stress components σ_{yy}/σ_0, σ_{yx}/σ_0, σ_{xx}/σ_0 at point (1,0.2).

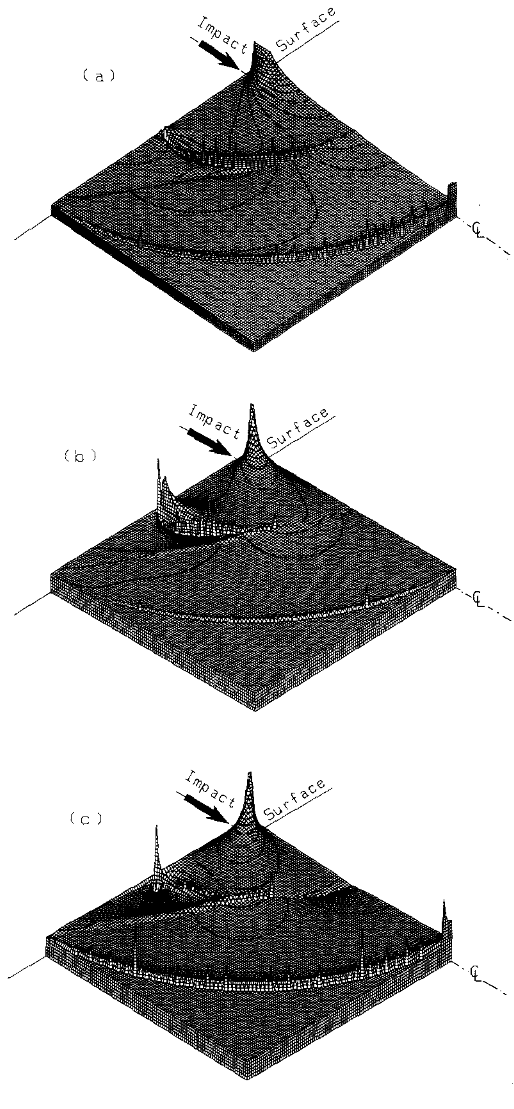

Fig.6 3-D graphic representations of the stress components.

3.2 エネルギ伝播に対する考察

Fig.7 は歪エネルギ密度の三次元分布を示したものである．エネルギをデシベル表示にして，斜め上方から俯瞰した図になっている．等高線は−35から+25まで5ぎざみで入れてある．この図でもわかるように衝撃点近傍は局所的に当然，エネルギが非常に大きくなっている．エネルギ伝播の様子を考えるために，この局所的な寄与以外の分布に注目する．Fig.7 よりそれぞれの波の強さが手に取るようにわかり説明を要しないが，定量的評価のために等高線表示したものを Fig.8 に示す．この Fig.8 の左側半分は −25から +25まで1きざみで等高線をとって衝撃によって乱された領域全体のエネルギ分布を示している．各波頭位置と衝撃点は黒く塗りつぶされ高いエネルギを持っていることがわかる．しかし，エネルギを伝播しない自由表面近傍でも急激なエネルギ減衰のため黒く塗りつぶれエネルギ伝播の様子が明瞭に摑めないため，Fig.8 の右半分で有為なエネルギの寄与を与える部分だけを示した．この図では5から25まで1きざみの等高線を入れている．この図より，エネルギは衝撃点以外では大部分が膨張波，せん断波，Rayleigh 波の3つの波頭に分散され，フォンミュミット波のエネルギの寄与はせん断波に接する位置で少し現れる程度である．各波頭のエネルギ伝播形態を調べてみると，膨張波では衝撃点直下の $x=0$ の線上でその寄与が大きくなり，せん断波はシェアウインド (shear window)(6) と呼ばれる x 軸から50数度の角度付近で大きく，Rayleigh 波では波頭到達の自由表面近傍でだけ寄与を持つことがわかる．このため，三次元的にエネルギを分配する膨張波とせん断波は時間経過と共に媒質内部では R^{-1} のオーダーで，自由表面近傍では R^{-2} のオーダーでエネルギが減衰するため，Rayleigh 波の寄与が次第に支配的になっていく様子を把握することができる．

4. 結　　　言

一般的に衝撃負荷の作用する弾性体の境界値問題

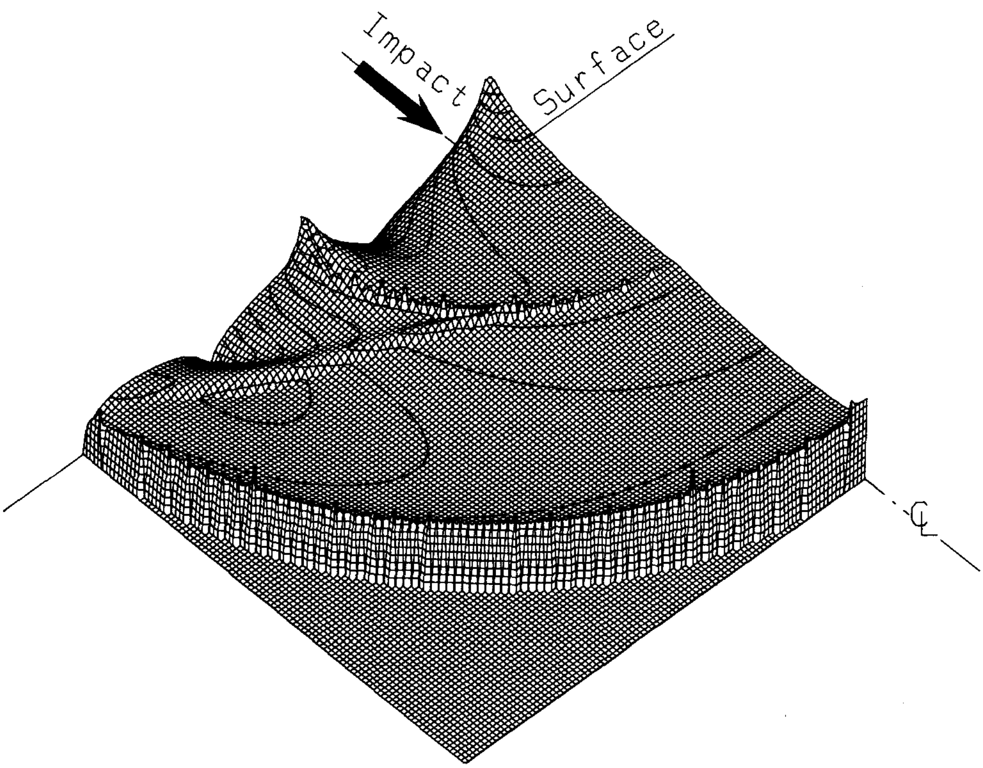

Fig.7 3-D graphic representation of the strain energy density.

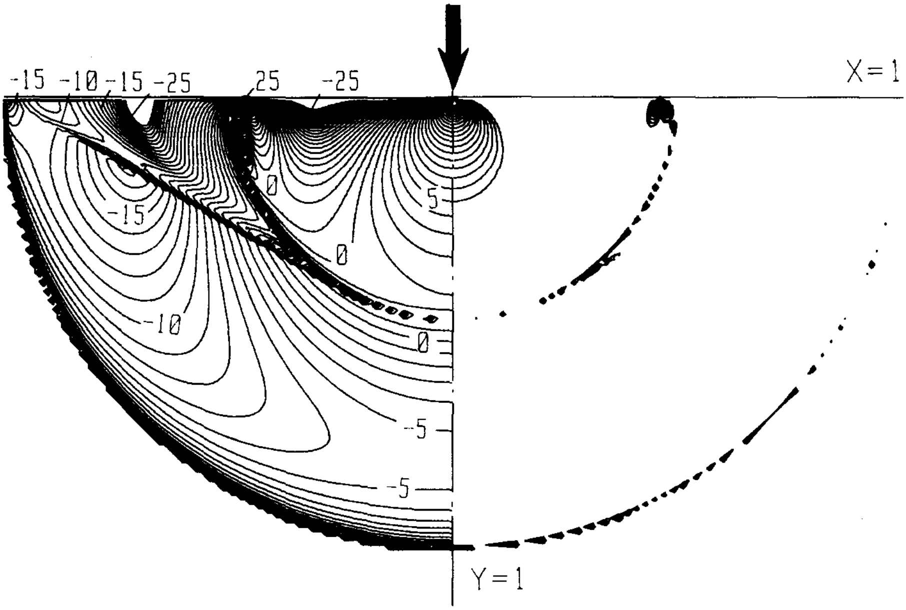

Fig.8　Contour mapping representation of the strain energy density.

を動弾性学の厳密理論で解くということは非常にやっかいであり，有限要素法や，境界要素法のような計算依存度の高い解析においても非常に難しい分野とされている．そこで，膨張波成分とせん断波成分が連成するような基本的で重要な衝撃問題について調べ，より複雑な，境界反射を伴う衝撃波伝播の問題，弾性波散乱の問題などの波頭伝播の様相解明のための基礎的資料とすべく，理論解析と，数値評価を行った．その結果を要約すると次のようになる．

(1)　各応力成分について衝撃で乱される媒質内部の領域の応力値の分布状況を示すことができた．このことにより τ=16 以上では静的な値に漸近し，模式図で予想された波動伝播の様相と厳密に符合することが確認できた

(2)　歪エネルギ密度を求め，媒質内部の三次元分布と等高線分布とをグラフィックで示すことにより，媒質内部のエネルギ配分を明瞭に示すことができた．

(3)　エネルギ伝播の様相が詳しく調べられ，時間経過と共に表面近傍では二次元的な伝播形態を示すRayleigh 波の寄与が増大していき，膨張波は衝撃点直下で，せん断波は x 軸から 50 数度の角度になるシェアウインドの方向で，大きな寄与を持つことがわかった．また，膨張波とせん断波との干渉で現れるフォンシュミット波のエネルギ寄与の割合はせん断波の波頭近傍で少し見られるだけであり，あまり大きくないことがわかった．

おわりに，三次元分布図のパスカル言語プログラムの作成にあたり，協力していただいた大学院生，袴田昌幸君に深く感謝致します．

文　　　献

(1)　Achenbach, J. D. (1973) : *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Pub., 289

(2)　Carvin, W. W. (1956) : *Proc. Roy. Soc. (London) A*. **234**, 528-541.

(3)　Norwood, F. R. (1977) : *Int. J. Eng. Sci.*, **15**, 391-404.

(4)　Ceranogle, A. N. and Pao, Y. H. (1981) : *Trans ASME, Ser. E*, **48**. 125-147.

(5)　渥美　光（1978）：固体力学概論，コロナ社，150.

(6)　Graff, K. F. (1975) : *Wave Motion in Elastic Solids*, Clarendon Press, 343.