

数学的遠近法の教材化についての一考察

— Alberti の作図法を題材とした授業の構想 —

大澤 弘 典

山形大学教育学部数学教育講座

e-mail : hiro@e.yamagata-u.ac.jp

要 約

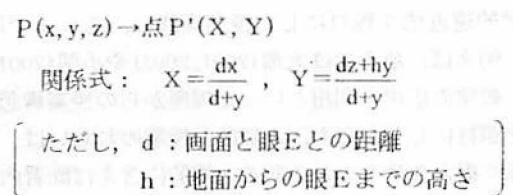
数学的遠近法の教材化について、先行実践(大澤, 2001, 2002 ; 小関, 2001, 2002 等)に見られる「既習内容の深化」とは異なる視座からの教材化の可能性を模索した。数学的遠近法を「文化的な遺産」の一つとして捉え、Alberti による作図法への注視を試みた。彼の作図法を学習者は具体的にどのように理解しうるのか。そこでの学習者の振る舞いおよび中学校数学の関与の可能性を分析・考察した。その結果、次の知見を得た。学習者は彼の作図法を手続きとして容易に理解できる反面、その手続きの意味の把握に際し幾つかの疑問や困難さを持ちうる。学習者の抱くそれらの疑問の解消に、中学校数学は少なからず貢献しうる。Alberti の作図法を題材とした授業は、中学校においても十分に可能であることがわかった。

キーワード : 数学的遠近法, Alberti, 相似の利用, 文化的な遺産

1. 研究の目的と方法

数学的遠近法を題材にした授業実践は、これまでも中学校の数学や選択の授業等で試行されている。例えば、最近では大澤(2001, 2002)や小関(2001, 2002)の実践例が見られる。それらの実践の多くは、数学の応用・利用といった視座からの授業構想であるといえる。そこでは、便宜的に数学的遠近法を題材にしながらも、本質的な授業のねらいは、対象生徒に既習内容である三角形の相似等の内容を深く捉えさせることにある。端的に言えば既習内容の深化をねらいとしている。それらの実践は教材化の一つの方法として少なからず評価できる。しかしながら、一方で数学的遠近法の取り扱いについて、もう少し違った視座からの教材化の可能性もあるのではないかと考える。そのような認識から、本研究では数学の利用という視座を一旦棚上げし、数学的遠近法を文化的な遺産の一つとして真摯に把握していく視座に重きを置いてみる。数学を、把握する際の一つの手段と捉える。具体的には、数学的遠近法を整理し近代的な画法にまで発展させた Leon Battista Alberti の作図法(1436 年)に積極的に注視する。つまり、本研究の目的は Alberti の作図法を生徒がどのように理解しうるのか、またその際に中学校数学がどのように関わりうるかを明らかにすることである。なお、研究の方法としては、本稿末に掲げる先行研究の文献を参考に、次の(1)～(4)を概観し整理する。(4)については、大学生(小中学校の教員志望の3年生 40名)を対象にした演習における、彼らのワークシートおよびインタビューも分析・考察の資料としている。

- (1) 数学的遠近法の概観
- (2) 数学的遠近法を題材とした先行実践の様相と本実践での構想
- (3) Alberti の作図法の概観
- (4) Alberti の作図法における学習者の活動と指導上の要点



2 先行実践の様相と本実践での構想

、これまでどのように実践されているのか。具体的な実践例(大本実践での構想を述べる。

京都公立中学校3年生)

時	指導項目	主な課題・指導内容
1	絵画・写真の観察	問：絵画や写真は平面なのに、なぜ奥行きや遠近感を感じるのだろうか？ 数学的遠近法が利用されている絵画や写真を観察させ、消失点等の存在を認識させる。
	スケッチの実施	問：床に描かれた正方形格子を、垂直に立てた画面(平面ガラス)に記録すると、どのような図形になるだろうか、予想してみよう。 絵画や写真の観察に留まらず、実際に生徒自身に正方形格子をスケッチさせたり予想させたりする活動を通し、消失点の存在を体験的に感得させる。


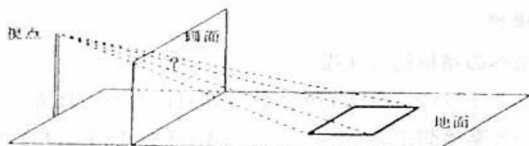
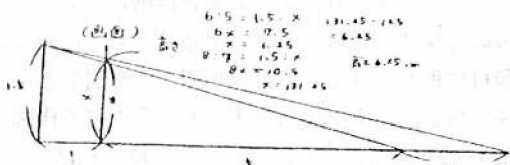
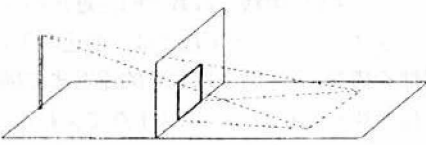
2 3	数学的遠近法の原理と仕組み	問：立体感のある絵を描くためには、どのようにすればよいだろうか？ 相似や空間図形の性質を使って、消失点の存在を数学的に理解させる。
4 5	立体感ある絵の制作	問：立体感のある絵を描こう。 前時までの授業をもとに、身近にある建物や風景を題材に奥行きや遠近など立体感ある絵を描かせることで数学の有用性を実感させる。 

図2：遠近法を利用した生徒の作品例

(2) 小関の実践 (2001, 対象：国立中学校2年生)

時	指導項目	主な課題・指導内容
1 2	数学的遠近法	<p>ルネサンス時代の絵画を鑑賞させ、遠近法が使用されていることを確認させる。 地面に描かれた正方形が画面上にどのように描かれるか予想させる。 問：画面から5mはなれた地面に置いた1辺2mの正方形は画面上でどんな形に描かれるかだろうか？（視点から画面まで1m、視点の高さは1.5mとする）</p>  <p>図3：相似による像の捉え</p> <p>相似を利用し画面上の図形を求めさせる。実際に画面上の図を描かせる。</p>  <p>図4：地面上にある正方形の画面上への像</p>
3	数学的逆遠近法	<p>問：視点から5m離れた場所に、1辺50cmの正方形が立っているように見えるためには、地面上にどんな図を描けばよいだろうか？（視点の高さは1.5mとする）</p>  <p>図5：数学的逆遠近法の問題</p>

なお、小関は上述の実践を継続し、翌年に中学校3年生を対象にした発展的な授業を実施している。既習内容である三角形の相似、三平方の定理、および三角関数の内容一部を指導した後、5時間において「グラウンドに星(五角星)を浮かべよう」という課題を解決させている(小関, 2002)。例えば、第4時限目では、相似および投影図を利用して、画面上に星が浮かび上がるような地上図(：地面上の図)を作図するために必要となる長さを求めさせている(次の図6)。

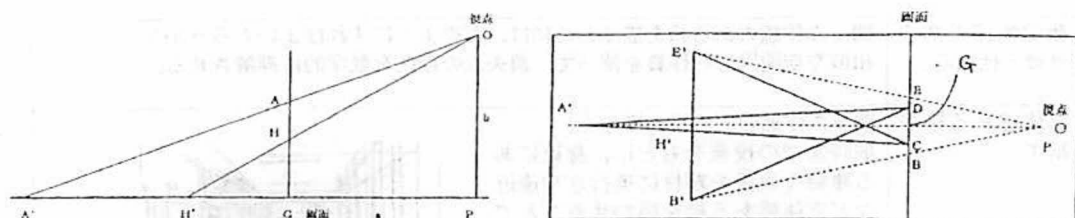


図6：相似および投影図の利用による定式化(左図：立図，右：平面図)

$\triangle A'AG \sim \triangle A'OP$ より, $A'G : A'P = AG : OP$, $A'G : (A'G + GP) = AG : OP$

$$\therefore A'G = \frac{GP \cdot AG}{OP - AG} \quad \text{同様に, } H'G = \frac{GP \cdot HG}{OP - HG}$$

$\triangle E'H'P \sim \triangle EGP$ より, $EG : E'H' = PG : PH'$, $EG : E'H' = PG : (PG + GH')$

$$\therefore E'H' = \frac{EG(PG + GH')}{PG} = \frac{EG}{PG} \left(PG + \frac{GP \cdot HG}{OP - HG} \right)$$

(3) 本実践での構想

①Alberti の作図法への積極的な注視

3 (1) (2) で前述したように、数学的遠近法を題材にしたこれまでの多くの授業実践は、数学の利用といった視座からの授業構想である。そこでの本質的な授業のねらいは、既習内容の深化である。本研究では、数学の利用という視座を一旦棚上げし、数学的遠近法を文化的な遺産の一つとして把握する視座から授業を構想する。数学的遠近法を文化的な側面から捉えようとする際、焦点をあてる部分は様々に考えられる。本研究では、特にAlbertiの作図法に注視する。その理由は、彼の作図法に中学校数学に関わる部分も少なからずあり、生徒の発達段階に十分に応じうると考えるからである。生徒の保有する数学は、彼の作図法を理解するための道具として位置づけられる。

Albertiの作図法を題材に取り上げることが、相似、空間図形といった既習内容の深化・強化といった側面も含むが、生徒の情意面へも影響も多大であろう。彼の作図法を数学的に把握することで、先人達の知恵や工夫を改めて深く知ることになる。言い換えれば、「なぜ数学を学ぶのか」といった多くの生徒からの声に応える題材となりうる。つまり、Albertiの作図法に注視し教材化を図ることで、数学の利用や現実的な価値の感得という教育的な意義が達成できうと考える。

②生徒の素朴な疑問からの授業展開

実際の授業に際しては、これまでの先行実践では数学的遠近法の原理と仕組みの教授を主軸として、生徒に数学的な活動を付加的にさせている。本実践では、前述の先行実践を参考にしつつも生徒の素朴な疑問に応じる形の授業展開を構想する。例えば数学的遠近法で描かれた絵画や写真の例で言えば、「遠くに行くと道路や廊下の幅が狭くなり、ついには1点で交わる。しかし実際の空間では道路や廊下の幅が狭くなることはない。」そのような現実の空間世界と絵画や写真の平面世界との間に、学習者は少なからず認知的なギャップを持ちうることになる。そのような心理的な実感を背景に、後述の5 (1) 「なぜ実在の平行線が写真では交わるのか」のような疑問を取りあげ、授業展開を試みている。さらに、授業内容をより自分の関わり事とするために、Anamorphoses (歪み絵) の制作をも視野に入れた授業を構想する。

4. Alberti の作図法の概観

Alberti の作図法は、彼が 1436 年に著した「絵画論」から伺い知ることができる。しかしながら、その絵画論には図示がなく、文面からその作図法をたどることになる。Alberti の作図法の手順に従い、例えば地面上の正方形格子の画面上への像を具体的に図示すれば、次の図 7 および図 8 ①～⑤ のようになる(横地, 1995; 大澤 2001)。なお、この Alberti の作図法を学ぶための前提として、空間図形についての幾つかの性質を把握していることが必要となる(大澤, 2002, p. 45)。

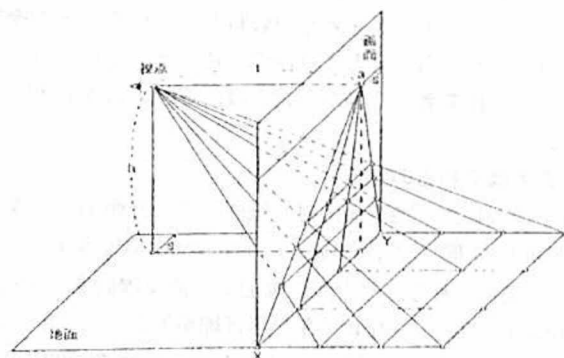


図 7 : 地面上の正方形格子の画面上における像

<Alberti の作図法の具体的な手順>

①: 視点, 画面, 正方形格子が用意されていたとする。視点から画面に引いた垂線の足 a を決める。

②: 点 a を中心に放射線を地面に向かって引く。

③: 地平線上で、線分 Vb の長さが t となる点 b を定める。点 b を中心に放射線を引く。

④: ②③の 2 つの放射線の交差で、太線の像が決まる。

(③④の過程に代わり、①②に引き続いて次の⑤⑥の過程によっても作図できる。)

⑤: 地平線上で、線分 ac の長さが t となるように点 c を定める。2 点 cY を結ぶ線分を引き、②の放射線との交点を決める。

⑥: 交点で引いた平行線と②の放射線との交差で、太線の像が決まる。

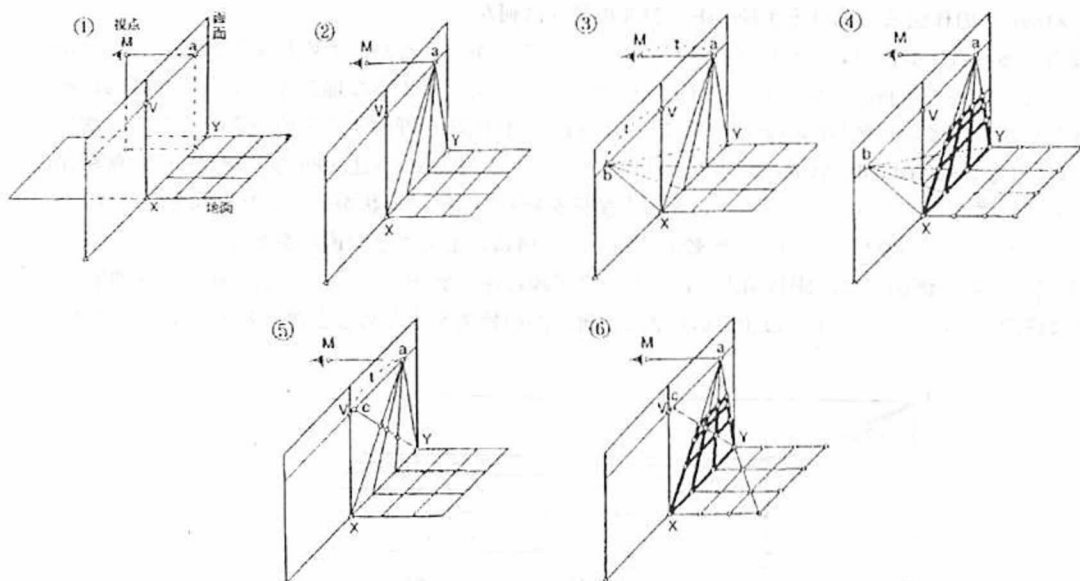


図 8 : Alberti の作図法の具体的な手順①～⑥

5. Alberti の作図法における学習者の活動と指導上の要点

Alberti の作図法の学ぶ際に、学習者はどのような疑問や困難さを持ちうるのか。また、それらの疑問や困難さの解消に、数学が具体的にどのように貢献できうるのか。ここでは Alberti の作図法を題材とした場合の教材化の可能性を整理する。Alberti の作図法について、大学生(小中学校の教員志望の3年生40名)を対象に、2回にわたる授業(：1回あたり90分授業)を試みている(2002年11月、授業者は筆者)。それらの授業における学習者の主な活動は、絵画・写真の観察、Alberti 作図法の理解、Anamorphoses(歪み絵)の製作の3つの活動である。なお、授業者の授業記録メモのほか、学習者のワークシート及びインタビューも分析・考察の資料としている。その授業実践やこれまでの基礎的な研究(大澤, 2001, 2002)の知見から、学習者は以下に述べる(1)～(5)のような疑問や困難さ等を持ちうるということがわかった。授業者の立場から言えば、それらは Alberti の作図法を題材とする際の指導上の要点ともなる。

(1) なぜ実在の平行線が写真では交わるのか。

例えば、地面上の正方形格子について、地面上に対し垂直に立てた画面への像を考えてみる。正方形格子は、画面に対して直角に位置する直交線(：orthogonals)と平行に位置する横断線(：transversals)が織り成すものと捉えられる。その際、画面上で直交線同士は平行とならない。

生徒によっては、他者の指摘から初めて「なぜ実在の平行線が写真では交わるのか」という疑問を覚醒する場合もある。その疑問の共有化・覚醒化の手立てとして、大澤(2001)や小関(2001)等の先行実践でも見られるように、例えば実際に地面上の正方形格子を写生する活動が考えられる。次の段階として、「なぜ実在の平行線が写真では交わるのか。」の疑問の解決として、三角形の相似や座標を用いた数学的な証明がある(大澤, 2001)が、次の図9、図10のように投影図的な見方から解決を図る方法もある(大澤, 2002)。

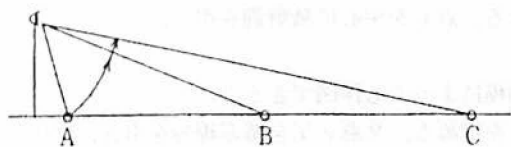


図9：立面図による捉え

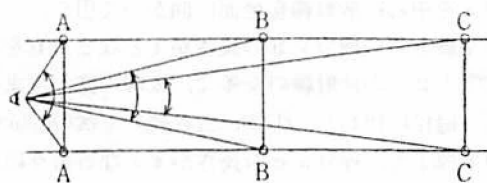


図10：平面図による捉え

(2) Alberti の作図法における手順③および④の意味は何か。

学習者の多くは、Alberti の作図法を手順通りに描くことができるが、その作業の意味をなかなか理解できないている。特に手順③および④について、どうしてそのような描き方でよいのか容易に納得できない場合が多い。数学的遠近法の構造、Alberti の作図法を理解するための素地として、次の図11のようなLeonardo da Vinciが「2つのピラミッド」と呼称した(辻, 1996, pp. 18-19)図の解釈が有効であると考えられる。2つのピラミッドは密接な関係を持ちつつも、形状が似ており混同されやすい。しかし、それらの2つのピラミッドを比較してみると、構造の上で大きな違いがあることがわかる。例えば、図11の左側図では、眼は頂点Eにあり、地平線は遠く底辺にある。一方、図11の右側図では、眼は底辺の方にあり、地平線は頂点Oにある。幾つかの特徴をまとめると次の表1のようなになる。

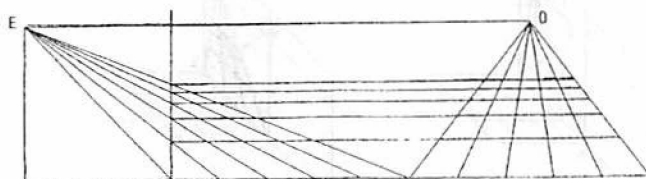


図11：2つのピラミッドの解釈

表 1 : 2つのピラミッドの比較

比較項目	図 11 の左側図	図 11 の右側図
頂点の位置	観者の眼の位置により変化する	観者の眼の位置により変化する
頂点と観者の関係	頂点は観者から最も近い(眼の位置)	頂点が観者から最も遠い(無限遠)
底辺と観者の関係	底辺は観者から最も遠い	底辺は観者から最も近い
頂点からの斜線の束	視線を意味する	直交線を意味する

上述の2つのピラミッドの解釈は、どちらかと言えば Alberti の作図法を学ぶ以前の準備的な意味合いが強い。手順③および④の意味を深く理解するためには、例えば次の図 12 の問題(李雪花, 2002, p. 60)の解決が本質的となる。

<問題>図 12 で、点Gと点G'は一致することを証明しなさい。

ただし、図 12 は次の条件を満たしている。

視点Eから画面上に引いた垂線の足をHとし、その距離を $t (=EH)$ とする。地面上の点Dから基線まで引いた垂線の足をVとし、その距離を $x (=VD)$ とする。視線EDと画面の交わる点をGとする。地平線上で線分 $HE' = t$ となるように、点E'を定める。基線上で線分 $VD' = x$ となるように点D'を定める。HVとE'D'の交点をG'とする。

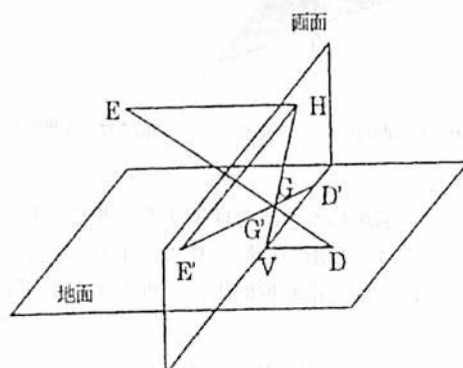


図 12 : 手順③および④の理解ための補助問題

図 12 に示した問題の証明は様々に考えられる。例えば、空間座標やベクトル等を利用した証明も考えられるが、中学生でも次のように三角形の相似を利用し容易に証明できる。

$$\triangle EGH \sim \triangle DGV \text{ より, } HG : GV = EH : VD = t : x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\triangle E'G'H \sim \triangle D'G'V \text{ より, } HG' : G'V = E'H : VD' = t : x \quad \cdots \textcircled{2}$$

①②より、点Gと点G'が一致する。

図 12 の問題は、学習者に観者の視点Eと消失点Hとの関わりや、視線EHと直交線HVとの関わり等を改めて想起させる。Alberti の作図法手順①②や2つのピラミッドの左側図は、観者の視点Eからの視線をイメージさせる。一方で、手順③④や2つのピラミッドの右側図は、画家としての眺めから画面上に浮かぶ像を視覚化させる。図 8 の Alberti の作図法手順おける記号を用いて言えば、手順①②での地面に対し2点M, aを含む垂直に立てた平面上での捉えを、手順③④では地面に対し2点b, aを含む垂直に立てた画面上での捉えへと変換していると見ることができる。その変換のアイデアを把握できるかどうか、学習者が手順③④の意味を理解する際の要点となる。図 12 の問題はそうように変換してよい一つの根拠を表明しているわけである。

(3) 画面上で横断線同士を平行に描いてよい。

5 (1) で述べたように、直交線同士は画面上で平行とならない。一方で、横断線同士は画面上で平行線として描かれる。元来、直交線と横断線は正方形格子の一边であるところの縦と横であることから、画面上において直交線と横断線を同様な扱いをするのが自然であるという生徒の素朴な実感意識が生じうる。つまり、横断線同士を平行に描いてよい何かがしかの根拠を、学習者は少なからず求めている。そのような要求に応えるための有効な手段として、例えば、次の図 13 のような問題(仲田, 1973, pp. 74-76)の提供が考えられる。

<原問題> 図 13 のように、点 X に電灯があり、その電灯の脇を A から B の方向に歩いていく。その時にできる影(頭先端)の軌跡(Q から S)はどのようなになるか。

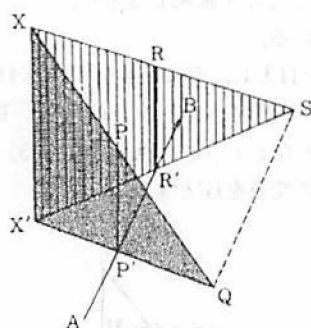


図 13 : 横断線が画面上で平行線として描かれる理由

横断線同士が画面上で平行線として描かれる理由を理解するために、例えば図 13 の問題を次のように改題すればよい。その証明も例えば三角形の相似の利用により、以下のように中学生に理解される。改題の証明の結果、線分 QS に平行な横断線同士は、画面上でも平行となることがわかる。

<改題> 線分 P'R' が線分 QS に平行ならば、線分 PR は線分 QS と平行になることを証明しなさい。

もう少し丁寧に記述すれば、次のような問題文になる。

図 13 のように、三角錐 X-X'QS がある。線分 P'R' が線分 QS と平行になるように点 P', 点 R' をそれぞれ線分 X'Q, 線分 X'S 上にとる。また、線分 P'R' を含み底面 X'QS に垂直な面と、線分 XQ, 線分 XS との交点をそれぞれ P, R とする。このとき、線分 PR は線分 QS と平行なることを証明しなさい。

$$SQ \parallel P'R' \text{ で, } \triangle X'P'R' \sim \triangle X'QS \text{ より, } X'P' : P'Q = X'R' : R'S \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \triangle QPP' \sim \triangle QXX' \text{ より, } X'P' : P'Q = XP : PQ \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\triangle SRR' \sim \triangle SXX' \text{ より, } X'R' : R'S = XR : RS \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } XP : PQ = XR : RS \quad \therefore \triangle XPR \sim \triangle XQS \quad \therefore PR \parallel QS$$

(4) Alberti の作図法における 2 つの手順③④と⑤⑥は同じことか。

前述の 5 (2) (3) は、主に Alberti の作図法①②③④に関わっての記述である。実際の作図に際しては、作図法①②③④よりも、簡便な①②⑤⑥の方法が用いられる。ここで確認しておかねばならないのは、それら 2 つの方法が同値な作図方法かということである。次の図 14 のように、ここではその証明を、生徒の発達段階を考慮し相似の利用によりおこなっている。図 14 で、点 P, Q, R が、それぞれ点 P', Q', R' と一致することを示すことができる。結局のところ、2 つの手順は同値なである。例えば、点 P が点 P' と一致することは、次のような証明で確認できる。

図14の左から三番目の図で、

$$\triangle bEV \sim \triangle YEX \text{ より, } bE : YE = bV : YX = t : d \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\triangle YPE \sim \triangle Yab \text{ より, } aP : PY = bE : EY = t : d \quad (\because \textcircled{1}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

また、一番右の図で、

$$\triangle Cfa \sim \triangle YFX \text{ より, } CF : YF = Ca : YX = t : d \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\triangle YP'F \sim \triangle Yac \text{ より, } aP' : P'Y = CF : FY = t : d \quad (\because \textcircled{3}) \quad \cdots \textcircled{4}$$

以上②④より、線分aY上の2点P, P'は一致する。

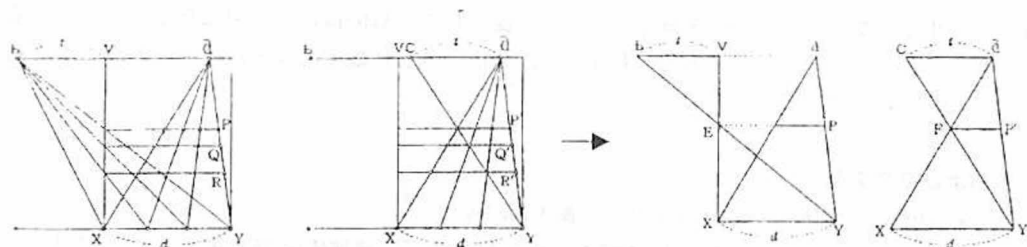


図14: Alberti の作図法③④と⑤⑥の比較

(5) 地面上の曲線を画面上でどのように扱えばよいか。

上述の5(1)～(4)によって地面上の直線の扱いは、一応把握できることになる。一方で曲線の扱いは、まだ必ずしも把握できていとは言えない。地面上に描かれた曲線の処理は多様に考えられるが、ここでは、曲線を単位正方形格子の繋がりと捉えてみる。

前述5(1)の中で、正方形格子を直交線と横断線の織り成しと見なしているが、無数の正方形が縦横に敷き詰められている平面とも見なすことができる。それらは、一つの平面としての見方に留まらない。もう一つの次元を考慮すれば、3次元の座標系として成立することになる。正立方体の前後、左右、上下の各列により対象空間は構成されていると想定し、それを一平面に示すものが正方形格子と捉えるわけである。つまり、空間の基本的な構造を、単位格子敷き詰めによって確立しようとするものである。なお、無数の正方形の縦横への敷き詰めと乱暴に述べたが、実際には有限個の正方形の敷き詰めであり、その個数を多くとることで、擬似的に曲線が醸し出されることになる。そのアイデアは、コンピュータ等のデジタル世界での処理方法の一つに他ならない。

生徒の具体的な活動としては、次の図15、図16のような製作活動が考えられる。例えば図15の地面上に描かれたもとの図を、図16のようにAlbertiの作図法を利用して画面上で想起できる像を実際に描いてみる。逆に図16から図15への製作活動も可能であろう。その活動では、あらかじめ画面上で正しく見えるような像を想定しておき、その像に対応した地面上のAnamorphoses(歪み絵)を製作することになる。

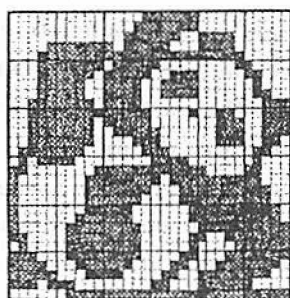


図15: 地面上の正方形格子

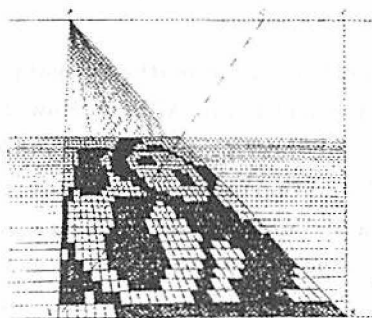


図16: 画面上への像

6. まとめと今後の課題

文化的遺産の一つである Alberti の作図法を学習者はどのように理解しうるのか。そこでの学習者の振る舞いおよび中学校数学の関与の可能性を分析・考察した。その結果、次の知見を得た。

学習者は Alberti の作図法を手続きとして容易に理解できる反面、その手続きの意味の把握に際し幾つかの疑問や困難さを持ちうる。例えば、次のような学習者からの疑問が予想できる。(1)なぜ実在の平行線が写真では交わるのか。(2) Alberti の作図法における手順③および④の意味は何か。(3)画面上で横断線同士を平行に描いてよいのか。(4) Alberti の作図法における2つの手順は同じことか。(5)地面上の曲線を画面上でどのように扱えばよいのか。そのような生徒の抱く疑問に応じる授業の構想を試みた。本授業において、学習者は少なからず数学の有用性を感得し、相似の利用や投影図的な見方など中学校数学が少なからず貢献しうる。結論として、Alberti の作図法を題材とした授業は、中学校においても十分に可能であるとわかった。今後、さらに臨牀的な実践研究を進め、本研究の妥当性を高めていきたいと考えている。

7. 引用および参考文献

- アルベルティ, (1992). 絵画論(三輪福松訳). 中央公論美術出版.
- 大澤弘典, (2001). 立体感のある絵を描こう: 数学的遠近法とその利用. 横地清(監修), 第三学年の選択数学. 明治図書, pp. 51-65.
- 大澤弘典, (2002). 遠近感を探ろう: 美術と数学. 池田敏和(監修), 中学校数学選択用・発展教材, 学校図書, pp. 44-49.
- 黒田正巳, (1965). 透視画. 美術出版社.
- 小関広明, (2001). 図形と相似: 数学的逆遠近法. 山形大学教育学部附属中学校(編), 教育実践, 39, pp. 46-49.
- 小関広明, (2002). グランドに星を浮かべよう. 山形大学教育学部附属中学校(編), 教育実践, 40, pp. 51-54.
- 鈴木正彦, (1994). 新しい図形教育をめざして: 躍動的な図形教育を進めるために. 横地清(監修), 21世紀への学校数学の展望, pp. 215-232.
- 仲田紀夫, (1973). 数学物語. 日本放送出版協会, pp. 74-76.
- 辻茂, (1996). 遠近法の発見. 現代企画室.
- 李雪花, (2002). 日・中遠隔共同学習における創造性の一考察. 数学教育学会誌, 43(1・2), pp. 53-65.
- 横地清, (1995). 遠近法で見る浮世絵. 三省堂書店. 補章 pp. 4-7.

A Study on Teaching Materials of Mathematical Perspective: An Example of Development of Alberti's Method

OSAWA, Hironori

Yamagata University, Faculty of Education

In this paper, I regarded mathematical perspective as one of "Cultural inheritance", and focused on the method of Alberti. How do students understand his method? I analyzed and considered their performances and the possibilities of the participation of junior high school's mathematics. As a result, the following finding was obtained. Most of the students easily understand Alberti's method as a procedure. However, when they attempt to understand the meaning of the procedure, they have some doubts and the difficulties. School-mathematics can contribute to the cancellation of those doubts.