

数式処理システム Mathematica と動的幾何学ソフト GeoGebra を 用いた中等教育向け教材集の試作

佐々木 重 雄

A Prototype of Education Material Catalog for Secondary Education Mathematics by Mathematical Software Mathematica and GeoGebra

SASAKI, Shigeo

abstract

This paper presents development of educational software materials for secondary school mathematics, especially functions and geometry subjects. We try to develop them by Mathematica and GeoGebra, a powerful computer algebra system and interactive geometry software, respectively. Developing these materials, we obtained various findings about programming technics on mathematical software and design directions on human interfaces of software materials. These tips are useful for other developers and teachers who arrange and use our materials.

Key Word : Mathematics, Educational Materials, Mathematica, GeoGebra, Interactive Geometry Software.

1. はじめに

1.1 動機と背景

中等教育の数学における情報機器の活用は、1990 年、オハイオ州立大学 Bert Waits, Frank Demana らのグループが、当時うまくいっていなかった PC 利用の教育改革の代替手段としてグラフ電卓を活用した授業実践を開始したことに始まる。その実践は広く認められ、米国では SAT を始めとする大学入学の共通試験でグラフ電卓の使用が許可されるまでになり、中等教育カリキュラムに不可欠な存在になっている。この動きは多数の国に広がっている[10]。しかし残念ながら、日本ではこの動きはほとんど広がっていない。

その間、PC 等で使用される数理ソフトウェアも目覚ましい進歩を遂げている。これは学术界や産業界におけるイノベーションへの需要から来ているが、その一部は教育用途にも有用である。視覚化機能の進化により様々なグラフや図形を描画することが可能となり、動的操作機能により、その図形を触って変形するような操作ができるようになった。深い概念理解には「試行錯誤して自ら発見する」という作業が必要であり、これを手短かに実行できるソフトウェア教材の提供は有益である。たとえば山本[12] は、数式処理ソフト Mathematica を使用した教材開発を通じて、パラメータの変化により変形するグラフの理解に情報機器の活用が効果的であることを指摘している。情報機器の活用は、様々な前提をクリ

アする必要があるつつも、授業の題材によっては高い効果が期待できる。

1.2 対象

本稿では、いくつかの数理ソフトウェアを用いて著者らが試作した数学教育用ソフトウェア教材について述べる。教材の試作は、いくつかの観点から対象を絞った。1 つは扱う単元である。これは、主に中等教育の数学向けに、数学ソフトウェアの利用が効果的な題材を対象としたソフトウェア教材を開発した。具体的には、高等学校数学の関数、図形にかかわる単元を中心に、中学校における平面図形や、大学の初年程度の数学、すなわち微積分や線形代数の一部を対象とする。中学校・高等学校の接続、高等学校・大学の接続を視野においている。

次は教材の用途である。これは主に 2 つの用途を想定することにした。用途の 1 つは、教師が授業で、新しい数学概念の導入に、あるいは、受講生に解かせる問題の解説に使用することである。把握しにくい概念を視覚的に示す目的で使用する副教材を提供する。教科書ではなく副教材なので、教師がカスタマイズして使用することを想定する。もう 1 つの用途は生徒の自習用である。本稿では特に触れないが、単に教材ソフトウェアを提供するだけでなく、教材カスタマイズ用の情報を提供すること、自習に用いるのに十分な解説をすることが必要である。

もう1つ、絞り込む対象は、プラットホーム・ソフトウェアである。本稿で言及する教材は、数式処理システム Mathematica および動的幾何学ソフトウェア GeoGebra を用いて試作した。両者とも Windows, Mac, Unix いずれでも動作し、教室でどのようなコンピュータが設置されていても対応可能である。Mathematica は関数とグラフ、GeoGebra は図形の単元をカバーする。プラットホーム・ソフトウェア選択の観点としては、ハードウェアを選ばないこと、安価に設置できることなども重要である。Mathematica は安価なソフトウェアとはいえないが、制限された機能のアプリケーションだけを実行できる CDF プレイヤーというものが無償で提供されている。

1.3 本稿の構成

第2節で、数学ソフトウェア Mathematica および GeoGebra を取り上げ、どのような機能がソフトウェア教材作成に有用か示す。また、教材作成に利用可能な他のソフトウェアの候補も示す。第3節で Mathematica を利用して作成したソフトウェア教材について述べる。作成上のノウハウについても言及する。第4節では、同じく GeoGebra による教材について言及する。第5節で本稿をまとめる。

2. 数学ソフトウェア

2.1 数学ソフトウェアとは

数学ソフトウェア/数理ソフトウェアの概念について、特に定説となった定義があるわけではないが、(1) 数式を記号的、代数的に式変形することで誤差の無い計算をし、また関数やそのグラフを扱う数式処理システム、(2) 統計データを解析する統計ソフト、(3) 図形を幾何学概念としてあつかう幾何学ソフトなどを指すことが多く、本稿でもその意味で使用する。これらのソフトウェアには、専門家向けの機能も多いが、教育向けアプリケーションの作成に向けた機能もあり、うまく利用することで効果的なソフトウェア教材を作成できる。

たとえば数式処理システムは、数式の記号的計算をするソフトウェアだが、専門家たちは答えを出すことを主たる目的に使用しているわけではない。多数の計算例を作って法則を予想したり、新しいアイデアを検証したり、その他、試行錯誤を繰り返して新しい知見を得る目的に使用する。試行錯誤のしやすさは数式処理システムの重要な性質の1つで、このことは教育利用にも効果が高い。また多数の数式処理システムは強力な視覚化機能を持つ。このことも教育利用に効果が高い。実際、数式処理システムの開発元も、このことを自覚して機能強化を図っている。

本研究では、ソフトウェア教材作成に向けた数学ソフトウェアとして、数式処理システム Mathematica[5] および動的幾何学ソフト GeoGebra[3] を利用した。両ソフトウェアを採用した理由は、それぞれの分野のソフトウェアで最も高機能だというのが1つで、もう1つは、著者らのこれまでの教材作成の蓄積である。実際のところ、数式処理システムの分野では Maple[4]、動的幾何学ソフトの分野では Cinderella[2] が同等の機能を実現しており、本稿に示したものと同様の教材を作成するのは難しい。

以下では、Mathematica および GeoGebra の特徴について、教材作成に関わる機能の観点から検討していく。

2.2 数式処理システム Mathematica

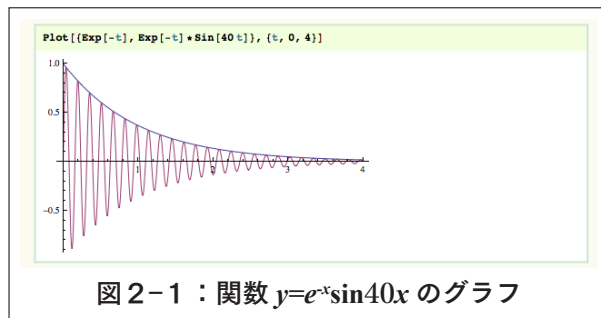
Mathematica は、Steven Wolfram が開発した数式処理システムである。最初のリリースは1988年になされた。Mathematica はもともと多機能な数式処理システムだったが、何度かのバージョンアップにより、扱う対象が広がり、近年のバージョンでは物理、化学、地理等のデータベースへのアクセスが可能である。

高額なソフトウェアなため気軽に使ってみるというわけにはいかないが、大学生・大学院生向け、初等・中等教育教員向けに、それぞれ、安価なライセンスが提供されている。また Wolfram CDF Player という Mathematica で作成したソフトウェア教材を実行できる無償アプリケーションが提供されており、多数の受講生がいる授業でも金銭的負担なしに使用できる。

以下では Mathematica のうちソフトウェア教材作成に向けた機能を取り上げる。

2.2.1 グラフ化

Mathematica では、数式を記述することで簡単に関数のグラフを描くことができる。たとえば $y=e^x \sin 40x$ のグラフを描くには、Plot コマンドを使用して図2-1のような処理をする。初期の Mathematica は陽関数のグラフしか書けなかったが、現在の Mathematica は3D グラフの機能を応用して、陰関数のグラフ（方程式の表す図形）も描くことができる。



2.2.2 音声

Plot コマンドの代わりに Play コマンドを使用すると、関数を作る波形に従ってスピーカーから音を鳴らすことができる。図 2-2 は、関数 $y=e^{-t}\sin(440\pi t)$ の波形を鳴らす例である。

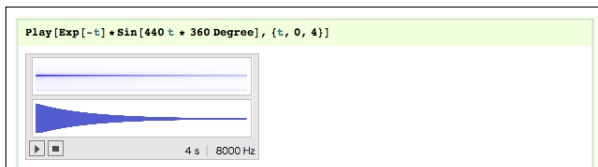


図 2-2：関数 $y=e^{-t}\sin(440\pi t)$ の波形の音声出力

2.2.3 3D グラフ

たとえば $z = \sin x \cos y$ のような 3 次元のグラフが描ける (図 2-3)。

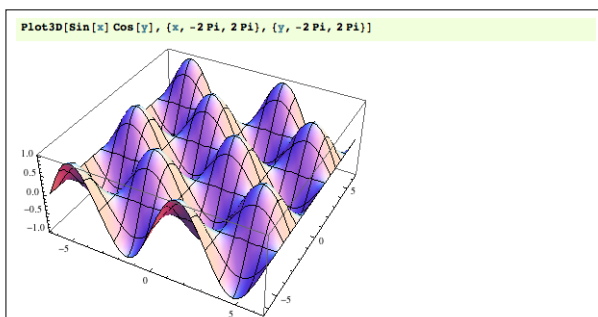


図 2-3：関数 $z = \sin x \cos y$ の 3D グラフ

また平面図形から回転体を得てそれを表示することもできる (図 2-4)。

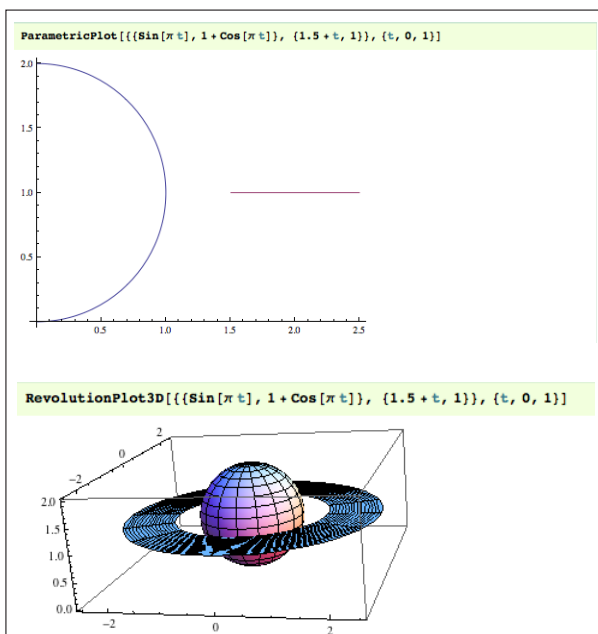


図 2-4：平面図形とその回転体

2.2.4 アニメーションと動的操作

Animate は Mathematica で動画を描くコマンドである。Animate コマンドの中に Plot コマンドや図形を描くコマンドを埋め込むと、そのグラフや図形を時間軸に沿って動かして表示する。図 2-5 はサイクロイドを描く様子を動画化したものである。Animate を実行すると時間に合わせてスライダが動くが、手動操作も可能である。

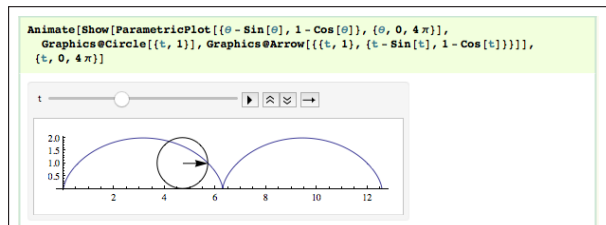


図 2-5：サイクロイドのアニメーション

類似のコマンドに Manipulate というものがある。これはスライダなどの GUI 部品を複数使用できるようにしたものである。

2.2.5 Mathematica Notebook

Mathematica のソフトウェア・アーキテクチャは、ユーザーインターフェイスである Notebook と、実際の計算を行うカーネルの 2 つ部品から構成される。ユーザーは Notebook を操作し、カーネルに計算させる。Notebook は単なるユーザーインターフェイスにとどまらない。文字どおりノートとして使えるように設計されており、数式がグラフにまつわる説明を Notebook に記載することができる。そのため Mathematica Notebook は、ユーザーの指示で数式を計算させたりグラフを描かせたりできる「動くノートブック」として使用できる。

2.2.6 CDF Player

授業等で Mathematica を活用するには「動くノートブック」を配布できると嬉しい。Wolfram CDF Player は Notebook を実行できる無償のソフトウェアである。CDF Player をあらかじめ配布しておけば、Mathematica で作成した教材を受講生全員で使用できる。CDF Player では、Mathematica Notebook の文書そのものは実行できない。CDF (Computable Document Format) という形式のファイルのみ扱うことができる。CDF ファイルは Notebook 文書を Mathematica で変換して得られるが、制限があり、実行できるコマンドは Animate および Manipulate のみである。逆にいうと、実行コマンドとして Manipulate のみ使用する教材を Mathematica で作成すれば、CDF 形式に変換して、受講生全員が CDF Player で利用できる。

2.3 動的幾何学ソフト GeoGebra

GeoGebra は、2001 年、当時ザルツブルグ大学に在籍していた Markus Hohenwarter（現在ヨハネスケプラー大学教授）が開発した動的幾何学ソフトウェアである。Hohenwarter は、グラフ電卓 TI-92 Plus に内蔵されていた数式処理システム Derive および動的幾何学ソフトウェア Cabri Geometry に刺激を受けて GeoGebra を開発したという[8]。GeoGebra は Java 言語で開発されており、Windows, Mac, Unix などプラットフォームを問わず利用することができる。また現在 iOS や Android にも移植されており、タブレット端末用アプリとしても使用できる。

動的幾何学ソフトとは、一般に、点、直線、多角形、円などの作図ができ、かつ、その図形を動的に操作・変形できる数学ソフトウェアの総称である。すなわち、動的幾何学ソフトは、単なる作図ソフトではなく、マウスなどにとる操作により、幾何学的性質を保ったまま図形を変形する機能を持つ。また作図した図形について、長さ、面積、角度などの量が計測できる。GeoGebra 同様の機能を持つソフトウェアに Cinderella [2] があり、日本では人気を二分している。

動的幾何学ソフトが教育に向いているのは、図形を動的に変形することにより、その図形の普遍的性質を発見できることにありと云える。たとえば、円の直径を1辺とする三角形は直角三角形となるという定理がある（タレスの定理。円周角の定理、すなわち円周角は中心角の1/2である、より導かれる）。これは GeoGebra を用いると、線分 AC を直径とする円を描いて、その円周上に点 B を置く作図をするすることでわかる（図2-6）。点 B をどのように動かしても角 ABC は90度になることが観察できる。

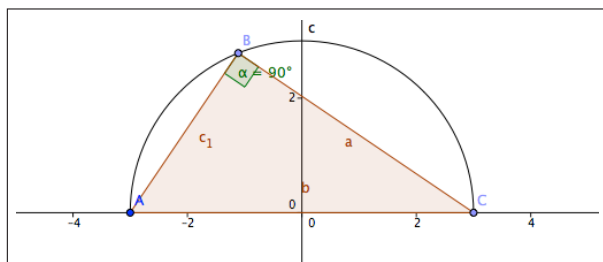


図2-6：タレスの定理（GeoGebra による作図）

点 B は円周上から外れないよう設定しており、点 B をどのように移動しても角 ABC は常に直角になる。

GeoGebra は、その後の拡張で、計算機代数による数式処理、関数のグラフ描画、GUI 部品スライダによる動的パラメータ変更とそれに伴うグラフや図形の変形といった機能が拡張された。GeoGebra の名称は、Geometry（幾何学）+ Algebra（代数学）に由来するが、これは計算機代数学の機能を持つという主張の表れであ

る。また GeoGebra は、数式処理機能の応用により、2つの図形間の性質（平行、垂直、接する、交わる、角が等しい、長さが等しい、面積が等しい）の証明も可能である。たとえば上記のタレスの定理は、辺 AB, BC の関係を判定させることにより、GeoGebra により記号論理的に推論され、証明に成功すれば「常に正しい」と判定する。ただし、一般に計算機による証明は人間が見てわかりやすいものではないので、授業の教科書の証明にとってかわるものではない。

最新の GeoGebra 5 では、3D の機能も追加されている。ユーザーインターフェイスが平面であるという制約上、平面図形ほどには直感的に操作できないが、数学教材の作成という目的には非常に有効な機能である。

GeoGebra で作成した図は、画像ファイルや Web サイトへの出力できる。画像ファイル形式として PNG, PDF, SVG, GIF アニメーションなどが選ぶことができ、作図ソフトしても有用である。また Web 出力機能は、作図したものを GeoGebra 教材集サイトにアップロードするものである。かつては単体の HTML ファイルとして出力できたが、現在は GeoGebra 教材サイトへの出力が必須である。自分のウェブサイトで使用するには、HTML の iframe 機能を用いて GeoGebra 教材サイトにアップロードされた教材を埋め込む。

3. Mathematica によるソフトウェア教材の作成

本節では、数式処理システム Mathematica およびそれを利用して作成したソフトウェア教材について述べる。受講生の人数分のライセンスを取得していれば、授業で Mathematica の全機能を使用できるが、そうでなければ CDF ファイル（2.2.6 節）の教材を用意してそれを配布して使用することになる。ここに示したソフトウェア教材は、CDF に変換して配布可能な Mathematica ドキュメントである。

3.1 比例と反比例

図3-1に比例、反比例の教材を示した。それぞれ $y = ax$, $y = \frac{a}{x}$ の a の値をいくつかの候補の中から選択できるようになっている。板書による授業では、反比例のグラフは事前に用意しておかない限り綺麗に描けない。リアルタイムに綺麗なグラフが描けるところがコンピュータ利用の利点だろう。授業進行に応じて $a > 0$ に制限するなどのアレンジをして使用するなどの工夫が必要かもしれない。

教材作成上の注意だが Mathematica の Plot コマンドは、デフォルトではグラフの形を見て自動的に y の範囲や縦横比を変更してしまう。このことは、Manipulate で傾きを変更したときにグラフの縦横比が勝手に変わると

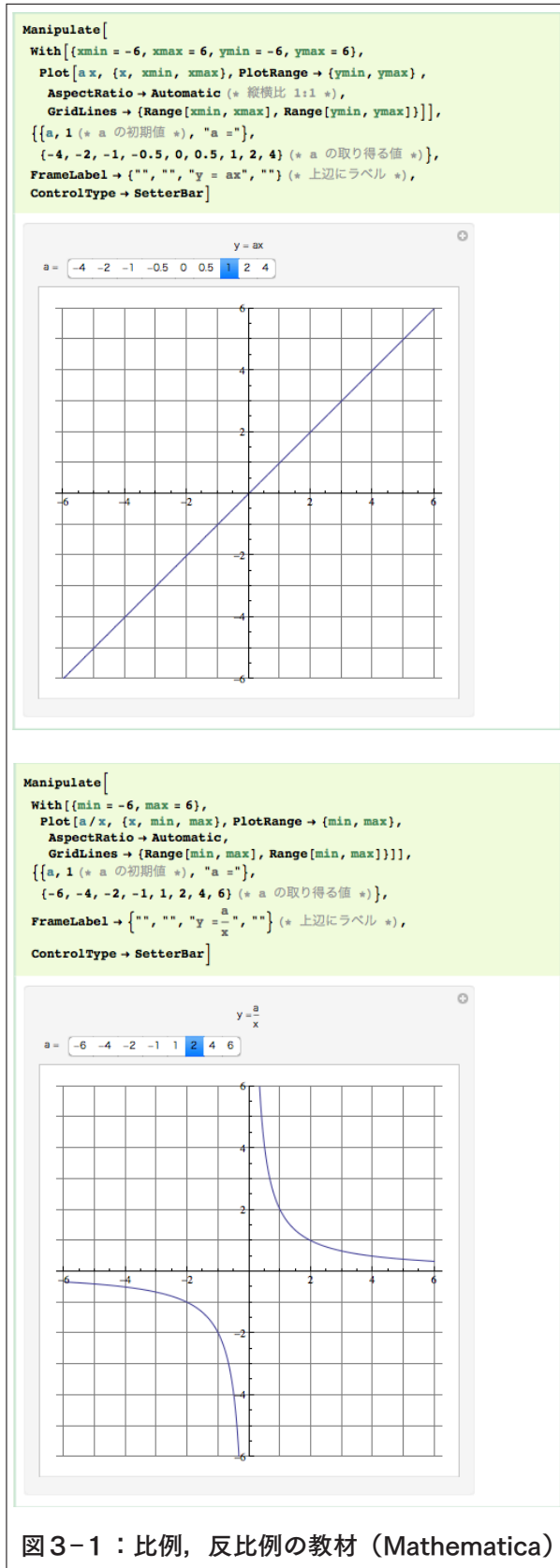


図3-1：比例，反比例の教材（Mathematica）

いう現象を起こし，授業教材としてはふさわしくない。そこで x ， y の最大値，最小値を定め，Plot コマンドのオプションで縦横比の固定化および方眼マス目の表示を指定している。

3.2 二次関数（中学の範囲）

図3-3（a）に二次関数の教材を示した。比例と反比例の教材同様 $y = ax^2$ の a の値をいくつかの候補の中から選択できる。

3.3 一次関数

図3-2に一次関数の教材を示した。この教材では Mathematica の Locator という GUI 部品を使っており，グラフの中で y 切片を動かすことができる。Locator は，グラフや図形オブジェクトの中に配置できる GUI 部品で，グラフや図の中で位置指定してパラメータを変更することができる。この教材では，Locator の x の値を制限しており， y 軸上のみの移動が可能である。

```

With[{xmin = -6, xmax = 6, ymin = -6, ymax = 6},
  DynamicModule[{p = {0, 1}}, Manipulate[
    Show[Plot[a (x - p[[1]]) + p[[2]], {x, xmin, xmax},
      PlotRange -> {ymin, ymax},
      AspectRatio -> Automatic (* 縦横比 1:1 *),
      GridLines -> {Range[xmin, xmax], Range[ymin, ymax]}],
      Graphics@Locator[Dynamic[p, (p = {0, #[[2]]} &)]],
      {{a, 1}, {-4, -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 4} (* a の取り得る値 *)},
      ControlType -> SetterBar],
      FrameLabel -> {"", "", "y = ax + b", ""} (* 上辺にラベル *)]]]

```

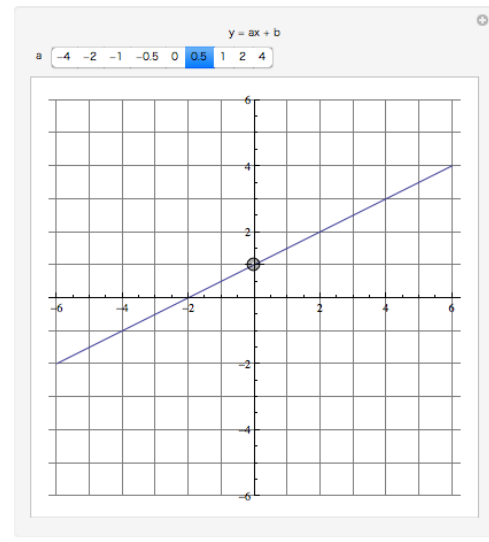


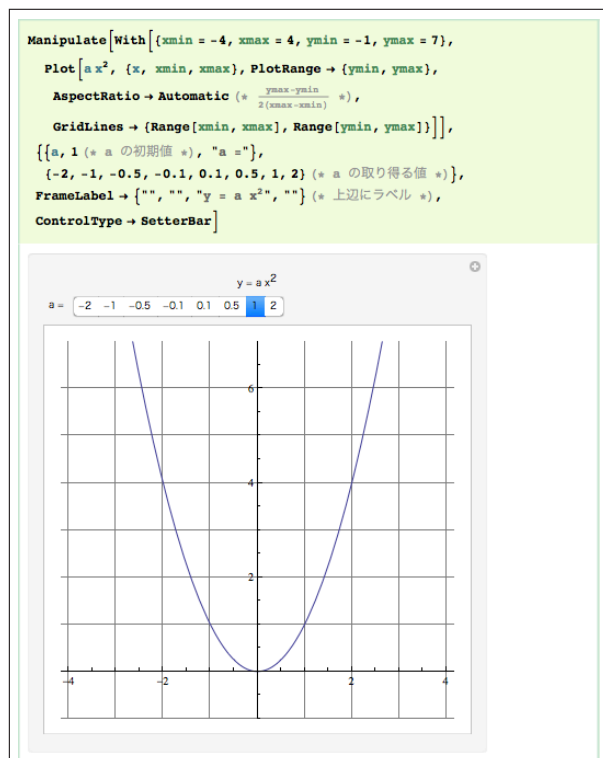
図3-2：一次関数のグラフ

3.4 二次関数（高校の範囲）

図3-3（b）に二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の教材を示した。係数の自由度が高くなるため，どの係数を変化させるか教師が適切に選んで授業を進める必要がある。

3.5 三角関数

図3-4に三角関数の教材の一つを示した。これはスライダで角度を変えると，円周上の点が回るとともに三角関数も進行する。三角関数と振幅運動の関係を把握する目的で作成した。

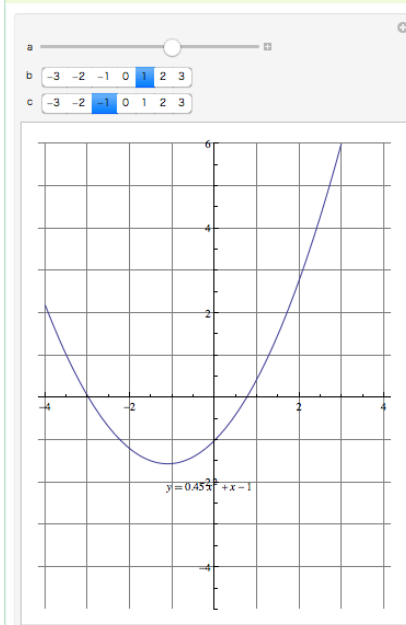


(a) 中学の範囲のもの

```

With[{xmin = -4, xmax = 4, ymin = -5, ymax = 6},
  Manipulate[
    Show[Plot[a x^2 + b x + c, {x, xmin, xmax}, PlotRange -> {ymin, ymax},
    AspectRatio -> Automatic (* 縦横比 1:1 *),
    GridLines -> {Range[xmin, xmax], Range[ymin, ymax]}],
    Graphics@Text[(y = a x^2 + b x + c) // TraditionalForm,
    {1 -  $\frac{b}{2a}$ ,  $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$  - (Sign[a] / 2)}],
    {{a, 1}, -2, 2, Exclusions -> {0}},
    {{b, 0}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, ControlType -> Setter},
    {{c, 0}, {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, ControlType -> Setter}]]

```



(b) 二次関数の一般形

図3-3：二次関数の教材

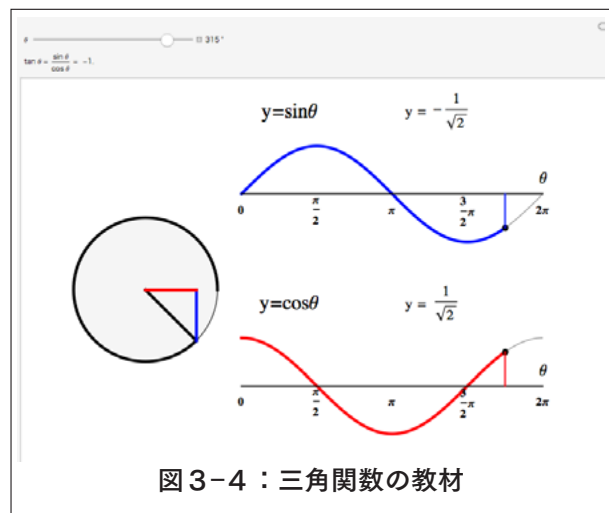


図3-4：三角関数の教材

4. GeoGebra によるソフトウェア教材の作成

本節では、動的幾何学ソフト GeoGebra およびそれを利用して作成したソフトウェア教材について述べる。

4.1 平行線の錯角

図4-1は平行線の錯角，すなわち角ABCと角BCDが等しいことを示す教材である。点Aを自由に動かすことができ，それに追従して，直線ABに平行になるように直線CDが動く。そのとき錯角は，常に互いと等しい大きさになる。

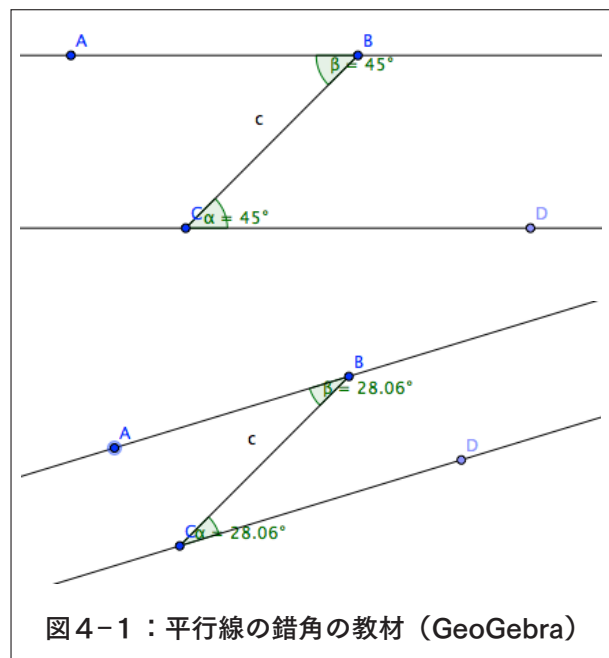
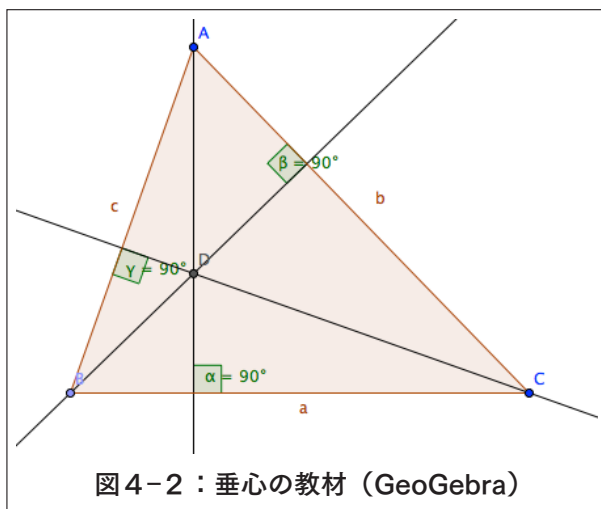


図4-1：平行線の錯角の教材（GeoGebra）

4.2 垂心

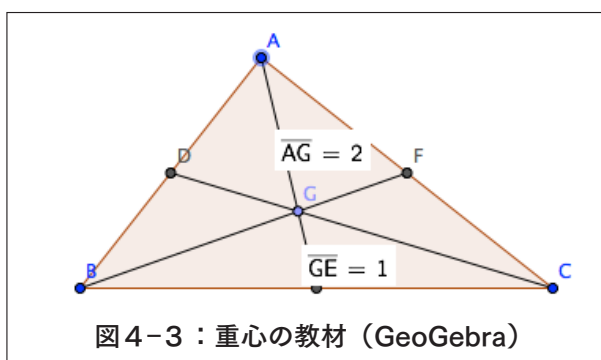
図4-2は垂心の作図である。垂心の定義は，三角形の3つの辺それぞれから，向かい合う頂点に垂線を引くとき，3つの垂線が交わる唯一つの点である。三角形の頂点は自由に動かすことができ，垂心が移動する様子が

わかる。



4.3 重心

図4-3は重心の作図である。重心の定義は、三角形の3つの辺それぞれの中点と向き合う頂点に線分を引くと交わる唯一つの点である。辺の中点と頂点を結ぶ線分は、重心で1：2に分けられる。辺の長さはGeoGebraが自動計算するのだが、数値計算の誤差により1：2にならないこともある。

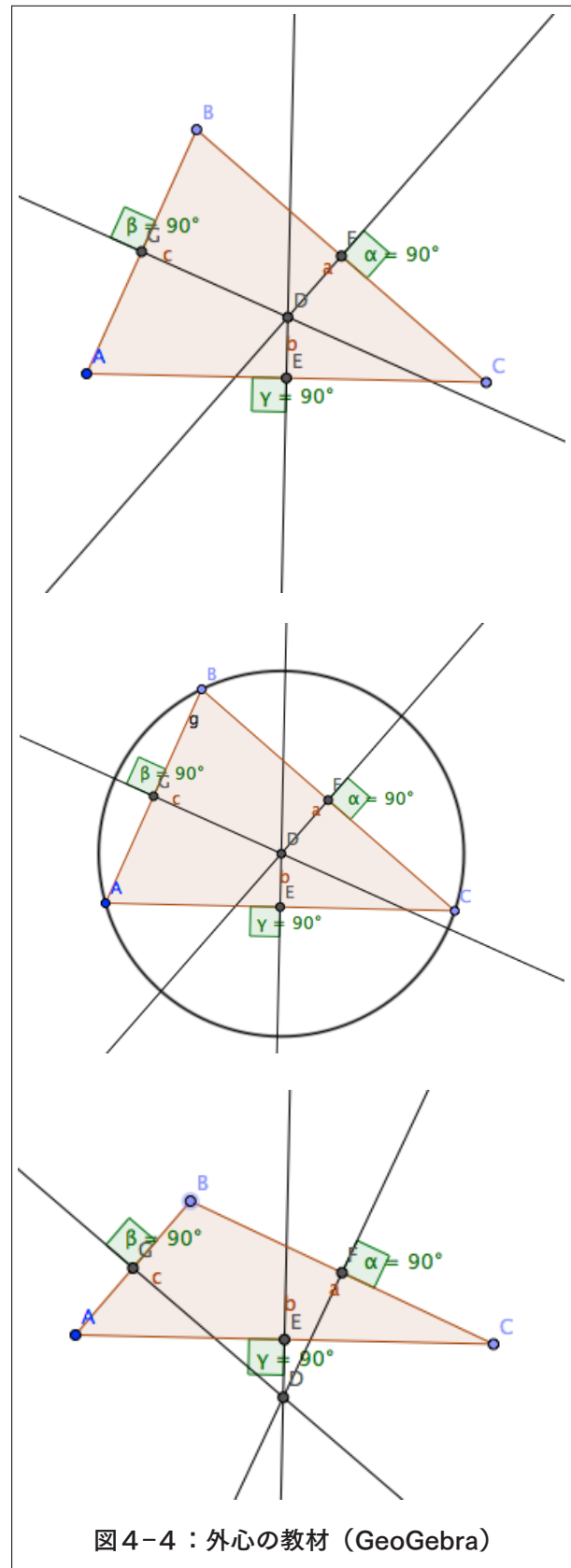


4.4 外心

図4-4は外心の作図である。外心の定義は、三角形の3つの辺それぞれから垂直二等分線を引いたとき交わる唯一つの点である。外心は外接円の中心でもある。外心を中心としていずれかの頂点までを半径とする円を描くと、すべての頂点と接する。三角形を変形して鈍角三角形にすると外心は三角形の外にはみ出す。このことは、動的幾何学ソフト等を通じた試行錯誤すればこそ発見しやすい性質であり、情報機器の活用が有用な場面である。

5. 関連研究

数学ソフトウェアを用いた教材は、実は世界中で多数作られている。たとえばWolfram社は<http://demonstrations.wolfram.com>に、寄稿されたものを多数含むMathematicaのデモプログラムを掲載しており、



その中に授業教材として使用できるものもある。GeoGebraも教材アーカイブサイト<https://www.geogebra.org/materials>を提供している。どちらも、キーワード検索や分類に従って教材を探せることになってい

るが、時系列順に玉石混交の品質のものが置かれているので、いざ実際の授業で使えるものをみつけるのは容易でない。

著者らは、日本（など各国）のカリキュラムに合った形で分類されていなければ、実際に使ってもらう機会を失ってしまうと考え、作成した教材を教科別に分けてウェブサイトを提供した[7]。残念ながら、このサイトを運用しているサーバーがスパム被害に遭うことが多かったため、運用見直しを迫られ、2017年現在、現在運用を停止している。目下、より授業・自習に使いやすいサイト再構築を進めている。e-Learningに広く利用され、サイト構築の自由度が比較的高い Moodle[1]を使用する。

同様の考えで明治大学阿原らは GeoGebra の教材を日本国内の教育向けに、教科ごとに分類して提供している <http://www.aharalab.sakura.ne.jp/geogebra/>。現在では、著者らが提供していたものより豊富な教材が公開されている。

GRAPES[9]は、関数のグラフの作成を得意とする、中等教育向けソフトウェアである。機能的には Mathematica や GeoGebra が勝るが、GRAPES のソフトウェアパッケージの中には豊富な教材があらかじめ提供されており、授業でそのまま使いやすいという特徴がある。

6. まとめと今後の課題

数式処理システム Mathematica および動的幾何学ソフト GeoGebra を用いて中等教育数学向けのソフトウェア教材を作成し、代表的なものを本稿で示した。ソフトウェア教材を試作する過程から、数学ソフトウェアをどのように活用できるか、またどのような問題が生じるか知見を得ることができた。作成した教材は、現在、一時的に公開を停止しているが、近々に、プラットフォームを新たに公開を予定している。

著者らの目標に、ソフトウェア教材自体を提供することもあるが、それとともに、ソフトウェア教材作成のノウハウを示すことも必要だと考えている。本稿でもその一部を示したが、細かい点が多いので、ソフトウェア教材とともにウェブサイトの中で提供するのが適切だろう。著者らが提供しているソフトウェア教材は、ソースを公開しており改変して使用できる。教師が授業に合わせて教材をアレンジして使用したいと思ったときに、どのようにすればよいか十分な情報が提供される必要がある。またそのような情報が提供されることで、ソフトウェア教材の有用性は高まる。

謝辞

本稿は、平成21年秋田大学大学院教育学研究科修士論文「高校・中学数学における関数の変化および図形の理解を促す教材ソフトウェアの開発」[6]で行われた研究の主要部分を発展させたものである。本稿で示したソフトウェア教材の多くに阿部君の貢献がある。また、阿部君の修士論文研究を進めるにあたって、秋田大学教育文化学部教授林良雄氏には様々な助言をいただいた。ここに感謝する。

日本数式処理学会諸氏、日本情報処理学会諸氏には、学会の質疑等で様々なコメントをいただいた。ここに感謝する。

参考文献

- [1] Dougiamas, Martin, and Peter Taylor, “Moodle: Using learning communities to create an open source course management system,” 2003.
- [2] Hohenwarter, Markus, and Karl Fuchs, “Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra,” *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*, 2004.
- [3] Kortenkamp, Ulrich, and J. U. R. G. E. N. RICHTER-GEBERT “The interactive geometry software Cinderella,” *Proceedings of the First International Congress of Mathematical Software*: Beijing, China, World Scientific, 2002.
- [4] Waterloo Maple Inc., “Maple V,” Canada, 1994.
- [5] Wolfram, Stephen. “Mathematica, Version 8,” Wolfram Research Inc., 2013.
- [6] 阿部寛之「高校・中学数学における関数の変化および図形の理解を促す教材ソフトウェアの開発」秋田大学教育学研究科修士論文 2011.
- [7] 佐々木重雄, 阿部寛之「高校・中学数学における関数および図形の理解を促すソフトウェア教材カタログの試作」日本情報処理学会第75回全国大会講演論文集, 2013 (1), 461-462.
- [8] 濱田龍義「大学初年級における GeoGebra の教育利用」数式処理と教育, 2010.
- [9] 友田勝久「関数グラフソフト GRAPES パーフェクトガイド」文英社, 2003.
- [10] 根岸秀孝「数学の授業が変わってくる—グラフ電卓を通してみた他国の数学教育」じっきょう数学資料 46号, 実教出版, 2003.
- [11] 清水克彦「初等中等段階の算数・数学教育における電卓の活用の現状と課題」コンピュータ & エデュケーション, Vol. 13, 13-20, 2002.
- [12] 山本修一「Mathematica を活用する数学教材とその検証」数理解析研究所講究録, 1735: 115-126, 2011.